Instituto Politécnico Nacional
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN

UN ESTUDIO SOBRE LAS ESTRATEGIAS DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO AL ENFRENTARSE AL CÁLCULO DEL ÁREA BAJO UNA CURVA.

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Mónica Olave Baggi

Directora de Tesis:
Dra. Cecilia Calvo Pesce

Co-Director de Tesis:
Dr. Javier Lezama Andalón

México, D. F., junio de 2005

ÍNDICE

UN ESTUDIO SOBRE LAS ESTRATEGIAS DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO AL ENFRENTARSE AL CÁLCULO DEL ÁREA BAJO UNA CURVA

Resumen

El presente trabajo fue planificado con el fin de explorar las concepciones intuitivas de los estudiantes del Bachillerato Diversificado de Uruguay con respecto al cálculo de áreas bajo una curva, que servirá de base para una futura propuesta para la enseñanza de la integral definida. Pensamos que vincularla con la noción de área sería el camino más adecuado ya que, por un lado, contamos con argumentos históricos que nos permiten inferir la pertinencia de este abordaje y, por otro lado, contamos con diferentes investigaciones, con las que hicimos contacto al analizar la bibliografía sobre el tema, que recomiendan el abordaje de la integral definida por este camino.

En base a esta postura nos preguntamos entonces cuáles son las estrategias que utilizan los estudiantes de Bachillerato Diversificado en Uruguay al enfrentarse al cálculo de área bajo una curva, antes de haber recibido una instrucción específica sobre este tema.

Con el fin de contestar esta pregunta se enfrentó a estudiantes de tercer año de Bachillerato (17-18 años), a dos gráficos de funciones, una parábola y una hipérbola, y se les pidió que calculen el área de la región comprendida entre la curva, el eje de las abscisas y dos rectas verticales. Se observó qué estrategias se ponen en juego para realizar el cálculo pedido. Posteriormente se realizó un análisis de estas estrategias, teniendo en cuenta aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos y los antecedentes de investigación. Finalmente se formularon recomendaciones didácticas para el abordaje de la Integral Definida.

A STUDY ON THE STRATEGIES STUDENTS FROM HIGH SCHOOL FACE WHEN CALCULATING THE AREA UNDER A CURVE

ABSTRACT

The aim of this work was to explore the intuitive conceptions the students from High School of Uruguay have with regard to the calculation of areas under a curve. This will also serve as the basis for a future proposal for the teaching of the defined integral.
We thought that linking it with the notion of area would be the most appropriate way since we have historic arguments that allow us to infer the relevance of this perspective. Apart from this, we count on different investigations on the same topic that agree with this approach.

Concerning this position we would like to know which strategies students from High School of Uruguay put at stake when they face the calculation of an area under a curve, without being previously instructed on this subject.

With the aim of answering this question, 6^{th} form high school students were given two function graphs, one parabola and one hyperbola. Then, they were asked to calculate the area of the region comprised between the curve, the axis of the abscissas and two vertical straight lines.
It was observed what strategies students put at stake to carry out the requested calculation. Then, a study of these strategies was done bearing in mind epistemological, cognitive and didactic aspects as well as the investigation background.
Finally, didactic recommendations were formulated for the approaching of the Defined Integral.

GLOSARIO

Bachillerato Diversificado (B.D.):
El Bachillerato Diversificado está organizado de la siguiente forma:
El primer año es común a todas las orientaciones y se dedican a Matemática 4 horas semanales. En toda la Enseñanza Secundaria, lo que llamamos "horas" de clase son módulos de 35 o 40 minutos.
El segundo año está organizado en tres Orientaciones: Humanística, Biológica, Científica. Las dos primeras con un curso de Matemática de una carga horaria semanal de 5 "horas"; la Orientación Científica con un curso de Geometría Euclidiana de 6 "horas" semanales y un curso de Álgebra de 6 "horas" semanales.
Para cada una de las tres Orientaciones de segundo año, en el tercer curso se abre la posibilidad a diferentes opciones. En la orientación Humanística se puede optar por Derecho y Economía; en la Biológica, por Agronomía y Medicina; en la Científica, por Arquitectura e Ingeniería.[1]

Cuadratura:
Proviene de uno de los tres grandes problemas de la Antigüedad: la cuadratura del círculo, que consiste en construir un cuadrado de área igual a un círculo dado. En esa época, debido a la crisis provocada por el descubrimiento de los irracionales[2], no se le asignaban a las figuras geométricas números que midieran sus áreas. Se trabajaba entonces calculando directamente con figuras que eran tratadas como magnitudes.
Para lograr la cuadratura de una figura, los griegos, debían encontrar la razón de dicha figura con otra previamente conocida.

Enseñanza Secundaria:
La Enseñanza Secundaria en Uruguay abarca seis años repartidos en Ciclo Básico Único (CBU), correspondientes al 7º, 8º y 9º años de escolarización, con estudiantes cuyas edades oscilan entre los 13-14 años y los 15-16 años; y los siguientes tres años corresponden al Bachillerato Diversificado (BD).

Estrategia:
El término estrategia puede considerarse una noción metadidáctica que no requiere definición y que se usa de una manera "ingenua". En este trabajo lo utilizaremos en el sentido de plan, esto es un curso de acción conscientemente deseado y determinado de forma anticipada, con la finalidad de asegurar el logro de los objetivos, un conjunto de actividades y procedimientos dirigidos hacia un fin. En el sentido de Bruner (1984), "una estrategia hace referencia a un patrón de decisiones en la adquisición, retención y utilización de la información que sirve para lograr ciertos objetivos, es decir, para asegurarse que se den ciertos resultados y no se produzcan otros".

Redes sistémicas[3]:
Para el análisis de los datos cualitativos obtenidos se ha elegido el uso de las redes sistémicas. Estas pueden ser vistas como un medio de divulgar los datos recogidos en forma categorizada. Esta categorización es entendida como una forma de etiquetar los datos, encasillarlos, darles nombres, reconocer que estas distinciones pueden ser

---

[1] Por más detalles ver Anexo III.
[2] Ver Capítulo I, componente epistemológica.
[3] La notación y terminología inherentes a las redes sistémicas y que permiten entender bien los datos y sus interrelaciones son presentadas en el Capítulo III.

dibujadas a lo largo de varias dimensiones independientes que involucren un solo nivel o que pueden necesitar divisiones sucesivas, es decir que una categoría puede ser subdividida en otras categorías. Esto dependerá de los objetivos trazados a la hora del análisis de datos. Una red sistémica es como un mapa del conjunto de categorías que se han seleccionado para usar, que nos muestran cómo se relacionan unas con otras. (Bliss et al.,1983).

Segmento de parábola (hipérbola):
Región encerrada entre una parábola (hipérbola) y una cuerda de la misma.

INTRODUCCIÓN

En nuestra experiencia como estudiantes y como docentes, en Uruguay, pudimos vivenciar que, en general, la enseñanza de la matemática se encuadra dentro del enfoque tradicional. Dentro de este contexto el actor principal es el docente que estaría a cargo de la presentación en el aula de los conceptos, proposiciones y procedimientos matemáticos, quedando el estudiante relegado al papel de mero receptor.
En particular, en la enseñanza de los elementos del Cálculo, se tiende a restringir el tratamiento a una práctica algorítmica y algebraica, buscando enseñar a los estudiantes a realizar cálculos de límites, derivadas, primitivas, y resolver algunos problemas estandarizados en una forma mecánica y exenta de significados. Esta práctica lleva a los estudiantes a pensar que hacer matemáticas es simplemente incorporar determinados procedimientos standards para poder derivar, primitivizar, calcular límites de un subconjunto de funciones con las que se trabaja en este nivel. En cuanto al desarrollo teórico de los temas del Cálculo, en general los docentes presentan a sus estudiantes una serie de axiomas, definiciones y teoremas en una estructura formal y lógica en la que el estudiante raramente participa. Esto lleva a los estudiantes a la creencia de que su tarea es memorizar dichas definiciones y teoremas y ser capaces de repetirlos cuando les sea solicitado.
Esto es reforzado a la hora de la evaluación ya que, por diferentes motivos, se termina evaluando solamente si el estudiante es capaz de realizar dichos cálculos, de repetir las definiciones y de recrear los resultados matemáticos que les fueron mostrados en clase. Este tipo de enfoque en la transmisión de los elementos del cálculo adolece también de una compartimentalización entre las definiciones de límites, derivadas, integrales y los procedimientos de cálculo de éstos, en los que no se distinguen los elementos que participan en las definiciones.
Estas prácticas mencionadas anteriormente no permiten o hacen muy difícil el tránsito de los estudiantes hacia la adquisición de los modos de pensamiento necesarios para el aprendizaje del cálculo. Esto se evidencia cuando, por ejemplo, no pueden resolver cuestiones como la determinación del máximo o mínimo de una función continua en un intervalo cerrado. De acuerdo a la forma en que están acostumbrados a trabajar los estudiantes inmediatamente derivan, determinan los extremos relativos y responden de acuerdo a lo que obtuvieron en la derivada sin tener en cuenta que están trabajando en un dominio acotado.

Enmarcados en este contexto y observando los resultados mayoritariamente negativos en el aprendizaje de las matemáticas es que nos propusimos tomar uno de los conceptos básicos del Cálculo, la integral, para abordar en el presente trabajo. El mismo es de corte exploratorio y tiene como principal objetivo investigar las concepciones intuitivas de los estudiantes del bachillerato de Uruguay con respecto al cálculo de áreas bajo una curva. Los estudiantes a los que hacemos referencia no han recibido ningún curso de cálculo integral por lo que no cuentan aún con la herramienta idónea que les permitiría realizar el cálculo de dichas áreas. Observaremos cómo estos estudiantes trabajan en este sentido, qué estrategias utilizan, para poder comparar esto con los abordajes que se realizan habitualmente en las aulas (que generalmente son tomados de los libros de texto más usados en Uruguay) y con los realizados en la obra matemática. Esto nos brindará la información y los argumentos que nos permitirá dar recomendaciones didácticas para, en una etapa posterior, presentar una propuesta didáctica acorde con las mismas, que permita a los estudiantes dar significado al concepto en cuestión. Esto es, que el estudiante no sea solo un espectador frente a la presentación de una serie de definiciones, teoremas y ejemplos, que su actuación no se restrinja solo a la ejecución de ciertos procedimientos algorítmicos, sino que sea capaz de integrar y relacionar el nuevo conocimiento a una estructura cognitiva donde ya hay asentadas otras nociones de calculo como limites y derivadas.

Como se verá en el Capítulo I y en el Anexo III, la presentación de este tema en el Bachillerato se hace acorde a los currículos vigentes, lo cual es recogido en los libros de texto de nuestro país. La elección hecha por quienes elaboran los programas uruguayos para insertar el tema en el mismo es tratar a la integral como primitiva, admitiendo la existencia de la misma para funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado. Se hace un tratamiento algebraico del tema, independiente de la noción de área, y se considera a la primitivización como "inversa" de la derivación.

Lo que describimos en el párrafo anterior es uno de los posibles caminos que se pueden elegir para la presentación del tema a los estudiantes. Otra presentación posible sería vinculándola con la noción de área. Nosotros hemos pensado que este último camino sería el más adecuado ya que, por un lado, tenemos argumentos históricos, que veremos en el Capítulo I, que nos permiten inferir que la integral debería abordarse asociada a la noción de área. Por otro lado contamos con diferentes investigaciones, algunas de las cuales comentaremos en el Capítulo II, que recomiendan el abordaje de la integral definida por este camino.
En base a esta postura nos preguntamos entonces cuáles son las estrategias que utilizan los estudiantes de bachillerato en Uruguay al enfrentarse al cálculo de área bajo una curva. En la medida que vayamos respondiendo a la pregunta anterior, en base a los datos que recogeremos, tendremos elementos para intentar responder otra pregunta: ¿cómo presentar a la integral definida teniendo en cuenta las intuiciones de los estudiantes para calcular el área bajo una curva?

Para ello, nos centraremos en el estudio del cálculo de áreas de figuras limitadas por la gráfica de una función continua y no negativa definida en un intervalo [a,b], el eje de las abscisas, y las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$.
Hemos elegido trabajar con funciones continuas ya que, al preguntarnos acerca de las estrategias intuitivas que los estudiantes ponen en juego al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva, necesitamos que éstos no hayan tenido contacto previo con el cálculo integral. Esto, de acuerdo a los currículos vigentes en Uruguay, nos lleva a trabajar con estudiantes de Bachillerato que en cuanto al tema funciones han trabajado con funciones lineales, cuadráticas, polinómicas en general y funciones racionales cuya representación gráfica es una hipérbola. Pensamos que trabajar con otro tipo de funciones provocaría dificultades extras que nos alejarían de nuestro objetivo.

Sabemos que estas estrategias intuitivas que estamos tratando de detectar en nuestros alumnos están dirigidas a la cuestión del área de una región bajo una curva de una función positiva y eso, en el momento de enseñar formalmente el concepto de integral deberá ser adaptado con el fin de considerar que el concepto de área y de integral sólo coinciden en este caso.

Objetivos

Como ya dijimos, para abordar este estudio nos hemos preguntado, en una primera instancia, **cuáles son las estrategias que utilizan los estudiantes de Bachillerato Diversificado al enfrentarse al cálculo de área bajo una curva.**

El término estrategia puede considerarse una noción metadidáctica que no requiere definición y que se usa de una manera “ingenua”. En este trabajo lo utilizaremos en el sentido de plan, esto es un curso de acción conscientemente deseado y determinado de forma anticipada, con la finalidad de asegurar el logro de los objetivos, un conjunto de actividades y procedimientos dirigidos hacia un fin. En el sentido de Bruner (1984), “una estrategia hace referencia a un patrón de decisiones en la adquisición, retención y utilización de la información que sirve para lograr ciertos objetivos, es decir, para asegurarse que se den ciertos resultados y no se produzcan otros”.

Al plantear nuestra pregunta de investigación, la idea fundamental es contrastar, comparar las estrategias utilizadas por los estudiantes, frente a un tema al cual nunca se han enfrentado antes, con las estrategias usadas a nivel de la obra matemática. Es decir, que el objetivo fundamental de este trabajo es detectar dichas estrategias para luego analizar las ventajas, desventajas, dificultades y limitaciones que las mismas pueden generar al momento de tratar el tema formalmente.

Como preguntas secundarias, que pensamos nos ayudarán a contestar la pregunta central, podemos destacar:

- La concavidad de la función, ¿influye a la hora de la elección de la estrategia?

- El estudiante, ¿utiliza toda la información que se le proporciona en el enunciado?, ¿Utiliza la expresión analítica de la función para determinar las dimensiones de las figuras auxiliares que traza?

- Como ampliación de lo anterior, ¿encara la actividad en forma compartimentada o puede fusionar los elementos de análisis matemático con los geométricos?

- ¿Cambia de estrategia a lo largo de la prueba?, ¿Los intentos anteriores influyen en su actividad al encarar las actividades siguientes?

- ¿Considera que los procedimientos que utiliza se pueden continuar indefinidamente o lo ve como un proceso finito?

Finalmente se pretende, en base a los resultados obtenidos y al análisis de los mismos en el marco de las consideraciones teóricas, formular recomendaciones didácticas para el abordaje de la integral definida asociada a la noción de área.

De acuerdo a los objetivos recién detallados es que presentaremos nuestro trabajo de la siguiente forma:

Organización del trabajo

El presente trabajo está dividido en seis capítulos.

En el Capítulo I, titulado Consideraciones Teóricas, buscamos, en base al planteamiento de la problemática que nos ocupa, detallar en qué línea de investigación se encuadra nuestra investigación y la caracterización de la misma. Para ello haremos un análisis del tema de investigación desde las perspectivas epistemológica, cognitiva y didáctica tomando una cuarta componente, la sociocultural, como integradora de las otras tres. Es en estos aspectos en los que nos basaremos luego para hacer el análisis de los resultados recogidos en el cuestionario propuesto a los estudiantes.
Desde en punto de vista epistemológico intentaremos dar una explicación del origen y desarrollo del contenido matemático analizando su funcionamiento y diferentes formulaciones del mismo; desde el cognitivo analizaremos las habilidades cognitivas que los estudiantes poseen y deben poseer para realizar un aprendizaje significativo del tema; desde el didáctico analizaremos el estado actual de la enseñanza del tema.

En el Capítulo II, denominado Antecedentes, haremos una reseña de algunos trabajos e investigaciones que están vinculados con el tema que nos ocupa en todos o algunos de sus aspectos. De cada uno de ellos destacaremos los objetivos, los resultados obtenidos, las conclusiones y la vinculación de los mismos con nuestro trabajo.

En el Capítulo III, Diseño Experimental, presentaremos, en una primera instancia, la secuencia que fue diseñada para ser presentada a los estudiantes como medio para recabar los datos que nos permitan dar una respuesta a nuestra pregunta de investigación. Haremos una justificación de la misma analizando los por qué de las propuestas y qué esperamos de los estudiantes en cada uno de los ítems propuestos. Presentaremos, además, un análisis de la propuesta desde el punto de vista matemático.
Luego haremos un detalle de las características de la población entrevistada y de la puesta en escena de la propuesta.
En una segunda instancia haremos una descripción de la metodología que hemos decidido utilizar para la presentación e interpretación de los datos que hemos recabado.

El Capítulo IV, que lleva por título Los Resultados, estará estructurado de la siguiente forma:
Se presentarán primero redes sistémicas correspondientes a cada uno de los ítems propuestos en el cuestionario, en donde se tabularán los primeros datos recogidos, destacándose en las mismas las diferentes estrategias que surjan de un primer análisis de las pruebas.
Luego de la presentación de las redes haremos un análisis global de las respuestas buscando extraer las primeras reflexiones, presentando las diferentes categorías detectadas, en un intento de comenzar a dar respuesta a nuestra pregunta de investigación.

De acuerdo a las diferentes estrategias que se detecten en los tabajos de los estudiantes se seleccionarán las pruebas que consideremos que representan a cada una de las categorías. Se presentará un análisis profundo de las mismas en la sección que denominaremos Análisis de casos.
Para finalizar presentaremos un análisis general de los resultados a la luz de las consideraciones teóricas, englobando los resultados que vayan surgiendo en las primeras reflexiones y en el análisis de casos, confrontando los resultados obtenidos con los esperados en el análisis a priori que realizaremos en el Capítulo III.

El Capítulo V, estará dedicado a presentar un resumen de los resultados, las conclusiones a las que arribaremos y se enumerarán las consideraciones y recomendaciones didácticas que consideremos pertinentes.

Por último, en el Capítulo VI se consignará la bibliografía utilizada en la realización de este trabajo.

Por último se presentarán cuatro anexos en donde figuran cuestiones inherentes a los diferentes aspectos que se tratarán en los distintos capítulos.

En el primero de ellos presentaremos las demostraciones de algunas cuadraturas, en especial las correspondientes a los segmentos de parábola y de hipérbola, que ilustran diferentes estrategias utilizadas por los matemáticos a lo largo de la historia. Analizaremos la cuadratura de una de la lúnulas de Hipócrates; diferentes aspectos del trabajo de Arquímedes como ser una descripción de la utilización del Método Mecánico en cuanto a la cuadratura del segmento de parábola, la demostración de la misma por el Método geométrico y la demostración de algunas de las propiedades que utilizó en la demostración métrica de la determinación del área; la cuadratura de la parábola de Cavalieri en base al concepto de los indivisibles y por último los trabajos de Saint-Vicent y su discípulo, de Sarasa quienes reconocen que la cuadratura de la hipérbola está estrechamente vinculada con la propiedad del producto de los logaritmos.

En el Anexo II se presentarán algunas pruebas visuales de suma de enteros que son utilizadas en el cálculo de las áreas buscadas.

En el Anexo III describiremos a grandes rasgos la organización del sistema educativo uruguayo en donde están insertos los estudiantes entrevistados. Se presentarán además aquellos programas de Matemática correspondientes al Bachillerato Diversificado de Uruguay cuyos contenidos fueron trabajados por los estudiantes que componen nuestra muestra.

Por último en el Anexo IV presentaremos algunos caminos empíricos que podrían representar alternativas para la presentación del tema integrales a estudiantes de bachillerato.

I. CONSIDERACIONES TEÓRICAS

En este capítulo presentaremos, en la introducción, una breve descripción de la problemática y evolución de la didáctica de la matemática hasta su estado actual para encuadrar así la presente investigación y poder caracterizar la misma.
A continuación haremos un análisis del tema que nos ocupa desde las perspectivas epistemológica, cognitiva y Didáctica. Es en estos aspectos en los que nos basaremos para hacer el análisis de los resultados recogidos en el cuestionario propuesto a los estudiantes en la parte experimental de esta tesis.
Desde el punto de vista epistemológico intentaremos dar una explicación del origen y desarrollo del contenido matemático, analizando su funcionamiento y diferentes formulaciones del mismo; desde el didáctico analizaremos el estado actual de la enseñanza del tema; desde el cognitivo analizaremos las habilidades cognitivas que los estudiantes poseen y deben poseer para realizar un aprendizaje significativo del tema.

I.1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, muy posiblemente debido a los resultados mayoritariamente negativos en el aprendizaje de las matemáticas, se ha empezado a hacer una revisión y un análisis crítico de los procesos involucrados en dicho aprendizaje.

“Antiguamente se consideraba que la enseñanza de las matemáticas era un arte y, como tal, difícilmente susceptible de ser analizada, controlada y sometida a reglas. Se suponía que el aprendizaje dependía sólo del grado en que el profesor dominase dicho arte y, en cierto sentido, de la voluntad y la capacidad de los propios alumnos para dejarse moldear por el artista.” (Chevallard et al., 1997).

Esta visión ha ido evolucionando a medida que crece el interés por entender y explicar los hechos didácticos. En este camino se ha observado que la enseñanza no depende sólo de la metodología empleada sino, entre otros, de la complejidad de los propios objetos matemáticos. Nociones transparentes, en el sentido de Chevallard et al. (1997), como por ejemplo, qué es enseñar, qué es aprender, entre otras, que eran dejadas por la didáctica general para la psicología u otras disciplinas, ahora son tomadas por la didáctica de la matemática, la que pretende constituirse como disciplina científica, explicando desde su propio seno el significado de dichas cuestiones que pasan a ser objeto de estudio de la propia didáctica.

Se empiezan a abordar cuestiones como ser: ¿Cuál es el papel de las “rutinas” en el aprendizaje de las matemáticas? ¿Cómo diferenciar las rutinas de las actividades “creativas”? ¿Qué papel juega o podría jugar la actividad de resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas? ¿Cómo se interpreta un contenido matemático específico? ¿Cómo caracterizar o modelar los procesos de comprensión de los conceptos y procesos propiamente matemáticos? ¿Cuál es la relación entre el aprendizaje del álgebra elemental, la aritmética y la geometría? (Chevallard et al., 1997).

La aparición de una cantidad de fenómenos didácticos que no podían ser explicados desde la didáctica general y que eran tomados hasta el momento como herramientas explicativas da lugar a una gran gama de objetos de estudio en sí mismos para la didáctica de la matemática. Ésta pone en tela de juicio la transparencia del conocimiento matemático, lo problematiza. Se produce entonces una ruptura de la problemática de la didáctica, incorporando como objetos de estudio propiamente didácticos a aquellos que antes eran considerados como objetos y nociones matemáticas transparentes. Pone de manifiesto que en todo fenómeno didáctico existe un componente matemático esencial.

Otro aspecto a tener en cuenta es que muchos de los programas de estudio de la mayoría de los países latinoamericanos tuvieron su origen en la cultura europea. Cuando los colonizadores se instalaron en nuestros países llevaron adelante un tipo de educación basado en la tradición a la que ellos mismos pertenecían: "La transferencia a los países en desarrollo del currículo europeo de matemática está estrechamente asociada con el establecimiento de escuelas para la élite por parte de las administraciones coloniales. Parecía muy natural, bajo estas circunstancias, copiar, simplemente las pautas europeas." (Damerow y Westbury, 1984).
Como los colonizadores constituían los grupos de poder, eligieron qué educación y qué valores debían recibir sus descendientes (entre otras cosas para seguir formando parte de los grupos de poder).
Esto ha traído aparejado no sólo la transferencia de los currículos europeos hacia las instituciones escolares latinoamericanas, sino también la transferencia y validación de conocimientos, significados y formas de pensar asociados a esos conocimientos provenientes de la cultura occidental europea hacia los estudiantes latinoamericanos.

Uruguay no escapó a esta tendencia de transferir los currículos europeos a sus instituciones. Desde la época colonial a la actualidad, en el ámbito cultural y en particular en la enseñanza, nuestros ojos han estado siempre atentos a lo que ocurría en Europa, principalmente en Francia. Tomaremos por ejemplo los programas de matemática de los dos últimos años del B.D., ya que el tema que nos ocupa en este trabajo es tratado en cursos de esta etapa.
Estos programas, vigentes en todo el país, fueron inspirados, o más bien extraídos, de los programas franceses de la década del 40. Los cambios que se produjeron en ellos en las décadas siguientes no fueron estructurales sino que respondieron a los cambios de enfoques en la educación que también provenían de Europa. Como señalan estudios de la OEI[4]: "El diseño curricular uruguayo está constituido fundamentalmente por los contenidos de cada curso careciendo de cualquier otro elemento curricular de manera que explícitamente no existe ningún tipo de reflexión (epistemológica, psicopedagógica, cultural o social) en la que se fundamenten los programas de los distintos cursos. [...] sólo en el programa del tercer curso de la primera etapa aparece un listado de `Capacidades personales del alumno que se deben activar´. Éstas se refieren a actitudes, habilidades, capacidades intelectuales, estrategias generales y sentido de la apreciación en matemáticas. Es una manera de señalar objetivos no conceptuales ni algorítmicos en la enseñanza de las matemáticas, como si estos últimos ya se supusieran o quedaran `ocultos´ tras el listado de los temas que constituyen el programa. En todo caso, este hecho singular no enmascara la apreciación de una ausencia de objetivos en todo el diseño curricular". (Del Río Sánchez et al., 1992).

---

[4] Este estudio fue realizado consultando los siguientes materiales:
- *Programas de matemática Ciclo Básico Único*, ANEP, Consejo de Educación Secundaria, 1987.
- *Programas de matemática Bachillerato Diversificado*, ANEP, Consejo de Educación Secundaria, 1989.
Vale aclarar que estos programas están aún vigentes en nuestro país.

En los programas escolares mencionados, de pre-cálculo y cálculo, se incluyen axiomática de Número Real, estudio de funciones de variable real que abarca el estudio de límites, continuidad, derivadas, primitivas y los teoremas relativos. En general, se trabaja con un lenguaje formal y en base a axiomas, definiciones, teoremas, predominando un manejo algebraico, todo centrado en el discurso del docente.
Bajo esta óptica se concibe el proceso de enseñanza como un proceso mecánico y trivial totalmente controlable por el profesor concibiendo al alumno como una “caja vacía” que debe llenarse gradualmente partiendo de los conceptos lógicamente más simples hasta llegar a los sistemas conceptuales más complejos.

Se presenta así a esta asignatura como un cuerpo estructurado de conocimientos, formado por objetos matemáticos, las relaciones entre ellos y criterios de validación dentro de un marco axiomático-deductivo. Esta concepción necesita que todo esté expresado formalmente haciendo que la matemática y la verdad matemática quede reducida a una coherencia sintáctica de sistemas formales y simbólicos.
Vemos que la epistemología implícita, nunca explícita, de los responsables de la elaboración de los programas está centrada en el objeto matemático, y responde a una larga tradición en la enseñanza de la matemática en nuestro país.
Seguramente el enfoque de los currículos uruguayos se basa en modelos teóricos que explican las construcciones del conocimiento a través de los objetos matemáticos, llevando a que el conocimiento matemático adquiera un carácter universal, sin tener en cuenta al individuo que aprende y el contexto en el que se desarrolla la situación de aprendizaje. Esta epistemología está basada en el argumento de la regresión para establecer la progresión del saber.

Analizando el problema desde otro ángulo, Cordero (2001) considera que las epistemologías deben estar modelizadas por el estudio del hombre haciendo matemáticas. O sea que la epistemología debería reconocer la actividad humana como organización social y fuente de construcción de conocimientos. La actividad humana se transforma en la nueva generadora de epistemologías que amplían la problemática y obliga a incorporar la dimensión social.

En el seno de la organización social se reconstruyen significados de la matemática como recursos para incorporar cierto conocimiento matemático. En este sentido, Cordero (2001) plantea la realización de un trabajo matemático de reorganización de los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos que componen cada obra matemática con base en lo que esta representa. Es decir que no alcanza con secuenciar y temporalizar los contenidos programáticos sino que se debe reinterpretar, reorganizar la obra matemática, teniendo en cuenta los elementos teóricos, el desarrollo tecnológico, etc., que ayuden a la reconstrucción de significados de los procesos y conceptos matemáticos.

Esta perspectiva aparece como una alternativa posible que permitiría reformular el discurso matemático escolar centrando la atención en la actividad humana y en el hombre haciendo matemática más que en los objetos matemáticos. Se aprecia en este sentido una intención liberadora, ya que permite incorporar nuevas categorías de conocimiento que surgen de la actividad humana, de un grupo humano específico y que no son necesariamente heredadas de culturas foráneas.

Dentro del contexto de la Matemática Educativa, se ha desarrollado una línea de investigación que incorpora las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social fundamentales para lo que se denomina construcción social del conocimiento. A estos cuatro componentes en conjunto y en una aproximación sistémica es lo que Cantoral y Farfán (1998) llaman acercamiento socioepistemológico.

Centrar la atención en la actividad humana y no en los objetos matemáticos, permite distinguir diferentes construcciones del conocimiento que son el reflejo de diferentes formas de pensamiento matemático: "... debemos interesarnos por entender las razones, los procedimientos, las explicaciones, las escrituras o las formulaciones verbales que el alumno construye para responder a una tarea matemática, del mismo modo que nos ocupamos por descifrar los mecanismos mediante los cuales la cultura y el medio contribuyen en la formación de los pensamientos matemáticos. Nos interesa entender, aun en el caso de que su respuesta a una pregunta no corresponda con nuestro conocimiento, las razones por las que su pensamiento matemático opera como lo hace". (Cantoral et al., 2000)
Esto permitirá entender mejor los procesos cognitivos de los estudiantes y emprender acciones que tengan como objetivo facilitar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática.

Bajo la aproximación socioepistemológica se desarrollan líneas de investigación en que se estudian las circunstancias que favorecen la construcción del conocimiento, estudiando situaciones que no están definidas a priori en la estructura matemática pero que están presentes. "Se presenta aquí una aproximación teórica, en la que la actividad humana es la nueva plataforma que brinda epistemologías que amplían la problemática, obliga a incorporar la dimensión social, reconocer categorías de conocimiento matemático con relación a las reconstrucciones de significados de la matemática que a priori no están en el currículo, romper el carácter universal de la construcción a través de considerar otras, formular nuevas acciones didácticas en las que el diseño de las situaciones está sustentado por la actividad humana." (Cordero, 2001).
En la actividad humana que se realiza a diario en el aula, de acuerdo a las necesidades y expectativas de los actores, en las situaciones de interacción entre los estudiantes y con el docente, se reconocen y se llevan a cabo construcciones del conocimiento. Éste tiene significados propios, contextos, historia e intención.
Buendía y Cordero (2001) plantean la necesidad de que se reconozca a la actividad humana como organización social en la que se construyen conocimientos. El individuo, haciendo matemática, eligiendo y negociando las herramientas que les resulten adecuadas (en consenso con sus pares, los docentes, con su entorno social, cultural, etc.), es el que da significado al concepto.

Desde la óptica de esta aproximación, lo socioepistemológico debe significar el reflejo del individuo haciendo matemáticas y, considerar que el funcionamiento mental debe estar en correspondencia con el lenguaje de herramientas que resulta de esa actividad.
Como consecuencia de ello se establecen categorías del conocimiento matemático que son el núcleo para reorganizar la obra matemática.
Estas categorías, basadas en el lenguaje de las herramientas, hacen la diferencia, ya que no se trata de establecer una definición sino de identificar todas las relaciones en el marco de referencia del contenido matemático lo que llevaría a las formas en la que se construyen los procesos y objetos y no a éstos en sí mismos.

La aproximación socioepistemológica rescata la *historicidad* asociada a todo conocimiento pues éste es el producto de la actividad humana. Esta historicidad no solo involucra los aspectos históricos y culturales que confluyen en cualquier acto de un individuo sino que también tiene en cuenta la creación de nuevos conocimientos y de nuevos significados, ya sea que estén asociados a contenidos tradicionales o a nuevos conocimientos creados por los individuos de un colectivo.
Tiene en cuenta que los procesos mentales del hombre poseen una estrecha relación con los escenarios culturales, históricos e institucionales donde el individuo se desarrolla. Los distintos escenarios donde crece un individuo determinan sus patrones de pensamiento, que influirán decididamente en su visión de todas las cosas y que modificarán su aprendizaje por lo que podremos hablar de la forma de pensar en determinado siglo, del tipo de razonamiento del profesor y de los alumnos en situación escolar, etc.

Para entender los procesos de pensamiento de un sujeto, no podemos pensarlo como un ser aislado, independiente del mundo que lo circunda. Los patrones de pensamiento de un individuo son producto de sus experiencias en las instituciones sociales donde el individuo se ha desarrollado. La sociedad en la que crece y la historia de su desarrollo en el marco de sus experiencias en esa sociedad, modelan los estilos que usará para pensar.

Estos estilos de pensamiento se reflejan en la diversidad de razonamientos que aparecen en el aula cuando los alumnos se enfrentan a una tarea matemática, siempre que ésta constituya para ellos un desafío intelectual. Los significados, los argumentos, las nuevas actividades y problemas que surgen en el aula, permiten reorganizar la obra matemática y reformular el discurso escolar.

Esta línea de investigación, desarrollada por Cantoral et al. (2000), toma como objeto de estudio a la socioepistemología de los saberes matemáticos poniendo también énfasis en el estudio de qué enseñar, y no sólo en el cómo enseñar. Incluye además las intuiciones primarias del alumno con el objetivo de rediseñar el discurso matemático escolar.
Es en este marco en el que se encuadra la presente investigación, aunque debemos precisar que solamente realizaremos nuestro estudio teniendo en cuenta las componentes epistemológica, didáctica y cognitiva, no abordando en esta oportunidad los aspectos sociales.
Nos preguntamos ¿qué estrategias utilizan los estudiantes de Tercer año de Bachillerato Diversificado al enfrentarse al cálculo de área bajo la curva?

Al plantear la pregunta anterior, la idea fundamental es contrastar, comparar, las estrategias utilizadas por los estudiantes, frente a un tema al cual nunca se han enfrentado antes, con las estrategias usadas a nivel de la obra matemática.
Otro de los objetivos es determinar qué técnicas consideran adecuadas los estudiantes para la resolución de estos problemas, en base a qué argumentos las seleccionan, cómo las utilizan, etc.

Se pretende, en base al análisis de los resultados obtenidos por la investigación, interpretar y reorganizar el tratamiento escolar del tema para, en una etapa posterior, realizar recomendaciones y elaborar situaciones que lleven a que los estudiantes den a la integral definida un significado y que el concepto no se reduzca simplemente a su tratamiento algorítmico.

A continuación haremos un análisis del tema que abordamos en este trabajo involucrando las tres componentes mencionadas, es decir, se intentará dar un "diagnóstico sobre el funcionamiento del sistema de enseñanza, de los efectos que produce en las concepciones de los estudiantes y un aspecto sustancial: la naturaleza intrínseca del saber matemático que se pone en escena en la situación escolar." (Farfán, 1997).

Desde el punto de vista epistemológico se intentará dar una explicación del origen y desarrollo del contenido matemático analizando su funcionamiento y diferentes formulaciones del mismo; desde el cognitivo analizaremos las habilidades cognitivas que los estudiantes poseen y deben poseer para realizar un aprendizaje donde signifiquen el tema; desde el didáctico se analizará el estado actual de la enseñanza del tema.

I.2. COMPONENTE EPISTEMOLÓGICA

Un análisis epistemológico nos permitirá reconocer las fuerzas culturales que permitieron el nacimiento de este saber y su desarrollo, a efectos de entender el escenario que permitió su gestión, las preguntas fundamentales y las nociones germinales que acompañaron a este conocimiento. Podremos así reconocer las caracterizaciones, las habilidades y técnicas referentes al concepto de integral que le dieron origen y lo desarrollaron.

Queremos aclarar que no se trata de una mera investigación histórica, aunque nos serviremos de ella, sino que se pretende conocer y precisar el origen de este conocimiento, desde su génesis, los sentidos y significados de dicho concepto, así como su evolución y desarrollo. Esto nos permitirá, además, obtener información para poder apreciar las modificaciones que ha sufrido este conocimiento al introducirse en las instituciones educativas como saber escolar.

Consideramos valioso observar la evolución histórica de un conocimiento matemático, para la significación del mismo, por lo que nos centraremos en hacer una pequeña reseña histórica de los orígenes y el desarrollo del cálculo infinitesimal, deteniéndonos en los puntos que consideramos importantes con referencia a nuestro tema de estudio. Creemos importante el estudio histórico del concepto en cuestión, ya que nos ayudará a determinar los mecanismos presentes en el desarrollo del mismo, así como a hacernos conscientes de los cambios que este concepto ha sufrido al ser llevado al aula. También nos permitirá analizar cuáles fueron los obstáculos que ha tenido la humanidad en el desarrollo de este concepto y si estos se repiten en nuestros alumnos en el proceso de adquisición del mismo.

Haremos escala en algunos momentos claves para el desarrollo del concepto como ser:

- En la Antigua Grecia, en donde se inventan y desarrollan mecanismos para la resolución de problemas particulares, vinculados al cálculo de áreas de figuras no poligonales, caracterizados por la exactitud en los resultados presentados y la rigurosidad en los razonamientos. Si bien son muchos los hombres que hicieron aportes en este sentido, nos centraremos en los trabajos realizados por Hipócrates, Eudoxo y Arquímedes.

- En los siglos XVI, XVII y XVIII cuando resurge la curiosidad por la matemática griega, se le da un nuevo valor a la intuición y se dejan de lado, por el momento, los métodos rigurosos, dándole así un nuevo impulso al Cálculo. Se da una búsqueda de procesos y de generalización. Se llega a un método general para la resolución de una cantidad considerable de problemas. Algunos de los matemáticos involucrados en estas tareas fueron, Cavalieri, Fermat, Pascal, Descartes y Barrow. Este último se destaca entre ellos por ser quien estableció que los procesos de cálculo de tangentes y de cuadraturas son inversos. Pero fueron principalmente su discípulo, Isaac Newton y el alemán Gottfried W. Leibniz quienes desarrollaron los conceptos de derivada y de integral, sin realizar una fundamentación rigurosa. Destacaremos el impulso que estos nuevos conocimientos y métodos dan al cálculo de áreas, en particular referidos a las curvas a las que se verán enfrentados nuestros entrevistados.

- En los siglos XIX y XX donde se trabaja en los fundamentos y abstracción de los conceptos relacionados al Cálculo, adquiriendo la configuración que actualmente presenta. Se consolida así el cálculo como un objeto de estudio.

I.2.1. Primera escala: La Antigua Grecia

Con el descubrimiento, hacia mediados del siglo V a. C., de la magnitud irracional, el *alagón* (lo inexpresable), se viene abajo el paralelismo que los pitagóricos habían establecido entre el concepto numérico y la representación geométrica.
Esta crisis provocada por el descubrimiento de los irracionales hace que se limite a la Aritmética al estudio de los racionales y esto no permite que se le asignen a las figuras geométricas números que midieran sus áreas. Se trabaja entonces calculando directamente con figuras que eran tratadas como magnitudes.
Para lograr la cuadratura de una figura, los griegos, debían encontrar la razón de dicha figura con otra previamente conocida.
Otra consecuencia provocada por esta crisis y las paradojas de Zenón es el "horror al infinito" que caracteriza a casi toda la matemática griega. Esto lleva a que se desarrolle una matemática, mayoritariamente Geométrica, caracterizada por el rigor lógico de su tratamiento.

Había que evitar el concepto infinitesimal de número irracional, problema que resuelve Eudoxo de Cnido (408-355) introduciendo el concepto de *"tan pequeño como se quiera"* (equivalente a nuestro proceso de paso al límite) junto a la teoría de magnitudes.

Sin los irracionales Eudoxo trabaja con cantidades que se pueden hacer menores que un número arbitrario dado y para ello introduce lo que en la actualidad llamamos *axioma de continuidad* o *principio de Arquímedes*:
Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra.[5]

[5] Definición V.4 de los *Elementos* de Euclides.

Este axioma es aplicado para la demostración, por reducción al absurdo, de la proposición X.1 de los *Elementos* de Euclides que da lugar al "método de exhaución" de Eudoxo: *Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas.*

El axioma de continuidad, el principio de Eudoxo y el método de exhaución hacen posible "evitar" el problema del infinito; se trabaja así en forma geométrica lo que hoy sería nuestro pase al límite. (González, 1992).
Con el método de exhaución se logra rigor lógico en la prueba matemática, pero, la aplicación del mismo sólo es posible si se conoce con anterioridad lo que se quiere demostrar, transformándose en un método de demostración pero no de descubrimiento.

Con todos estos elementos, los griegos lograron cuadrar algunas figuras curvilíneas.

Hipócrates de Chíos (450 a. C.) dedicó parte de su obra a la cuadratura de las lúnulas, logrando cuadrar alguna de ellas.

"Una lúnula es una figura plana limitada por dos arcos de circunferencia de distintos radios." (Boyer, 1986).

Utilizando alguna de las ideas antes mencionadas y a partir de propiedades, cuyo descubrimiento se le atribuyen, "consiguió fácilmente Hipócrates la primera cuadratura rigurosa de una figura curvilínea en la historia de la matemática."[6] (Boyer, 1986).

Hipócrates y Arquímedes buscaban lo mismo: cuadrar figuras no rectilíneas. Mientras que uno lo intentó con lúnulas el otro lo hizo con segmentos de parábolas y espirales.

Arquímedes, nacido muy posiblemente en Siracusa alrededor del año 287 a. C., es considerado el más grande de los matemáticos de la Antigüedad. Fue lo que hoy llamaríamos un matemático teórico y un físico experimental. Según Chasles (Citado en Boyer, 1949), Arquímedes "dio nacimiento al cálculo del infinito concebido y llevado a la perfección sucesivamente por Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz y Newton" e hizo posible el desarrollo de los conceptos de derivada e integral. En la demostración de sus resultados el fue más allá del procedimiento de Eudoxo modificando el método de exhaución para el cálculo de cuadraturas, considerando no sólo la figura inscrita sino también la figura circunscrita. El método de exhaución no era una herramienta que por sí sola se adaptara correctamente al descubrimiento de nuevos resultados, pero Arquímedes la combinó con consideraciones infinitesimales que junto con la libertad con que los manipuló resultaron eficientes para la solución de problemas que involucraban áreas y volúmenes.

[6] La demostración de la misma se encuentra en el Anexo I.

En su obra *Sobre la cuadratura de la parábola*, Arquímedes utiliza el método de exhaución para realizar una justificación rigurosa del cálculo del área de un segmento de parábola, resultado ya encontrado por él mediante el método mecánico.
Es así que Arquímedes encuentra el área de un segmento de parábola dividiéndolo en una serie de triángulos que agotan el área del segmento en el sentido que el área de la región no cubierta por los triángulos se puede hacer "tan pequeña como se quiera".[7]

Para determinar la relación que le permite cuadrar un segmento de parábola Arquímedes aplica las leyes de la palanca y la determinación del centro de gravedad de figuras planas que él mismo había descubierto[8].
Arquímedes ya utilizaba para sus demostraciones y descubrimientos argumentos infinitesimales; consideraba las áreas compuestas de segmentos de forma tal que si estas componentes estaban en proporción con las componentes de otra área entonces las áreas de ambas figuras guardaban dicha proporción. Como veremos esta idea es retomada, o mejor dicho reinventada, por los matemáticos de XVII, como Pascal, Cavalieri y otros. Cabe destacar que el trabajo de Arquímedes, *El Método*, en donde aparecen sus concepciones infinitesimales, estuvo extraviado hasta el año 1906.

En su trabajo aparecen también razonamientos de aproximación por defecto y por exceso de las áreas buscadas.
Todos estos argumentos serán retomados más adelante y serán los cimientos del cálculo diferencial e integral.

Pero la obra de Arquímedes carece de algunos elementos presentes en el cálculo diferencial: se evita el paso al límite[9], no se hace una generalización de procedimientos para resolver problemas ni una clasificación de los mismos sino que cada problema depende de las características geométricas del mismo y no se reconoce la vinculación de las cuadraturas con las tangentes.

I.2.2. Segunda escala: Siglos XVI, XVII y XVIII

El gran desarrollo generado por la ciencia griega permaneció en suspenso durante la Edad Media, debiendo esperar al Renacimiento en el siglo XV, para que se retomaran los conceptos y métodos de la Antigua Grecia. A pesar de esto, nuevos aportes a lo infinitesimal fueron hechos por los filósofos medievales en sus discusiones sobre el infinito, la naturaleza del continuo y los indivisibles, aunque más en el sentido filosófico que matemático. Entre los temas que manejaron se encontraban el estudio del cambio y el movimiento que, en el siglo XIV, en las Universidades de Oxford y París, dan lugar a las primeras cuestiones de índole infinitesimal que diferían de las de la Geometría Griega.

---

[7] En el Anexo I Presentamos bajo el título Método Geométrico la demostración geométrica de la cuadratura de un segmento de parábola.
[8] En el Anexo I presentamos bajo el título de Consideraciones Mecánicas los razonamientos realizados por Arquímedes en este sentido, que le permiten concluir que el área del segmento de parábola es 4/3 el área del triángulo inscrito en el mismo.
[9] Con esto nos referimos a que en esa época, respondiendo a exigencias académicas alejandrinas, euclídeas y a contenidos estrictamente teóricos y rigurosos, obligaban a evitar el uso de razonamientos que involucraban al infinito evitando así las dificultades que dicho concepto introducía en la argumentación lógica. (Montesinos, 2000)

Se puede destacar el trabajo de **Nicolás de Oresme** (1323-1382) quien estaba más interesado por las cuestiones de la variación de las formas (aspectos diferenciales) y la variación del área bajo la curva (aspectos integrales) que por el estudio analítico de funciones.
Introduce, por lo menos en forma implícita, algunas ideas como ser: la medida de variables físicas por medio de segmentos, algún tipo de relación funcional entre variables, aproximación a la introducción de coordenadas por medio de representación gráfica de relaciones funcionales, constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo, especie de integración o sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el gráfico de la función velocidad-tiempo.

Los filósofos y matemáticos del siglo XIV se mostraron interesados también por las series infinitas, que junto con las especulaciones acerca del infinito y el continuo y el desarrollo de una matemática infinitesimal hace que se supere el "horror al infinito" de los griegos. Esto crea un marco propicio para adentrarnos en la etapa que nos ocupa.

Durante los siglos XVI y XVII la mayor parte de los razonamientos matemáticos estaban impregnados de consideraciones empíricas (lejos del rigor de los griegos) que fueron esenciales para el desarrollo de los métodos infinitesimales.

En 1591 **Vieta** (1540-1603) publica su *In Arten Analyticem Isagoge* en donde intenta recuperar el Análisis Geométrico de los antiguos por medio del álgebra simbólica que surgía como una poderosa herramienta tanto para la investigación como para la resolución de problemas. Transita así hacia un análisis algebraico, lo que influirá en forma determinante en los trabajos de Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1655). Estos trabajos contienen los fundamentos de lo que hoy llamamos Geometría Analítica que establecen un nexo entre el álgebra y la geometría. Esto provoca un desplazamiento del foco de atención hacia las componentes analíticas de las curvas en detrimento de las geométricas.
Aumenta así el número de curvas que eran consideradas como interés de estudio en comparación con las analizadas por los griegos.
Otra consecuencia de la invención de la Geometría Analítica es la aparición de la componente cuantitativa, necesaria a la hora de resolver problemas físicos, que no aparecía en la geometría de los griegos. Estos últimos expresaban los resultados por medio de figuras y ahora se precisaban resultados numéricos.

Entre los problemas que interesaban a los "matemáticos" de esa época, fundamentales para el desarrollo del cálculo, encontramos problemas de máximos y mínimos, problemas de tangentes y problemas de cuadraturas, entre otros. Estos últimos son los que interesan al presente trabajo aunque, como veremos, están estrechamente vinculados.
Los problemas de cuadraturas consistían en el cálculo de áreas, aunque incluían también cálculos de longitudes y volúmenes, interesando aquí que los resultados se expresaran en forma numérica y no por medio de figuras, longitudes o volúmenes equivalentes como era la usanza de la matemática griega.

Durante el siglo XVII el estudio de las cuadraturas se vio dirigido principalmente al cálculo de $\int x^k$ mediante métodos aritmético–infinitesimales e indivisibles, en un intento por sortear el problema de la rigurosidad del método de exhaución.

Buonaventura Cavalieri (1598-1647) se ocupa del tema de cálculo de áreas y volúmenes con razonamientos similares a los de Arquímedes, basándose en el concepto de los *"indivisibles"* que aparece por primera vez en su libro *Geometría Indivisibilibus* (1635).
La idea de "indivisibles" en una figura plana, hace referencia a cualquier cuerda de ella. Así, una figura plana estaría formada por una infinidad de cuerdas paralelas. En la definición II.1 introduce los conceptos que denominó "*omnes lineae*" y "*regula*":

"Dada una figura plana, se consideran dos planos perpendiculares al plano de la figura entre los que ésta esté exactamente contenida. Si uno de los dos planos se mueve paralelamente hacia otro hasta coincidir con él, entonces las líneas que durante el movimiento forma la intersección entre el plano móvil y la figura dada, consideradas en conjunto, se llaman *omnes lineae [todas las líneas]* de la figura, tomada una de ellas como *regula [dirección]".* (Citado en González, 1992).

También postula que: "La razón entre dos figuras es igual a la razón entre sus colecciones de líneas, tomadas con respecto de la misma regula". (Citado en Durán, 1996). Esto es, que si hallaba una relación entre las líneas que formaban dos figuras, esta relación también era válida para las áreas de las mismas. En suma, el área de una figura era la suma de todas sus líneas. A esta suma la denominó *omn.*

Como vemos usaba un razonamiento similar al utilizado por Arquímedes en *El Método*, aunque como sabemos Cavalieri no podía conocerlo porque aún no se había hallado.
A efectos de resolver el problema que lo ocupaba –el cálculo de áreas y volúmenes- Cavalieri debió definir las *potencias de todas las líneas* y haciendo uso del significado geométrico de estos conceptos aplicados a una figura triangular, calculó la integral de las potencias x^k para $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 9.
Estas consideraciones, aplicadas al caso de $k = 2$, se pueden encontrar en el Anexo I, en dónde obtiene que el área debajo de la parábola de ecuación $y = x^2$ entre 0 y a es igual al volumen de la pirámide de base cuadrada de lado a y altura a.

En este caso particular, Cavalieri advierte que a pesar de tratarse de dos problemas diferentes desde el punto de vista geométrico -área bajo la parábola y volumen de la pirámide-, ambos corresponden a una misma cuadratura. Inicia así cierta clasificación de los problemas según la cuadratura subyacente.
Como se dijo antes, llega -con razonamientos análogos- a las cuadraturas de algunas potencias de la forma x^k iniciando un proceso de generalización.
Estos dos últimos puntos son un avance con respecto al trabajo de Arquímedes.

Luego de la publicación de los trabajos de Cavalieri muchos matemáticos de la época se abocan a la tarea de generalizar los resultados y se dan algunas pruebas más o menos rigurosas. Algunas de estas están basadas en fórmulas para la suma de los primeros naturales y las primeras potencias de enteros, cosa en la que había trabajado Arquímedes. Esto último serviría para sustituir los argumentos intuitivos de los indivisibles.

Pierre de Fermat (1601-1665) y **Blaise Pascal** (1623-1662) enfocan su trabajo hacia la búsqueda de fórmulas para la suma de las potencias de los primeros enteros para justificar que:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$ y que $1^k + \ldots + (n-1)^k < \dfrac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + \ldots + n^k$ utilizando para esto algunos resultados de la teoría de números (incipiente en esos momentos) y dando pruebas por inducción completa.

Veamos el razonamiento de Pascal para obtener la cuadratura de las potencias x^k, que es una forma de abreviar el método de exhaución.

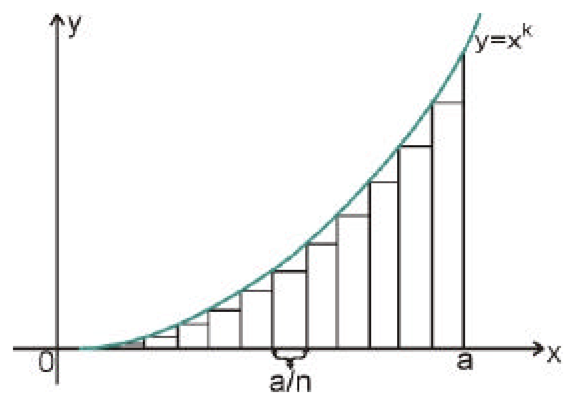
Él llega a que: $\sum\limits_{i=1}^{n} i^k = \dfrac{n^{k+1}}{k+1} + \dfrac{n^k}{2} +$ potencias inferiores de n, considerando a estas últimas despreciables con respecto al término $\dfrac{n^{k+1}}{k+1}$.

Si se divide al intervalo [0,a] en subintervalos de amplitud a/n y se toman los rectángulos inscriptos de base a/n y altura la ordenada correspondiente (ver figura), el área bajo la curva será:

$$\frac{a}{n}\left[\left(\frac{a}{n}\right)^k + \left(\frac{2a}{n}\right)^k + \ldots + \left(\frac{na}{n}\right)^k\right] =$$

$$= \left(\frac{a}{n}\right)^{k+1}\left(1^k + 2^k + \ldots + n^k\right) =$$

$$= \left(\frac{a}{n}\right)^{k+1}\sum_{1}^{n} i^k \approx \left(\frac{a}{n}\right)^{k+1} . \frac{n^{k+1}}{k+1} = \frac{a^{k+1}}{k+1}$$



Este último es el resultado de la cuadratura básica: $\int_0^a x^k = \dfrac{a^{k+1}}{k+1}$.

Fermat trabaja además de las cuadraturas de las parábolas, las de las hipérbolas generalizadas. No nos extenderemos aquí en mostrar la forma de trabajo de éste último ya que las hipérbolas consideradas por él excluyen específicamente a la que tratamos en esta investigación, o sea la denominada hipérbola de Apolonio. Simplemente diremos que en su trabajo aparecen tres aspectos esenciales de la integral definida como ser: la división del área bajo la curva en elementos de áreas infinitamente pequeñas, la aproximación a la determinación numérica de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales cuya altura queda determinada por la expresión analítica y el intento por expresar el equivalente de lo que será el límite de esa suma cuando el número de elementos crece indefinidamente.

Grégoire de Saint-Vicent (1584-1667) desarrolla en su obra *Opus geometricum* (1647) estudios sobre la cuadratura de la hipérbola en donde se vislumbra el carácter logarítmico de las áreas hiperbólicas.
Es su discípulo **Alfonso Antonio de Sarasa** (1618-1667) quien, analizando los razonamientos de Saint-Vicent, reconoce que la cuadratura de la hipérbola está estrechamente vinculada con la propiedad del producto de los logaritmos, observando entonces que las áreas hiperbólicas pueden hacer el papel de los logaritmos.

Un desarrollo de sus razonamientos figuran en el Anexo I.

Isaac Barrow (1630-1677) es el primero en establecer una relación entre los problemas de tangentes y las cuadraturas con un razonamiento de carácter geométrico en detrimento de lo analítico y lo algebraico, impidiendo un desarrollo algorítmico de sus descubrimientos.

Veamos cómo llega a establecer la relación inversa entre los problemas de cuadraturas y tangentes.

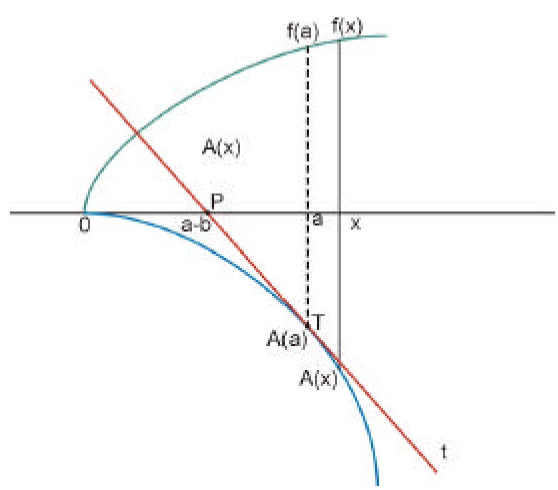
Considera una función f creciente y llama A(x) al área encerrada por la gráfica de f entre los puntos 0 y x. También considera la curva que define el valor de A(x) al variar x.

Dado <u>a</u> entre 0 y x define el número $b = \dfrac{A(a)}{f(a)} \rightarrow f(a) = \dfrac{A(a)}{b}$

Demuestra entonces que la recta (t), determinada por los puntos T y P de coordenadas (a, A(a)) y (a-b, 0) respectivamente, es la recta tangente a la gráfica de la función A en el punto T[10].

Como conocemos las coordenadas de dos puntos de la recta (t) podemos afirmar que su pendiente es $\dfrac{A(a)}{b} = f(a)$.

Con esto queda probado que la recta tangente a la gráfica de la función A, que representa el área encerrada por la gráfica de la función f, en el punto de coordenadas (a, A(a)) tiene pendiente f(a), es decir que el cálculo de tangentes y de cuadraturas es inverso.



Él sólo asegura y prueba que la recta es tangente a la curva en el sentido clásico griego de recta que toca a la curva en un único punto. Al apegarse al lenguaje

[10] La demostración a la que hacemos referencia se puede encontrar en *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo* de Antonio Durán, 1996.

geométrico y no sustituir el objeto geométrico tangente por el analítico derivada impide que se haga posible la generalización y algoritmación que encerraba su teorema.

El período que estamos analizando contó con una gran cantidad de resultados particulares motivados por problemas físicos: cálculo de máximos y mínimos, trazado de tangentes y resolución de cuadraturas, pero no se puede hablar aún de la existencia del cálculo como un conjunto unificado de conceptos y resultados, aplicables con generalidad para resolver determinados problemas. En estos casos particulares no se vislumbraba una teoría general que permitiera resolver todos estos problemas.

Es recién con los trabajos de **Isaac Newton** (1642-1727) y de **Gottfried W. Leibniz** (1645-1716) que se puede decir que se llega a la fundación del cálculo. Sus aportes fundamentales fueron básicamente dos: un método general para el cálculo de la variación de una variable con respecto al tiempo (Newton) y la diferencial de una variable (Leibniz) y el reconocimiento explícito de que los problemas de cuadraturas y los problemas de tangentes son recíprocos, lo que hoy llamamos Teorema Fundamental del Cálculo.
Frente al contenido geométrico y parcial en que Barrow presentó este resultado, Newton y Leibniz le dieron más generalidad en su aplicación, una presentación más analítica y la importancia que dicho resultado tiene dentro del cálculo.

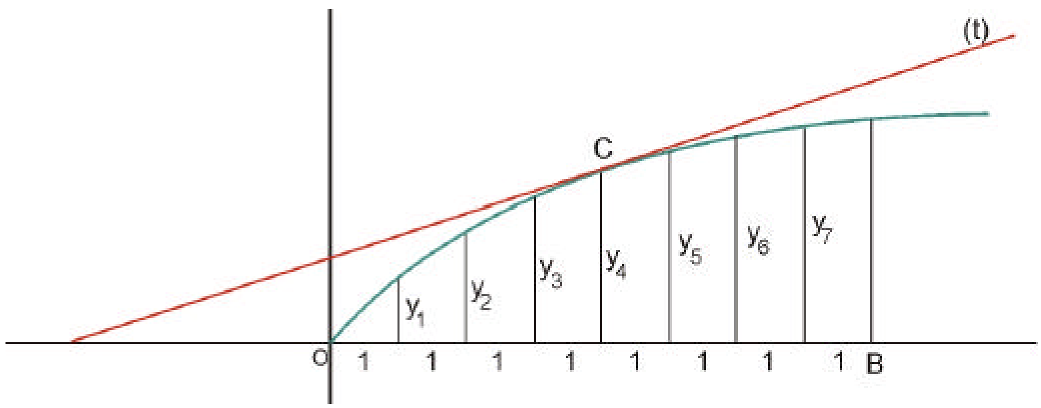
Newton desarrolló su *cálculo de fluxiones* en donde se pueden distinguir temas como: desarrollos en serie, tratamiento algorítmico, relación inversa entre la diferenciación y la integración, concepción de las variables como expresión de un movimiento en el tiempo y teoría de las razones primeras y últimas. (Grattan-Guinness, 1984).
Manejó términos como *fluentes* y *fluxiones*. Llamó fluentes a las cantidades que varían con respecto al tiempo y fluxiones a la velocidad de cambio de éstas con respecto al tiempo. Mediante el uso de algoritmos y otros artificios, como sustituir en una ecuación dada incrementos pequeños para las respectivas variables los que luego podía despreciar por ser muy pequeños, consiguió resolver los dos problemas del cálculo infinitesimal que consideraba fundamentales: 1) dadas las fluentes y sus relaciones, hallar las fluxiones correspondientes y su recíproco, 2) dada la relación entre las fluxiones, hallar la relación entre las fluentes.

En los trabajos de Leibniz que tratan sobre la búsqueda de métodos para determinar la cuadratura de curvas se pueden distinguir tres ideas principales:

- creación de un lenguaje simbólico general para expresar con símbolos y fórmulas los procesos de argumentación y de razonamiento. Por ejemplo introduce los símbolos de "$\int$ " y "*d* " para sumas y diferencias respectivamente.

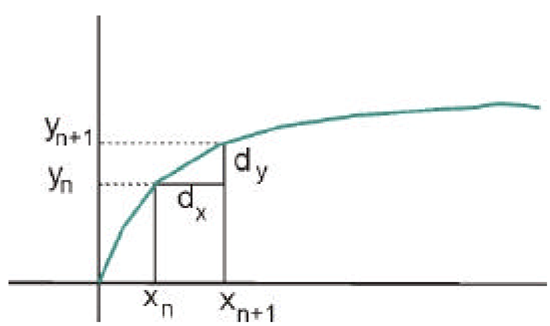
- Las sucesiones de diferencias. Al estudiar sucesiones numéricas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y las de sus diferencias primeras $b_1 = a_1 - a_2$, $b_2 = a_2 - a_3 \ldots$, se da cuenta de que éstas últimas se podían sumar fácilmente ya que se cumple que $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = a_1 - a_{n+1}$. Formar sucesiones de sumas y diferencias eran operaciones inversas. Al aplicarlo a la geometría esta idea adquiere su real significado. Dada una curva (ver figura) Leibniz define una sucesión de ordenadas *y*, equidistantes entre sí. Si su distancia es 1 entonces la suma de dichas ordenadas es una aproximación de la cuadratura de la curva OBC, y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas es aproximadamente la pendiente de la tangente. Cuanto más pequeña sea la unidad 1 mejor será la aproximación. Deduce entonces que si se pudiera tomar una unidad infinitamente pequeña estas aproximaciones se harían exactas. (Grattan-Guinness, 1984). En estas condiciones la suma de ordenadas sería igual a la cuadratura y la diferencia sería la pendiente. En una carta a Wallis explica su descubrimiento: "La primera idea la tuve cuando, considerando las diferencias y las sumas de las series de los números, advertí que las diferencias correspondían a las tangentes y las sumas a las cuadraturas." (Durán, 1996).

De la reciprocidad de las sumas y diferencias deduce que la determinación de tangentes y cuadraturas son también operaciones inversas.



- Usa el "triángulo característico". Leibniz consideraba a la curva formada por trozos de segmentos indivisibles de longitud infinitesimal de forma tal que al prolongar estos segmentos se obtienen las tangentes a la curva.

Con esta concepción de curva tenemos asociada a ella diversas sucesiones de números: la sucesión de las abscisas, la de las ordenadas, la de las longitudes de los segmentos, etc. Como ya dijimos el cálculo diferencial de Leibniz deriva de las diferencias de las sucesiones y el integral de las sumas. Una vez definidas las diferenciales e integrales con el triángulo característico se establecen las relaciones de éstas con la tangente a la curva. Al tomar las diferencias de x e y como los catetos de este triángulo, el cociente de éstas será la pendiente de la recta tangente.



Ambos matemáticos llegaron, en forma independiente, a lo que se podría llamar la creación del cálculo infinitesimal, pero fue el trabajo de Leibniz el que tuvo mayor difusión y el que se siguió aplicando y desarrollando y no el de Newton. Esto se debió a una diversidad de razones, en las que no nos detendremos en este trabajo.

I.2.3. Tercera Escala: Siglos XIX y XX

En esta etapa es que se produce la definitiva fundamentación rigurosa de los conceptos de derivada e integral. Esta tarea la inician Cauchy (1789–1857) y Bolzano (1781–1848) y la culmina Weierstrass (1815–1897) llegando a la definición que hoy enseñamos a nuestros alumnos. Para poder hacerlo es que comienzan por definir en forma rigurosa el concepto de límite en el que se basarán las definiciones de derivada e integral.

Ya existían intentos previos de aproximarse a la definición de límite, pero fueron bastante imprecisos. Entre estos se encuentran las aproximaciones de Newton y D'Alembert.
Newton sospechaba que detrás del concepto de derivada se encontraba uno más primitivo: el de límite. En su obra *Philosofhiae naturalis principia matemática* aparece el siguiente lema: "las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que por ninguna diferencia dada, acaban siendo en última instancia iguales." (Citado en Durán, 1996).
D'Alembert a mediados del siglo XVIII, en un artículo titulado "Límite" dice: "A una cantidad se la llama límite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada, sin llegar nunca a coincidir con ella." (Citado en Durán, 1996).

Bolzano y Cauchy retoman la definición de D'Alembert y la aritmetizan. Es así que en 1821 Cauchy define: "Cuando los sucesivos valores atribuidos a una variable aproximan indefinidamente a un valor fijo tanto que al final difieren de él tanto como uno desea, esta última cantidad es denominada el límite de todas las otras."
Esta tarea de aritmetización la finaliza Weierstrass eliminando de la definición de Cauchy algunas imprecisiones como ser "aproximan indefinidamente" y "difieren tanto como uno desea" llevando la definición a la forma que hoy conocemos.

En el primer cuarto del siglo XIX se llega a una fundamentación lógica del concepto de derivada basada en la definición de límite.

En cuanto al concepto de integral se tardó un poco más en darle la forma que hoy conocemos. El cálculo integral se definía como la operación inversa de la diferenciación, pero se empezó a ver la necesidad de definirlo en forma independiente basándose en la noción de área, entre otras cosas a raíz del descubrimiento de Fourier de la fórmula para expresar los coeficientes de la serie trigonométrica asociada a una función en función de ella, que venían dados por integrales definidas. Era más sencillo intentar calcular directamente el número $\int_a^b f(x).dx$ que buscar una función F tal que F'(x) = f(x), $\forall\ x \in [a,b]$ para luego definir $\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$.

Uno de los primeros en trabajar en este sentido fue el propio Cauchy que considera a la integral como el límite de la suma de rectángulos. Desarrolló estas ideas solamente para funciones continuas.

Nuevamente debido a la ampliación en la definición de función y a la necesidad de integrar funciones para determinar los coeficientes de Fourier, hubo que extender la definición de Cauchy para dar cabida a funciones que no necesariamente fueran continuas. Ya que no todas las funciones iban a ser integrables se comienza a trabajar en la determinación de criterios para saber qué tipo de funciones admitirían una integral en la ampliación de la definición de Cauchy. En este sentido es Riemann quien amplía la definición de integral estableciendo criterios de integrabilidad para funciones no necesariamente continuas. Es lo que hoy conocemos como Integral de Riemann.

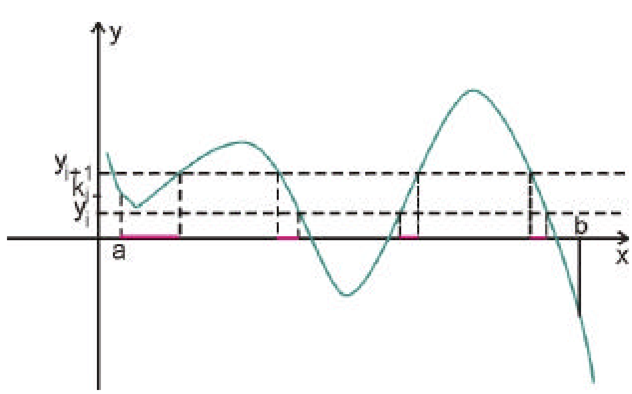
Aparecen también las definiciones de sumas superiores e inferiores y Volterra define la integral superior $\left(\overline{\int_a^b} f(x)dx\right)$ y la integral inferior $\left(\underline{\int_a^b} f(x)dx\right)$ de funciones acotadas como el ínfimo y el supremo, respectivamente, de las sumas superiores y de las sumas inferiores. Usando estas definiciones, la condición de integrabilidad de Riemann quedaría expresada: $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$.

Dentro del contexto que enmarcaba las discusiones acerca de los fundamentos del cálculo integral caracterizado por un enfoque crítico del análisis, se presentan ejemplos de funciones que mostraban que la definición de integrabilidad de Riemann no era tan general. A pesar de que esta definición desde el punto de vista lógico era muy natural, en la práctica no fue tan útil.

La problemática se planteaba en el sentido de que si dividimos el intervalo (a,b) en subintervalos cada vez más pequeños de la forma (x_i,x_{i+1}) la diferencia entre las ordenadas se hará cada vez menor si f(x) es continua y que los sucesivos refinamientos de la partición harán que dicha diferencia tienda a cero si hay sólo unos cuantos puntos de discontinuidad. Pero esto no nos permite afirmar que lo mismo suceda con una función discontinua en todas partes. Es decir que el considerar valores de x cada vez más cercanos no garantiza que la diferencia entre las imágenes correspondientes se hagan cada vez más pequeñas.

El planteamiento que hace Lebesgue (1875–1941) es que si buscamos valores aproximadamente iguales de las imágenes, entonces no debemos realizar particiones del intervalo (a,b) sino del intervalo de ordenadas acotado por los extremos inferior y superior de la función en (a,b).
Con este propósito considera valores y_i cuya diferencia sea menor que un cierto ε:

$$y_i \le f(x) \le y_{i+1} \quad \text{con} \quad y_{i+1} - y_i < \varepsilon$$



Queda determinado así un conjunto de preimágenes. En nuestra figura este conjunto, al que llamaremos A_i, es la unión de cuatro intervalos. En otras funciones puede estar formado por infinidad de intervalos o ser un conjunto complicado de definir.

Lebesgue plantea que una función f es integrable si es medible, utilizando la palabra medida "como una extensión de los conceptos clásicos de longitud, área y volumen a conjuntos más generales (más «extraños») que los asociados hasta entonces a las curvas y superficies usuales." (Boyer, 1986) En nuestro ejemplo la medida de A_i será la suma de las medidas de los cuatro intervalos que forman el conjunto.

Con esta nueva definición no se necesita considerar la forma, sencilla o no, del dominio de integración, ya que el conjunto A_i de la definición se forma tomando valores de la función f sólo para puntos de su dominio. Como la elección del dominio de integración interviene sólo en la formación de A_i se podría también formar el conjunto A_i usando los valores de f en puntos de un conjunto arbitrario E, lo que implica que se puede definir la integral sobre cualquier conjunto.

Tenemos así la definición de la integral sobre un conjunto medible de una función medible y acotada en el conjunto. Hasta ahora, se ha supuesto implícitamente que las funciones son acotadas. Queremos aclarar que, en determinadas condiciones, se puede ampliar la definición para funciones no acotadas, pero esto escapa a los intereses de este trabajo.

Queremos destacar que hemos hecho hincapié en la noción de integral que corresponde a funciones continuas y acotadas ya que son el tipo de funciones con las que trabajamos en esta investigación.

I.3. COMPONENTE COGNITIVA

Esta componente está ligada a las características cognitivas de la población a la que está dirigida la enseñanza; considera los procesos del pensamiento del individuo en los que nos basaremos para dar las explicaciones de las funciones mentales. Esto implica que no sólo se debe conocer el tema matemáticamente, sino que también es importante saber en cada paso qué procesos mentales están involucrados, qué conceptos previos se deben tener, qué habilidades se pueden adquirir y se deben adquirir para lograr construir un concepto en forma significativa.
Comprender matemáticas va más allá de la habilidad en realizar cálculos; es necesario ser conscientes de cómo funcionan los procedimientos, poder organizar las experiencias, reflexionar en torno a lo hecho.

Cordero (2001) señala que el estudio del funcionamiento cognitivo se vio ampliado de acuerdo a las siguientes fases:
Una primera aproximación fue dada por los procesos intelectuales del individuo, resultado de investigaciones basadas en la teoría de Piaget.
Más adelante, hay un cambio de enfoque en el que se explica la cognición en el contexto de las dimensiones interpersonales, considerando al aprendizaje como un proceso que toma lugar en un marco de participación y no sólo en la mente del individuo. Este nuevo enfoque está influenciado por los trabajos de Vigotsky.

Recientemente se ha entrado en la fase en donde la teorías marcan un enlace entre las restricciones contextuales y la adquisición del conocimiento, llamado acción situada o cognición situada. Esta perspectiva adopta una "visión situada de los significados por medio de relaciones", en que el significado se percibe como inseparable de la interpretación y el conocimiento se enlaza a la relación de que es producto. Un principio fundamental de la cognición situada es el constructivismo social, que toma en cuenta las dimensiones histórica, cultural y social de las interacciones humanas. Se entiende al aprendizaje como un proceso del diálogo y de la socialización.

La dimensión cognitiva nos explica cómo son representadas las nociones por el estudiante en cuanto a los significados y significantes, cómo se dan las relaciones entre los diferentes registros de representación y cuáles son los procedimientos que derivan de éstos.

Basaremos nuestro análisis del comportamiento cognitivo desde las siguientes perspectivas:

- El concepto de visualización que presentan Zazkis, Dubinsky y Dauterman (1996) y Zimmermann y Cunningham (1991), que permite el análisis de las capacidades de los estudiantes de poder formarse imágenes mentales de los conceptos a trabajar y de poder usarlas para resolver las actividades propuestas.

- Las consideraciones que realiza Vinner (1991) de algunos problemas de aprendizaje basándose en un modelo de la estructura cognitiva del sujeto en términos de imagen del concepto-definición del concepto, refiriéndose a la conducta que muestran los estudiantes al enfrentarse a una actividad o prueba.

En base a este modelo explica las respuestas de los estudiantes recurriendo a la noción de imagen conceptual. La imagen conceptual es "algo" no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Esto puede ser una representación visual del concepto, en caso de que la tenga; también puede ser una colección de impresiones o experiencias asociadas al concepto.

Cuando las personas se desenvuelven en los ambientes cotidianos no aplican las definiciones para poder comunicarse y entender el mundo que las rodea. Si alguien nos dice "Qué bonito cielo azul" entendemos perfectamente esta oración y nuestro cerebro no consulta ninguna de las definiciones de las palabras involucradas en esa oración, tampoco sería posible encontrar una definición que nos describiera perfectamente lo que significa "azul". ¿Qué es entonces lo que consulta nuestro cerebro para poder comprender? Consulta las imágenes conceptuales asociadas a determinadas ideas o conceptos.

Los hábitos de pensamiento de los ambientes cotidianos son trasladados a los ambientes técnicos. Si la persona no está especialmente entrenada a funcionar en el modo técnico para lo cual es imprescindible consultar las definiciones, funcionará consultando las imágenes conceptuales, que pueden contener aspectos inconsistentes y que no necesariamente reflejan todos los aspectos del concepto.

Si bien ambos aspectos serán tenidos en cuenta a la hora del análisis de los procesos de pensamiento de los estudiantes, consideramos de fundamental importancia el concepto de visualización, el cual tendrá un papel preponderante. Es por esto que lo desarrollaremos a continuación.

I.3.1. Visualización

En general al trabajar los temas de cálculo y pre–cálculo en el aula en los cursos de enseñanza media, se hace hincapié en el tratamiento algebraico llevando al estudiante a que tenga un manejo aceptable de las técnicas para manipular expresiones algebraicas, en la resolución de ecuaciones, el cálculo de límites, derivadas, primitivas, etc. Esto se puede deber a varios motivos como ser: es más sencillo de transmitir, es más aceptado por los estudiantes porque es la forma en que están acostumbrados a trabajar, es considerado como imprescindible para la evaluación final, etc.
Este puede ser uno de los factores que lleven a que los estudiantes terminen asociando "hacer matemática" con la resolución de ecuaciones, la manipulación de fórmulas, expresiones algebraicas, etc.

Pero, ¿qué sucede cuando la herramienta algebraica es inaccesible como en el caso que nos ocupa? Los estudiantes que fueron entrevistados para la presente investigación no conocen ni manejan la herramienta algebraica que les permitiría poder resolver los problemas que se les plantean por lo que para poder acceder al problema tendrán que transitar diferentes caminos que comprenden la interpretación de un gráfico y la utilización de figuras geométricas. Podrán utilizar el cálculo de imágenes en una función para determinar las dimensiones de las diferentes figuras geométricas que reconozcan y obtener el área de las mismas. Entendemos que la visualización jugará un importante rol para poder llegar o aproximarse a una solución del problema.

Existen además otros métodos empíricos que les permitirían aproximarse a la solución de los problemas a los que hacemos referencia en el Anexo IV.

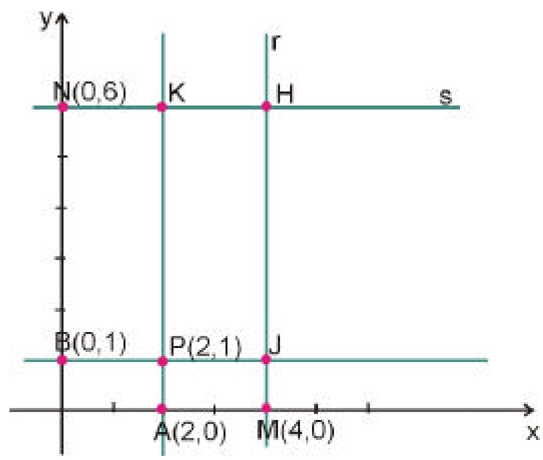
¿Por qué visualización en educación matemática?

Una explicación simple de por qué visualización podría estar basada en el conocido dicho popular: "Vale más una imagen que mil palabras".
La imagen sería utilizada para clarificar las ideas. En la mayoría de los casos, una imagen es capaz de transmitir información, para el que sabe decodificarla, mientras que si se diera mediante una descripción escrita o verbal resultaría incompleta o más complicada de decodificar.

Un ejemplo claro lo podemos ver al trabajar la siguiente actividad con o sin imagen:

Se consideran los puntos A(2,0), B(0,1), M(4,0), N(0,6) y P(2,1).
Sea r // eje y por M y s // eje x por N. $PB \cap r = \{J\}$, $PA \cap s = \{K\}$, $r \cap s = \{H\}$.
¿Cuál es la naturaleza del cuadrilátero PJHK?

En esta actividad, si no se realiza un gráfico, resolverla se transforma en una tarea engorrosa ya que se deberían ir determinando las ecuaciones de las rectas involucradas, determinar sus intersecciones para hallar los vértices del cuadrilátero, calcular distancias, etc.
En cambio, si se realiza la representación gráfica queda en evidencia la naturaleza del cuadrilátero PJHK lo cual facilita la resolución del problema quedando sólo la tarea de justificación.



La palabra visualización implica algo más que utilizar los sentidos, hay comprensión involucrada. "No es accidental que cuando pensamos que entendimos algo decimos "Oh, I see!" "(Tall, 1991).

Por visualización Zazkis, Dubinsky y Dauterman (1996) entienden que: "Es un acto en el cual el individuo establece una fuerte conexión entre un constructo interno y algo a lo cual se tiene acceso a través de los sentidos. Un acto de visualización puede consistir en cualquier construcción mental de objetos o procesos a los cuales un individuo los asocia con objetos o eventos percibidos por él como algo externo. Alternativamente, un acto de visualización puede consistir en la construcción, en algún medio externo como papel, pizarrón o pantalla de computadora, de objetos o eventos que el individuo identifica con objetos o procesos en su mente."

Pero, ¿de qué estamos hablando cuando hablamos de visualización matemática?
Zimmermann y Cunningham (1991) señalan la diferencia entre visualización y visualización matemática.
El término visualización usado en el lenguaje cotidiano y en sicología se relaciona con la formación y manipulación de imágenes mentales, cosa que difiere del uso que se le debe dar en el ámbito de las matemáticas. Ellos afirman que: "La visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentales, o con lápiz y papel, o con la ayuda de la tecnología) y usar dichas imágenes efectivamente para el descubrimiento y el entendimiento matemático."
Entonces, lo que interesa es la habilidad de los estudiantes de generar una imagen apropiada para representar un concepto o problema matemático y usar esa imagen para alcanzar el entendimiento.
Es decir que visualización matemática no es una visión inmediata de las relaciones que se presentan en una imagen sino que conlleva una interpretación de lo que se nos presenta. Entran en juego una codificación y decodificación que se adquiere mediante intercambios personales y con el medio (comunidad matemática, sociedad, etc.). Se puede visualizar algo que no se ha visto o que nunca ha sido visto, por ejemplo la representación de una recta.

Rival (citado en Zimmermann y Cunningham,1991) afirma que "Los diagramas son, por supuesto, tan viejos como las matemáticas mismas." En todas las ramas de las matemáticas, no solamente en geometría, el apoyo en las imágenes ha sido de gran ayuda para nuestros procesos mentales, ya sea en la etapa de descubrimiento, en la de demostración, en las definiciones, etc.

Hay que trabajar mucho con el sistema gráfico, ya sea por medio de diagramas, de gráficas, animaciones en computación, etc. No se puede dejar de considerar los avances técnicos y tecnológicos de nuestra época; se debe ser capaz de insertarlos en el sistema educativo en base a los requerimientos pedagógicos para favorecer el logro de los fines que se propongan.

Veamos algunas citas que hacen referencia a razones cognitivas, didácticas y psicológicas de por qué incluir a la visualización en la educación matemática:

“Parecería que los procesos de pensamiento visual son de mayor nivel cognitivo que los procesos analíticos. Este orden jerárquico de estas dos destrezas nos daría razones para darle en el curriculum mayor importancia a los procesos visuales que a los analíticos. Una de las razones más importantes sería que obteniendo la destreza de pensar visualmente nos llevaría a desarrollar automáticamente la destreza de pensar analíticamente; pero aparentemente no se daría el caso opuesto”. (Dreyfus y Eisenberg,1990)

“En nuestras experiencias con profesores en servicio en la educación media y superior y con sus estudiantes hemos constatado que en caso de que logren incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, entonces manejarán a la función no sólo como objeto sino que además pueden transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico, y verbal con cierta versatilidad, en otras palabras, en caso de tener un dominio del contexto geométrico/visual tanto en la algoritmia, la intuición, así como en la argumentación será posible el tránsito entre las diversas representaciones.” (Farfán, 2000).

“Una figura puede ayudar considerablemente en todo tipo de problemas que nada tienen de geométrico. Tenemos pues, buenas razones para que consideremos el papel que juegan las figuras en la solución de los problemas.
Si el problema es de geometría, tenemos que estudiar una figura. Dicha figura podemos imaginarla o representarla sobre el papel. En ciertos casos puede ser preferible imaginar la figura sin dibujarla, pero si tenemos que examinar detalles diferentes, uno tras otro, es preferible, dibujar una figura. En efecto, si los detalles son numerosos, no se pueden imaginar todos simultáneamente, pero se encuentran todos sobre el papel. [ ] Así pues, incluso si el problema no es geométrico, usted puede tratar de dibujar una figura. Encontrar una representación geométrica clara a un problema no geométrico puede permitir un avance sensible hacia la solución.” (Polya, 1965).

“Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo.” (de Guzmán, 1996).

Las razones para incluir la visualización como parte de la actividad matemática pasan por diversas argumentaciones. Tenemos la recomendación de Polya de recurrir a un diagrama como una importante herramienta heurística para la resolución de problemas, de las expresiones de Farfán inferimos que las múltiples representaciones de un concepto y las transiciones entre los diferentes tipos de registros favorecen la conceptualización y el progreso intelectual. Podría decirse que Dreyfus y Eisenberg postulan una razón fundamental para priorizar y fomentar los procesos de pensamiento visual frente a los analíticos: los primeros son de mayor nivel cognitivo que los segundos.

La enseñanza del cálculo y la visualización

Tanto a los estudiantes como a los docentes, al trabajar en los cursos de cálculo se les presentan una variedad de dificultades asociadas a esta rama de la matemática.

Los docentes que estamos abocados a la tarea de enseñar los principios del cálculo nos vemos enfrentados al problema de la complejidad de los temas a tratar que incluyen conceptos, métodos de trabajo y formas de pensar que son propias del cálculo y representan para los alumnos una ruptura que es muy difícil de realizar.

Las dificultades que encuentran nuestros alumnos cuando se aproximan a las nociones del cálculo son de diversa índole. Artigue (1995) distingue tres grandes tipos:

- Aquellas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, sucesiones, funciones).

- Aquellas asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, centro del campo del cálculo.

- Aquellas vinculadas con las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo.

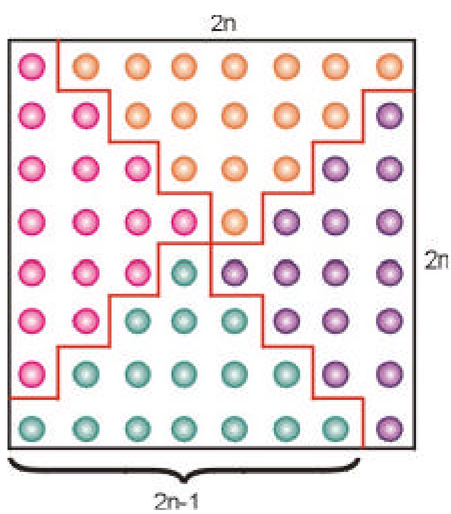
Ante estas problemáticas los docentes se refugian en un tratamiento tradicional de los temas del cálculo y año a año constatamos que hemos podido enseñar a nuestros estudiantes a realizar cálculos más o menos mecánicos de límites, derivadas, primitivas, a resolver algunos problemas "clásicos", etc., sin que se logre hacerlos entrar verdaderamente en tema con respecto a los conceptos, métodos y formas de pensamiento antes mencionados.

Con referencia a la enseñanza del cálculo Farfán (2000) dice: "Su enseñanza tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado a los argumentos visuales, entre otras causas por no considerarlos como matemáticos, o bien por la concepción que de la matemática y de su enseñanza se posea, sin considerar, por ejemplo, la estructura cognitiva de los estudiantes a los que se dirige. A ello se aúna el contrato didáctico establecido, que como parte de la negociación impide que el status del profesor sea demeritado; si éste no resuelve satisfactoriamente los problemas planteados en el curso, el recurso algorítmico permitirá subsanar decorosamente lo establecido en el contrato aligerando y eliminando dificultades intrínsecas al contenido matemático".
También constatamos que los resultados a la hora de evaluar no son satisfactorios y se termina evaluando en base a las habilidades algorítmicas y algebraicas que se han logrado desarrollar en los alumnos. Ante esta forma de evaluar, los alumnos terminan considerando que éstas habilidades son lo esencial en el cálculo.

Todo esto lleva a una degradación del papel que juega la visualización en la enseñanza de la matemática en general y del cálculo en particular, haciendo que los estudiantes prefieran el modo algorítmico frente al gráfico.

Una imagen nos puede ilustrar resultados, conceptos, métodos y estrategias de pensamientos.

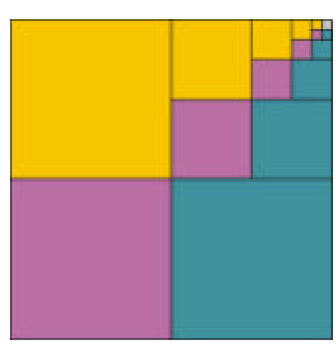
- Por ejemplo, en cuanto a los *resultados*, el siguiente diagrama, de autor anónimo (En Nelsen, 1993), estaría ilustrando una estrategia de pensamiento para mostrar que la suma de los primeros n números impares es n^2.



$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=\frac{1}{4}.(2n)^2=n^2$$

En el cuadrado de lado 2n vemos como las líneas que separan lo dividen en 4 regiones con igual cantidad de puntos, de donde la suma del número de puntos de cada región sería la cuarta parte del número total de puntos que contiene el cuadrado. Por otro lado, se puede observar que el número de puntos contenidos en cada región es la suma de los números impares 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1). De esta forma el diagrama queda estructurado de tal manera que la igualdad de las dos expresiones en la ecuación se torna clara. La prueba se transforma en una sola unidad y se hace inmediatamente comprensible.

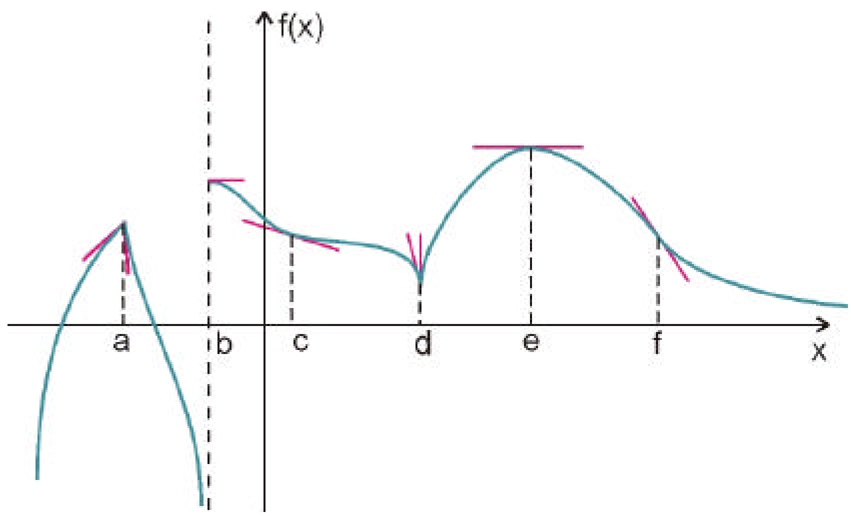
En forma similar el siguiente diagrama nos muestra que la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica de razón ¼ da 4/3 si se comienza con 1, o 1/3 si se comienza con ¼



Si pensamos que es un cuadrado de lado 1, lo pintado en cada color tiene área

¼+ 1/16 + 1/64 + …, y al ser 1 el área del cuadrado se tendría que cada una de las sumas anteriores es 1/3.
Pensando que es un cuadrado de lado 2 resulta que 1 + ¼+ 1/16 + 1/64 +…= 4/3.
Esta prueba visual nos ayudaría no sólo a mostrar, a los estudiantes que no hayan trabajado con series, la veracidad de uno de los resultados obtenidos por Arquímedes en la búsqueda del área del segmento de parábola[11] sino también que se les proporcionaría una estrategia de pensamiento matemático.

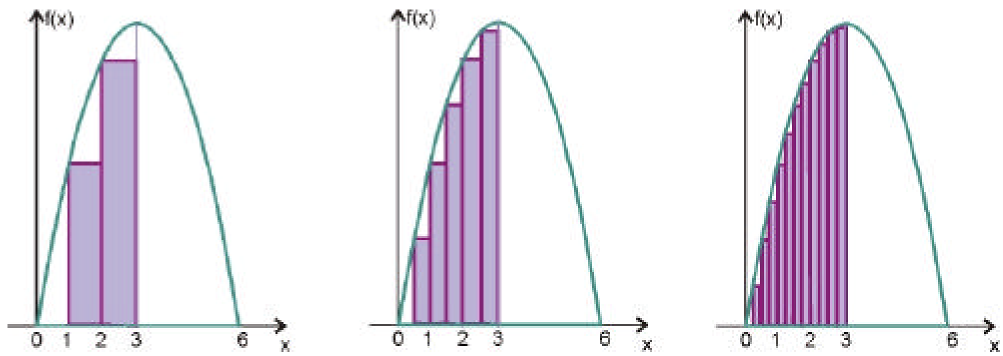
- En cuanto a los *conceptos*, por ejemplo en el caso de la derivabilidad de una función en un punto, se suele dar la definición y la interpretación geométrica de la derivada primera en un punto. Según Vinner (1991), la definición por sí sola no alcanza para que el estudiante pueda dar un significado a la misma por lo que es importante que esté acompañada de una cantidad importante de ejemplos y no ejemplos para que puedan enriquecer la imagen que los estudiantes tengan del concepto. En la siguiente figura se ilustra la no derivabilidad de la función f en x = a, x = b y x = d mientras que en c, e y f sí lo es.



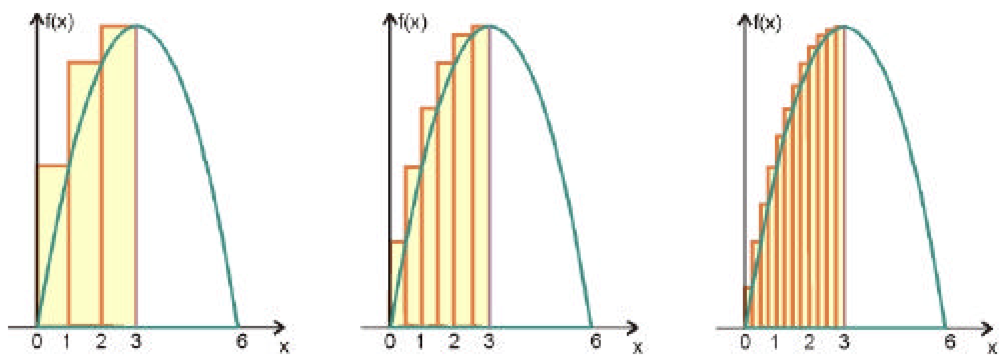
- Con referencia a los *métodos* un ejemplo, vinculado al tema que nos ocupa, puede ser el mostrar la relación del método rectangular con la primera o la segunda ordenada para funciones monótonas y la posibilidad de dar aproximaciones tan ajustadas como se quiera.

Tomemos como ejemplo una de las funciones que utilizamos en nuestro cuestionario: f: R $\rightarrow$ R / f(x) = x.(6-x). Trabajando en el intervalo [0,3] en donde la función es creciente podemos observar que si definimos una partición y tomamos como altura de los rectángulos la primer ordenada podemos obtener una aproximación por defecto del área que intentamos calcular. A medida que afinamos las particiones se puede observar claramente que los rectángulos van cubriendo cada vez más la región, lo que nos permitiría, si efectuamos los cálculos, obtener aproximaciones más ajustadas del área buscada.

[11] Ver en este capítulo en la sección de Componente epistemológica:



En forma análoga, si trabajamos con la segunda ordenada, podremos obtener aproximaciones por exceso del área buscada.



Si analizamos históricamente el surgimiento de determinado concepto, generalmente este aparece al intentar solucionar algún problema real. Y en el intento de resolución, como generalmente están involucrados elementos físicos, son necesarios los diagramas, las figuras.
Las ideas, conceptos, métodos, para los expertos, vienen acompañados de una cantidad de contenidos visuales, intuitivos, que están presentes en su mente en el manejo de teoremas, métodos, resolución de problemas, etc. Las utiliza como una forma de trasmisión rápida de las ideas.
Es decir, estas imágenes presentan toda la información junta, y al saber decodificarla, el experto no necesita de más.

Muchas veces los docentes transponen esto a una situación de clase generando un obstáculo en el estudiante que no está preparado para hacer dicha decodificación. Nuestros estudiantes están acostumbrados a recibir la información por medio de sentencias, en lenguaje natural o simbólico, y en forma secuenciada, lo que les brinda un orden para razonar y trabajar.

La presentación de la información en forma de imagen, a alumnos que aún no están preparados para decodificarla, será en una primera instancia un obstáculo para el estudiante. Es necesario entonces que el estudiante aprenda los códigos de enlaces y conexiones entre los elementos que contienen los diferentes tipos de imágenes que les pueden ser presentados. Esta puede ser otra de las razones por las cuales los alumnos prefieren la información recibida en forma secuencial y no en forma de imagen, perdiendo así la posibilidad de explotar un gráfico, un diagrama, etc.

Dreyfus y Eisenberg (1990) dan razones didácticas y cognitivas de por qué los estudiantes tienen dificultades al extraer información de figuras o diagramas.
La razón didáctica se basa en la noción de transposición didáctica de Chevallard. La transmisión didáctica del conocimiento implica la formación de un texto lineal, que estructure el conocimiento dándole por ejemplo un principio y un fin. Como consecuencia, los enlaces entre los conceptos y los procedimientos son omitidos y destruidos. Pensemos que el orden en que aparecen los temas en los currículos liceales no es necesariamente el mismo que se fue dando históricamente. Agreguemos a esto la linearización que realizan los matemáticos cuando formalizan sus ideas para ser presentadas a la comunidad matemática, ocultando sus intrincados razonamientos y los saltos que dieron sus ideas.

La razón cognitiva dada por Dreyfus y Eisenberg para explicar el rechazo de los estudiantes a los diagramas se basa en la dificultad de extraer información. La información dada por un diagrama o figura no es secuencial, no sabríamos en un principio a donde dirigir la mirada.
La información está además dada en forma implícita y agrupada, por tanto si el alumno no ha aprendido a leer diagramas, a relacionar sus partes, de nada le servirán: "...Los diagramas solamente serían útiles para aquellos que conocen estas interpretaciones y convenciones y podrían desarrollar procesos de pensamiento que exploten estas ventajas de los diagramas. En suma, a pesar de las múltiples ventajas de los diagramas en la resolución de problemas matemáticos y físicos, estos son completamente inútiles para los neófitos". (Dreyfus y Eisenberg, 1990).

Según estos autores las matemáticas que estudian nuestros alumnos están presentadas secuencialmente y no diagramáticamente. Las matemáticas escolares han sido linealizadas y secuencializadas para ser presentadas a los alumnos. Es natural entonces que los alumnos prefieran un texto lineal a un diagrama. No se les ha enseñado a leer diagramas, se les ha enseñado a interpretar textos escritos ya sea en lenguaje coloquial o formal.

Debemos entonces tomar conciencia de que nuestros alumnos, no aprenderán como por arte de magia a recurrir e interpretar un diagrama; es responsabilidad de los docentes hacerse cargo de la formación de sus estudiantes en este sentido.
Pero, ¿qué habilidades y destrezas vinculadas a la visualización deben adquirir nuestros estudiantes en los cursos de cálculo?

Algunas de estas habilidades y destrezas son señaladas por Zimmermann (1991), como ser:

- *Entender los lenguajes analíticos y gráficos como diferentes alternativas para la expresión de ideas matemáticas.*

Los estudiantes parecen considerar los aspectos visuales de un concepto como algo periférico al propio concepto. Por ejemplo, en el caso de las funciones, aunque ellos mismos estén capacitados para graficar determinada función, no utilizan esa información a la hora de resolver un problema que la involucra. Deben entonces poder realizar el pasaje del lenguaje analítico al gráfico y viceversa. "... previo al estudio del cálculo se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos, a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el

álgebra básica y el estudio de curvas, mejor aún, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico.” (Farfán, 2000)
También deben conocer qué nos oculta y qué nos muestra cada sistema de representación, cuál es más conveniente en cada situación, cuál es el más económico y para esto es imprescindible que conozcan y tengan un manejo fluido de los distintos registros.

- *Entender las reglas y convenciones asociadas con las representaciones gráficas.*

Las representaciones gráficas traen consigo información que puede ser o no relevante en la resolución de determinado problema, y el estudiante debe detectar qué información es relevante para el problema en el que trabaja y cuál no lo es.

- *Entender la estimación y la aproximación en contextos geométricos.*

En el cálculo gran parte de los conceptos están vinculados con la sucesión de aproximaciones (límites, derivadas, integrales) por lo que en primer lugar se debe aceptar la noción de aproximación e integrarla al trabajo. Para ello se deberá recurrir a las representaciones gráficas que muestren estas situaciones.

- *Disponer de un repertorio importante de imágenes visuales.*

El matemático tiene asociado a cada concepto, teorema, problema una serie de representaciones visuales que le permiten trabajar con ellos y sobre todo usarlos al enfrentarse con éxito a nuevos problemas y situaciones. El estudiante debe entonces tener la posibilidad de construir un universo amplio de imágenes a partir de las cuales poder seguir desarrollando su pensamiento dentro del área de la matemática en la que está trabajando. En el área del cálculo no alcanza con conocer y manipular las gráficas de las funciones lineales y cuadráticas sino que debe adquirir habilidades en el manejo de otro tipo de funciones (logarítmicas, exponenciales, transformaciones que con ellas se puedan hacer en forma gráfica, etc.). Con ello tendrán una base más sólida donde asentar otros conceptos de Cálculo y herramientas que le permitirán una mejor comprensión y por ende, apropiación de conocimientos en niveles más abstractos.

Uso de software en la enseñanza de la matemática

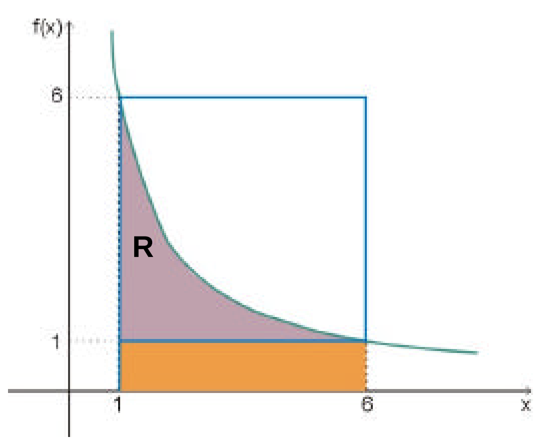
Uno de los temas, entre muchos otros que han surgido en las últimas décadas con respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se refiere a la revalorización de la visualización en el quehacer matemático. Existe una cierta tendencia hacia la renovación del papel que juega la visualización en la enseñanza.
de Guzmán (1996) señala que: “Una buena parte de la responsabilidad de estas tendencias recientes hay que situarla en las facilidades ofrecidas para la visualización de cierto tipo por el ordenador y los modernos sistemas de cálculo simbólico”.

La incorporación de la tecnología en la enseñanza implica además de la preparación de los docentes, el rediseño de los currículos, de la metodología a emplear, del tipo de problemas a resolver, de actividades a realizar, lo que llevaría a cambios profundos en el discurso matemático escolar y en la didáctica de la matemática.

Los medios tecnológicos son solo una parte de lo que debemos considerar en la reconstrucción del discurso matemático escolar, debemos preguntarnos lo que hay que elegir en cada tema como eje principal, también las dificultades que aparecen cuando se intenta reconstruir la obra matemática a partir de este eje que estamos eligiendo. Nos damos cuenta entonces que no se trata únicamente de secuenciar y temporalizar los contenidos del currículum, sino de realizar un trabajo matemático de reorganización de los elementos técnicos, teóricos y también de las herramientas tecnológicas. Como docentes debemos adaptar las ventajas que ofrecen estos instrumentos en nuestra clase, a fin de favorecer el aprendizaje.

El discurso matemático escolar efectivamente puede ser modificado desde el momento en que conceptos como el de derivabilidad o el de continuidad pueden ser redefinidos desde la perspectiva visual mediante la utilización del zoom al trabajar con software gráficos: éste puede ayudar a entender la derivabilidad como una rectitud local de la función en un punto y permitirnos ver aspectos que en un gráfico a mano sería imposible de ver.
Al respecto Tall (1997) dice: “Un potente acercamiento visual usando gráficos aportados por computadoras consiste en ampliar el gráfico de una función. Se usa la misma idea esencial del análisis no–standard (que un gráfico diferenciable sometido a una ampliación infinita es una línea recta). En la computadora, a medida que la ampliación aumenta, el gráfico luce menos curvo, y cuando se ve prácticamente recto, la pendiente del gráfico está representada por la pendiente de la recta que se ve en pantalla. Un acercamiento de este tipo puede usar las limitaciones visuales que ofrecen los gráficos dados por la computadora, enfatizando que lo que se ve es solo una aproximación al concepto mental, haciendo implícita la noción de límite en el proceso de ampliación más que explícita la definición formal”.

Un ejemplo del uso de estas tecnologías vinculado al tema que nos ocupa lo podemos encontrar en los software de simulación en donde utilizando el Método Montecarlo se puede aproximar el área de una región irregular. Para ilustrarlo utilizaremos una de las funciones de nuestro cuestionario.
Para determinar una aproximación del área de la región determinada por la función $f: R^* \to R \,/\, f(x) = \dfrac{6}{x}$, el eje de las abscisas y las rectas de ecuación x = 1 y x = 6, dividiremos la región en dos porciones como puede apreciarse en la figura.



El área de la región del rectángulo naranja la podemos determinar sin ninguna dificultad, así que centraremos nuestra atención en la región pintada de color lila. Encerramos esta región en el cuadrado de vértices (1,1), (6,1), (6,6) y (1,6), del cual conocemos su área. Nos preguntamos ahora cuál es la probabilidad P de que un punto del cuadrado elegido al azar pertenezca a la región lila.

La probabilidad buscada se determina mediante la siguiente definición:

$$P = \frac{\text{área(R)}}{\text{área(C)}}, \text{ siendo R la región lila y C el cuadrado.}$$

Si se repite un número N de veces la operación de elegir al azar un punto del cuadrado, contándose las veces (casos favorables: Cf) en las que el punto cae dentro de la región R, actividades que son realizadas automáticamente por el software, entonces el cociente Cf/N será una buena aproximación de la probabilidad del suceso mencionado.

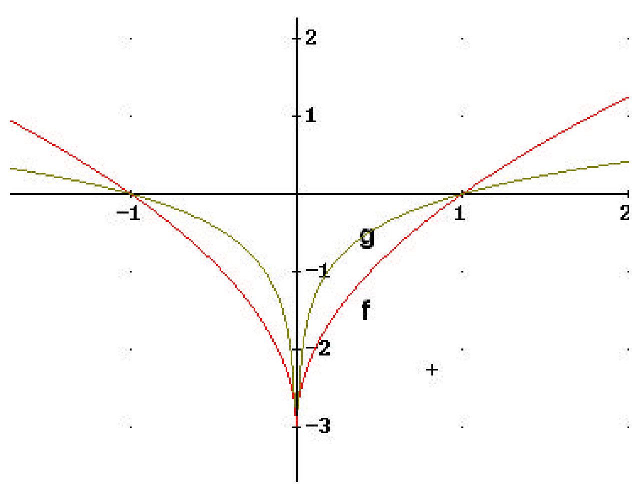
Utilizando la definición dada más arriba el producto $\frac{Cf}{N}.\text{área(C)}$ será a su vez una buena aproximación del área de la región que llamamos R.

El uso de las nuevas tecnologías produce en los estudiantes una motivación extra ya que es un medio que está muy cercano al mundo en el que se mueven y en el cual ellos se mueven con naturalidad, permite que la enseñanza sea más personalizada ya que cada estudiante puede ir avanzando a su ritmo.

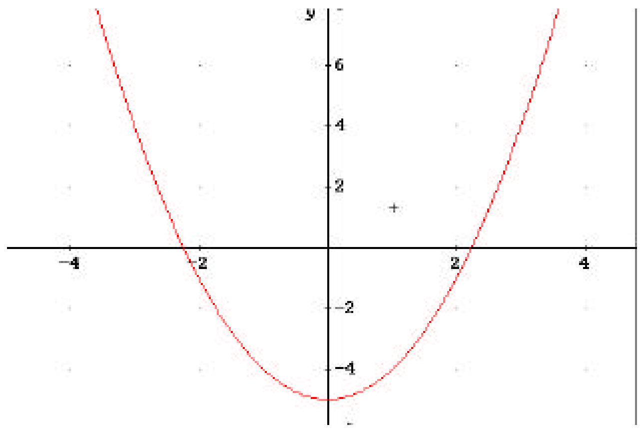
Pero no se debe hacer uso indebido de estas tecnologías y se debe alertar a nuestros alumnos de situaciones como: cuando los muchachos usan la calculadora gráfica o algún programa que grafica, deben tener mucho cuidado en la forma de "escribir" la fórmula en la calculadora, ya que un simple error al colocar, por ejemplo los paréntesis, lleva a graficar una función no deseada.

Otro ejemplo puede ser las limitaciones de la calculadora al graficar, ya que en un punto de no existencia con límites laterales infinitos e iguales, se puede ver en pantalla como un punto singular (anguloso).

Un ejemplo de esto pueden ser las funciones f: $R \to R \ / \ f(x) = 3\sqrt{|x|} - 3$ que presenta un punto anguloso en $x = 0$ y g: $R - \{0\} \to R \ / g(x) = \frac{3.\ln|x|}{5}$ que tiende a -∞ en un entorno de 0. A pesar de comportarse en forma muy diferente en un entorno de 0, las gráficas de estas funciones realizadas con el programa Derive muestran gran similitud.



Un gráfico puede inducir al alumno a un error, por ejemplo al determinar raíces de una función si no se tiene en cuenta el dominio. Por ejemplo: la función f con expresión analítica $f(x)= x^2 - 5$ con dominio en los racionales. Si el alumno se ayuda de la representación gráfica puede creer que esta función tendrá dos raíces, en cambio se sabe que en Q la ecuación $x^2 - 5 = 0$ tiene solución vacía.



Cabe mencionar que en Uruguay, a nivel de Bachillerato Diversificado (B.D.), es común la presentación de demostraciones de teoremas por parte del profesor, exigiéndose luego la repetición por parte de los estudiantes de las demostraciones que hace el profesor que a su vez repite lo que dice el libro. La presencia de estos nuevos medios tecnológicos abre la posibilidad de que el estudiante pueda tener la convicción de la veracidad de una proposición y éste es un prerrequisito deseable a la hora de abordar una demostración. En este tipo de actividad el énfasis no se pondría en que el resultado es válido (cosa que los alumnos creerían aun sin “visualizar”, dada la autoridad del profesor) sino en *por qué* dicho resultado es válido.

Otra ventaja para incluir el uso inteligente de la tecnología en la educación matemática es que el tipo de actividades que se pueden llevar a cabo favorecen, entre otras cosas, fundamentalmente, la destreza de poder pensar visualmente. Varios autores señalan la importancia de la visualización en la enseñanza. Un ejemplo claro de ello son los programas de simulación, que tienen por objeto proporcionar un entorno de aprendizaje abierto y basado en modelos reales. Estos tipos de programas son cada vez más abundantes y permiten a nuestros estudiantes experimentar y contrastar diversas hipótesis, ya que es posible variar datos y parámetros de control de la simulación.

Sin embargo debemos tener cuidado de que su introducción en la enseñanza no se convierta en un fenómeno de deslizamiento metacognitivo, es decir que debemos cuidar que la enseñanza no se centre en la enseñanza de cómo usar estos medios tecnológicos sino cómo lograr con ellos mejores aprendizajes. El uso de medios tecnológicos favorece el estudio de casos para una posterior generalización de los conceptos, de forma que también deberemos tener cuidado de no caer en un empirismo puro, vacío de justificaciones.

I.4. COMPONENTE DIDÁCTICA

La construcción de la obra matemática responde a ciertos intereses o preocupaciones de un momento histórico determinado, pero no son creados con el propósito de ser enseñables. De ahí que la disposición de un saber para la transmisión o incorporación a un sistema de enseñanza es un complejo proceso en donde los conceptos sufren un conjunto de transformaciones adaptativas que lo derivan en un saber enseñable.
"El conjunto de las transformaciones adaptativas que sufre una obra para ser enseñada se denomina *transposición didáctica* de la obra en cuestión." (Chevallard et al, 1997).

La transposición didáctica, explica el tránsito del saber sabio al saber susceptible de ser enseñado. El saber sabio o erudito proviene de la esfera científica, del trabajo intelectual del creador y contiene una riqueza conceptual compuesta de problemas, situaciones y significados. Éstos se van reduciendo en forma gradual en la medida que este conocimiento es compartido a la comunidad científica, en lo que podría llamarse un primer proceso de transposición. Para ello es necesario que se realice lo que se llama despersonalización, necesaria para que sea compartido dentro del ámbito erudito donde fue creado. La despersonalización nos explica cómo un saber se disocia de las problemáticas y situaciones que le dieron origen y sentido. Como resultado de este proceso el saber transpuesto no muestra su génesis epistemológica quedando reducido a definiciones y teoremas que nos muestran un saber perfectamente construido separado de los conflictos, conjeturas e interpretaciones que le dieron significación.
En una segunda etapa de transposición, la obra matemática es transformada para adaptarse a una institución didáctica concreta. Es en esta etapa donde surgen algunas preguntas como ser: ¿qué matemáticas deben estudiarse hoy para adquirir la cultura básica que nos reclama el interés social? En base al proyecto social de las matemáticas es que se hace necesaria la reconstrucción de las obras matemáticas para poder ser enseñadas en la escuela. Se hace una secuenciación de los contenidos elegidos y una temporalización de los mismos que son recogidas en el currículo.
Este proceso que sufre el saber sabio para transformarse en uno didáctico está mediado por la noosfera: grupos humanos que insertos en las instituciones permanecen atentos y ejercen influencia al fenómeno de llevar un saber a términos didácticos.
Una tercera y última etapa en este proceso es la que se produce dentro del proceso didáctico en sí mismo y que puede, con el tiempo, llevar a que la obra matemática de que se trate sufra importantes transformaciones. En esta etapa de trasmisión de los saberes es importante el papel que juega el docente y los textos en la recreación de la obra matemática. Estos actores aportarán su propia epistemología en la trasmisión a los estudiantes de los conocimientos elegidos para ser enseñados.

De este proceso de trasposición didáctica Brousseau (1994) nos dice: "El matemático no comunica sus resultados tal como los ha hallado; los reorganiza, les da la forma más general posible; realiza una "didáctica práctica" que consiste en dar al saber una forma comunicable, descontextualizada, despersonalizada, atemporal. El docente realiza primero el trabajo inverso al del científico, una recontextualización y repersonalización del saber: busca situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar. [...] Para transformar sus respuestas y sus conocimientos [del estudiante] en saber deberá, con la ayuda del docente, redespersonalizar y redescontextualizar el saber que ha producido, para poder reconocer en lo que ha hecho algo que tenga carácter universal, un conocimiento cultural reutilizable."

A continuación ilustraremos la tercera etapa del proceso de transposición didáctica en base al análisis de textos.

1.4.1. Revisión de Textos

Chevallard (1997), explica que los requisitos[12] en la transposición didáctica (de la matemática), "se encuentran tendencialmente satisfechos a través de un proceso de *"preparación" didáctica* que he denominado la *puesta en texto del saber*."

Afirma que esta forma de publicitar el saber es otra forma de despersonalización; los libros de texto desproveen de problemáticas y situaciones asociadas con el saber original.
Los textos hacen posible un control social de los aprendizajes, en la medida que tienen un reconocimiento social y cultural importante, funcionan como una autoridad moral con un estatus de verdad en referencia a los contenidos que en él aparecen y a la forma de plantear problemas o aplicar conceptos. Evidencian la epistemología del autor y en la mayoría de los casos la de la comunidad matemática en la que éstos están insertos.
La forma de organización de los conocimientos que los textos presentan "... *autoriza una didáctica*, cuya duración desmarca su diacronía y esta didáctica se legitima, entonces, por la ficción de una concepción del aprendizaje como "isomorfo" respecto del proceso de enseñanza cuyo modelo ordenador es el texto del saber en su dinámica temporal." (Chevallard, 1997).

El tema matemático involucrado en este trabajo es tratado, en el sistema uruguayo de Educación Media, en el curso correspondiente a Tercer Año de B. D., opción Medicina. No está previsto para las restantes opciones, aunque la mayoría de estos alumnos también estudiarán el tema en los cursos posteriores de nivel terciario.
Dicho programa figura en el Anexo III[13]

La carga horaria para el dictado de este curso es de 3 horas semanales[14] dedicadas al desarrollo teórico del tema y 2 horas semanales para trabajar con actividades prácticas. No siempre coincide el profesor que dicta el curso teórico con el que dicta el práctico.

Este programa está estructurado en base al argumento de la regresión para establecer la progresión del saber, es decir dentro del paradigma tradicional de enseñanza.

Dentro de este paradigma, parecería ser que aprender matemáticas consiste en ser capaz de resolver cierto tipo de problemas que son identificados en el seno de las matemáticas. Es por ello que aprender matemáticas consistiría en apropiarse de las herramientas necesarias para resolver problemas matemáticos. Estas herramientas

[12] Desincretización, despersonalización, publicidad, programabilidad de la adquisición del saber y control social de los aprendizajes.
[13] En este anexo figuran también los programas correspondientes a los cursos que recibieron los estudiantes que fueron entrevistados para esta investigación.
[14] Lo que aquí se llama hora semanal corresponde en realidad a 40 minutos.

son las teorías matemáticas, ya que ellas son capaces de resolver ciertas clases de problemas que en su conjunto cubrirán a todos los problemas. Como las teorías matemáticas son un conjunto estructurado de conceptos, métodos y algoritmos, éstos pasan a ser la base para resolver problemas.

Este parece ser el argumento que se sigue cuando se reflexiona acerca de lo que debe ser la educación en matemáticas, y que permite determinar lo que debe ser enseñado en la clase de matemáticas.
Desde esta perspectiva, para poder determinar los contenidos a enseñar en la clase de matemática, es necesario entonces contestar en forma sucesiva las preguntas: ¿qué problemas debe ser capaz de resolver un estudiante?, ¿qué teoría los puede resolver?, ¿de qué conceptos, métodos y algoritmos está compuesta esta teoría? Las respuestas que se den a estas preguntas van estableciendo un esquema de regresión necesario para organizar la progresión que el saber matemático debe seguir en el momento de ser presentado a los estudiantes.
En el tema que nos ocupa se puede optar por caminos diferentes. En los dos caminos que comentaremos a continuación es importante el papel que jugará el Teorema Fundamental del Cálculo al momento de la elección.
Se puede optar por introducir a la integral como primitiva, definiendo esta última luego de presentar el Teorema Fundamental del Cálculo. Se presenta así a la integración como la operación inversa de la derivación. Este es el camino seguido por los programas correspondientes tal como se puede apreciar en el Anexo III.
Otro camino a seguir es presentar a la integral definida en forma independiente de la derivada dejando para más adelante el abordaje del Teorema Fundamental del Cálculo. Este último camino respeta el desarrollo histórico del tema.

La elección hecha por quienes elaboran los programas uruguayos para insertar el tema en los mismos es tratar a la integral como primitiva, admitiendo la existencia de la misma para funciones continuas en un intervalo [a,b]. Se hace un tratamiento algebraico del tema, y se considera a la primitivización como "inversa" de la derivación.

Los tres libros de texto uruguayos escritos especialmente para acompañar los cursos de Tercer Año de B. D. y que tratan este tema, lo hacen influenciados por la estructura de los programas oficiales que rigen para todo el país.

A continuación haremos una pequeña reseña de los mismos.

- Matemática Sexto. Guía para el trabajo en clase.
  Balparda, O.; Lois, L.; Sbarbaro, M. (1993)

Comienza con un ejemplo en donde se introduce la noción de primitiva, pasando inmediatamente a dar una definición de la misma y se construye "la tabla de primitivas" como un proceso de "antiderivación", utilizándose resultados previamente obtenidos en el capítulo de derivadas. Es decir que se trabaja, en un principio, con una serie de fórmulas independientemente de la noción de área.
En un capítulo anterior titulado "Aplicaciones de la derivada" se había demostrado el Teorema Fundamental del Cálculo, por lo que ahora, inmediatamente después del ejemplo introductorio de este capítulo define Primitiva: "F es una primitiva de f en (a,b) si y sólo si para todo x que pertenece a (a,b) es F'(x) = f(x)."

Luego trabaja con funciones constantes y de la forma f(x) = ax + b y calcula el área bajo dichas curvas en un intervalo. Pasa luego a trabajar con la función cuya expresión analítica es $f(x) = -x^2+2x+1$ e intenta calcular el área limitada por dicha curva, el eje de las abscisas y las rectas de ecuación x = 0 y x = 1. Declara que trabajará con el método de Arquímedes y comienza a realizar aproximaciones por defecto, haciendo cada vez mejores aproximaciones, afinando la partición.
Define a continuación:

- partición P de [a,b].
- suma inferior, $S_{P,f}$, asociada a una partición P de [a,b]
- conjunto de todas las sumas inferiores asociadas a cada una de las particiones de [a,b], S_a^b.

Demuestra que S_a^b no es vacío y que está acotado superiormente por lo que por el axioma de completitud tiene extremo superior en R, al cual llama "integral de *a* hasta *b* de f".

$\boxed{\int_a^b f(x)dx \text{ es el supremo de } S_a^b}$

Admitiremos que si $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a,b]$ entonces

$\int_a^b f(x)dx$ **representa el área de la superficie cuyas fronteras son la gráfica de f, el eje de las abscisas y las rectas dadas por $x=a$ y $x=b$.**

- Funciones Reales. Matemática A para 6º AÑO. Giovannini, E. (1998).

En este texto no se desarrolla el tema integrales. En el capítulo donde se enuncian y demuestran las consecuencias del Teorema de Lagrange o del Valor Medio, se demuestra el Teorema Fundamental del Cálculo e inmediatamente se define Primitiva de una función:

Definición
Dadas dos funciones F y f, diremos que F es una "primitiva" de f en el intervalo I si F '(x) = f (x) para todo x∈ I. (Observemos que f es la derivada de F).

$$F \xrightarrow{\text{es primitiva de}} f$$
$$f \xrightarrow{\text{es derivada de}} F$$

Con esta definición, podemos enunciar el teorema 14 de la siguiente forma :

a) si una función tiene una primitiva, tiene infinitas.

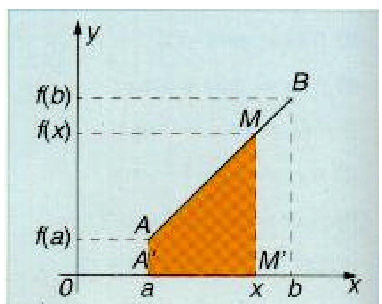
b) el conjunto de todas las primitivas se obtiene sumándole a una de ellas, una constante arbitraria.

Al conjunto de todas las primitivas de la función **f** lo notaremos $\int f(x)dx$ (que se debe leer integral de efe de x diferencial x) .

Lo trascripto anteriormente es la única mención que se hace en el texto del tema sin mencionar en ningún momento el área bajo una curva.

- Introducción al Análisis Matemático.
  Colección Mosaicos. Belcredi, L.; Zambra, M.; Deferrari, M. (2001).

Bajo el título de "Cálculo de primitivas e integrales" se introduce el tema con ejemplos trabajando con la función área bajo una curva (concretamente el área bajo una recta) considerando una función definida en un intervalo y positiva en dicho intervalo. Se pide que se obtenga la expresión analítica de la función área definida para todo x de [a,b], y que se demuestre que es derivable en el intervalo de definición y que A'(x) = f(x). Esta referencia concreta al Teorema Fundamental del Cálculo, lleva a que se considere a la integral como la "inversa" de la derivada. La consigna concreta para esta primer actividad es: "Calcula el área A(x) del trapecio AMM'A' en función de x". Esto podría estar reforzando en los estudiantes la idea de área como una fórmula, idea que vienen manejando desde primaria.



Se trabaja luego con una función f genérica, continua y positiva en [a,b] y se demuestra que la función área, $A:[a,b] \rightarrow R$ tal que para cada x_0 del intervalo [a,b], $A(x_0)$ representa el área bajo la curva comprendida entre el eje de las abscisas y las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = x_0$. Se pasa a demostrar que A(x) es derivable para cada x_0 y que $A'(x_0) = f(x_0)$. (Teorema Fundamental del Cálculo Integral).

El próximo paso es definir primitiva: "Sea f una función definida sobre un intervalo I de R. Se llama primitiva de f sobre I a toda función F derivable sobre I tal que F'(x) = f(x) para todo $x \in I$."

A continuación se demuestran algunos teoremas que caracterizan a las mismas:

- "Sea F una primitiva de f sobre el intervalo I. Entonces: Para todo real k, la función G definida por G(x) = F(x) + k es también una primitiva de f. Recíprocamente toda primitiva de f sobre I es de ese tipo."
- "Toda función continua sobre un intervalo I admite una primitiva sobre I."
- "Sea f una función continua sobre I, x_0 un elemento de I y y_0 un real cualquiera, entonces existe una única primitiva F de f sobre I tal que $F(x_0) = y_0$."

Se sigue con un tratamiento puramente algebraico utilizando la "tabla de derivadas" construida en un capítulo anterior para institucionalizar la correspondiente "tabla de primitivas".

Se define integral: "Sea f una función continua sobre un intervalo I y a y b dos elementos de I. Se llama integral de a a b de la función f, y se anota $\int_a^b f(x)dx$, al número F(b) – F(a), siendo F una primitiva cualquiera de f sobre I."

A partir de esta definición se demuestran teoremas vinculados a las propiedades de la integral, como ser los de linealidad, la relación de Chasles que permite plantear: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, monotonías, la desigualdad del valor medio.

Como paso final se tratan los métodos de integración: integración por partes e integración por sustitución.

Es decir que la vinculación de la integral con el área bajo la curva se utiliza solamente en algún ejemplo introductorio, dejando inmediatamente de lado esta idea.
No se utilizan en ningún momento las ideas que llevan a una definición formal de integral, separándose notoriamente de las ideas germinales del concepto.

En la parte final del capítulo se proponen actividades de cálculo de áreas delimitadas por funciones, utilizando para su resolución las propiedades de la integral que se estudiaron previamente.

Como se puede apreciar en los tres textos citados se trabaja de acuerdo a lo sugerido implícitamente en el programa oficial.

II. ANTECEDENTES

En este capítulo pretendemos reseñar algunos trabajos e investigaciones que están vinculados con el tema que nos ocupa en todos o algunos de sus aspectos. Sabemos que acerca del tema integrales existen muchas investigaciones previas, por ejemplo Cordero (1987), Orton (1983); pero nos centraremos en aquellos trabajos que consideramos están directamente relacionados con el enfoque que le hemos dado a esta investigación.

Entre los trabajos e investigaciones antes mencionados, hemos decidido incluir la investigación de Dubinsky acerca de las concepciones de área de estudiantes universitarios (Dubinsky, et al. 2000), la tesis de Maestría de Calvo quien realiza, entre otras cosas, un análisis sobre dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las integrales y otros aspectos concernientes a la noción de área para realizar una presentación de las integrales a partir de la noción de área (Calvo, 1997), y varios de los trabajos de Turégano vinculados al aprendizaje de la integral y el concepto de área (Turégano, 1994, 1996, 1998).

Haremos a continuación una reseña de los mismos, en donde destacaremos los objetivos de cada uno, los resultados obtenidos, las conclusiones y la vinculación de los mismos con nuestro trabajo.

- En Dubinsky et al. (2000), los autores presentan parte de los resultados de una investigación realizada a estudiantes universitarios sobre el concepto de área. El cuestionario consistía en 10 preguntas acerca del concepto de integral y en base a las respuestas se efectuaron entrevistas individuales para profundizar y aclarar acerca de las mismas. Se reporta en esta ocasión el análisis de algunos aspectos de las respuestas a tres de las diez preguntas.

Las respuestas de los estudiantes muestran las intuiciones de éstos en el cálculo de áreas que se diferencian de las presentadas a estos mismos estudiantes en el curso de cálculo que habían recibido. A diferencia de nuestros entrevistados, en esta experiencia los estudiantes tenían una instrucción previa acerca de la noción de integral definida basada en las sumas de Riemann.

Los autores hacen un análisis histórico de dos métodos para el cálculo de la integral definida: el “chopping up method”, entendiendo por este como el clásico método de exhaución de los griegos y el “method of indivisibles” en el que se piensa al área bajo la curva como suma de “todas las líneas paralelas contenidas en la figura”.
Se analizan los razonamientos a este respecto de Arquímedes, Cavalieri, Wallis, Roberval, entre otros, la vinculación histórica de ambos métodos y la supervivencia de uno de ellos.

Se concluye que en muchas de las respuestas y argumentaciones se maneja la idea de agotar el área bajo la curva inscribiendo más y más polígonos usando argumentos que se acercan al método de exhaución de Arquímedes. También se detectan pensamientos y argumentos de los estudiantes tendientes a recrear la noción de indivisible, en el sentido usado por Arquímedes en *El método*, a pesar de que en ningún tema de ninguno de los cursos recibidos por estos estudiantes se haya trabajado en este sentido.

Destacan que es fascinante ver cómo los estudiantes imitan, en cierta medida, los argumentos lógicos de muchos de los grandes matemáticos, lo que indica que una fuerte intuición no puede ser destruida por la instrucción recibida en la clase.

Finalmente se recomienda que la instrucción debería estar organizada teniendo en cuenta la intuición natural de los estudiantes acerca de este tema, que provee de un método riguroso para evaluar a la integral definida. Este tipo de introducción al tema puede servir como una fuerte influencia motivadora para los estudiantes que tienen inclinaciones matemáticas.

Como podemos apreciar este estudio tiene mucho en común con el que emprendimos en este trabajo ya que indaga sobre algunas de las estrategias intuitivas que utilizan los estudiantes al enfrentarse al cálculo de áreas bajo una curva y las compara con las utilizadas por los grandes matemáticos. Veremos, en el análisis de los resultados, que hay algunas coincidencias y similitudes en las estrategias de nuestros estudiantes en el caso del método de exhaución. No sucede lo mismo con el método de los indivisibles. Analizaremos si estas similitudes y diferencias pueden deberse a las diferencias en los niveles académicos de los estudiantes, que es básicamente el único argumento objetivo del que disponemos.

- La investigación de Calvo (1997) fue realizada a estudiantes de entre 17 y 20 años del Curso de Orientación Universitaria[15] de España.

Entre los objetivos de la misma, que nos interesa destacar por su vinculación con nuestro trabajo, se encuentran:

- Realizar un análisis de algunos aspectos que involucraría una presentación de las integrales a partir de la noción de área, lo que permitiría una recreación de los problemas que dieron origen a las integrales.
- Detectar algunas dificultades que los estudiantes experimentan a lo largo del proceso de estudio de las integrales, en relación especialmente al tema área.
- Preparar las bases de un trabajo, a realizar en una etapa posterior, en donde se diseñará una propuesta de introducción al Cálculo Integral que favorezca la construcción de un esquema conceptual de integral consistente con la definición formal del concepto y que incluya estrechas relaciones con los esquemas conceptuales de derivada y de área.

En la parte experimental de este trabajo se presenta a los estudiantes, que ya han trabajado con el tema integrales, un cuestionario y posteriormente se seleccionan algunos de estos estudiantes para ser entrevistados. Ambas fases experimentales se refieren a la acotación, cálculo y aproximación de regiones dadas en el contexto gráfico y fuera de él.

Como se puede apreciar esta investigación tiene puntos de contacto con la nuestra y también ciertas diferencias.
En ambas se parte de la base de presentar el tema integrales vinculado a la noción de área. En cuanto a la propuesta, comparten la presentación de las funciones en el contexto gráfico y analítico así como el interés de observar cómo acotan, calculan y

[15] El Curso de Orientación Universitaria (C.O.U.) corresponde al último curso de enseñanza secundaria o preuniversitaria de España.

aproximan los estudiantes el área de las regiones propuestas. En este sentido la diferencia estriba en que en nuestra investigación todas las actividades de cálculo de áreas están dadas en estos contextos, mientras que en la de Calvo se presentan también preguntas dadas fuera del contexto gráfico.
En cuanto a la población entrevistada la diferencia estriba en que en nuestro caso los estudiantes no han tenido contacto previo con el tema integrales, salvo cinco de ellos que habían trabajado el tema lateralmente en el área informática.
Entre las conclusiones extraídas en base al análisis del cuestionario y de las entrevistas, vinculadas con nuestra investigación, se encuentran:

- Que al acotar áreas de regiones no rectilíneamente determinadas se detectaron tres líneas de acción: ubican una figura relacionada por inclusión con la región a acotar, ubican una figura con la que comparar visualmente usando argumentos cuya validez es discutible o aproximan el área y allí "deducen" las cotas.

- Que el tratamiento para las cotas inferiores y superiores, en el caso de las regiones definidas bajo un gráfico, no es análogo y parece estar relacionado con la concavidad de la función.

- Que existe confusión en los estudiantes con respecto a las actividades de acotación y aproximación que trasciende el contexto del cálculo de área.

En base a los objetivos planteados, la prueba y las entrevistas realizadas, la autora plantea sus conclusiones y recomendaciones en cuanto a la definición de integral, las conexiones con los esquemas conceptuales de área y de derivada. Nos centraremos en los primeros dos ítems ya que el tercero no tiene vinculación directa con nuestra investigación.

En cuanto a la definición de integral y basándose en la creencia de que la integración es mucho más que la operación inversa de la derivación, propone como definición "una versión resultante de aplicar el proceso de transposición didáctica a la propuesta de Riemann reformulada más tarde por matemáticos como Darboux en términos de supremos de sumas inferiores e ínfimos de sumas superiores". Recomienda que el tratamiento de cotas superiores e inferiores y supremos e ínfimos deberá ocupar un lugar importante en la secuencia didáctica preparatoria en el contexto del cálculo de áreas. Señala que se deberá poner especial atención a las relaciones entre las actividades de acotación y aproximación y a las diferencias en el tratamiento de cotas superiores e inferiores.
Sugiere, para la secuencia didáctica preparatoria de la definición de integral que se incluyan actividades tales como, aproximación de áreas mediante el uso de cuadrículas junto con el estudio del error de aproximación y reflexión acerca de la obtención de cotas más ajustadas; aproximación de áreas por los métodos rectangular y trapezoidal y la reflexión acerca de si las aproximaciones así obtenidas son estimaciones por exceso o defecto de acuerdo a la monotonía y concavidad de la función; que fomenten el pasaje al límite; que den sentido a considerar, en el contexto del cálculo de las sumas superiores e inferiores, la altura de los rectángulos como valores relacionados con los valores funcionales que por lo tanto pueden ser negativos.

En cuanto a las conexiones con el esquema conceptual de área se plantea que las facetas que dan riqueza al mismo son la algebraica, la numérica y la gráfica, siendo

esta última la menos explotada. Se recomienda, como recurso para sugerir a los estudiantes imágenes visuales enriquecedoras del esquema conceptual de integral, el explotar su relación con el esquema conceptual de área. Estas imágenes no sólo deben ser ilustrativas de la definición y no deben estar restringidas al nivel heurístico, sino que deben tenerse en cuenta también en el momento de ilustrar propiedades. Se deben generar imágenes visuales asociadas a la noción de integrabilidad en relación con la existencia de figuras del plano a las cuales no se asocia un área.
Se recomienda utilizar esta asociación de integral y área bajo una curva con cuidado y marcar que sólo se transfieren algunas propiedades y evitar que se transfiera al esquema conceptual de área la idea de asociar al área valores negativos.

Como podemos observar, el trabajo recién descrito tiene muchos puntos de contacto con la presente investigación. En ambas se pretende un estudio tendiente a presentar el concepto de integral definida vinculándola al área bajo la curva ya que se considera que la misma es más que la operación inversa de la derivación.
Veremos en el análisis de los resultados qué dificultades presentan nuestros estudiantes en el proceso de búsqueda de estrategias para el cálculo de las áreas de las regiones que se les presentan y los compararemos con las dificultades que Calvo detecta en los estudiantes que ella entrevistó. Este análisis puede ser complementario ya que nuestros estudiantes nunca vieron el tema integrales, por lo que estarían en una etapa previa.

✘ De los estudios e investigaciones de Turégano vinculados al aprendizaje de la integral definida y el concepto de área nos referiremos a aquellos que consideramos estrechamente vinculados a la presente investigación.

En Turégano (1996) se presentan una serie de reflexiones didácticas acerca del concepto de área y su medida que tienen base en trabajos anteriores de la propia autora. En él se plantea, entre otras cosas, que la imagen de área está ligada a una fórmula y no es definida como un objeto geométrico sino como resultado de un cálculo acorde a un procedimiento determinado. Como veremos más adelante, en el análisis de los resultados, muchos de nuestros estudiantes tienen una imagen de área asociada a una fórmula.

En Turégano (1998) en base a reflexiones sobre la enseñanza del cálculo, se plantea que es recién a los 16 años aproximadamente, que los estudiantes se enfrentan a las ideas de infinito, de límite, etc. debiendo asimilarlos junto con otros conceptos y las teorías formales que los caracterizan y desarrollan matemáticamente. Es así que la teoría no interviene para ordenar un conjunto de experiencias previas debido a que éstas simplemente no existen. Este estado de las cosas estaría llevando a los estudiantes a enfrentar dificultades a la hora de comprender los conceptos involucrados en el estudio del cálculo.

En Turégano (1994), a partir de datos extraídos mediante cuestionarios y entrevistas a estudiantes del primer año del Bachillerato Unificado Polivalente[16] de España, se evidencia la existencia de serias dificultades en cuanto a la disponibilidad y uso de estrategias a la hora de calcular áreas de figuras no rectilíneamente delimitadas. Del análisis interpretativo de los datos recogidos en esta experiencia se llega a la

[16] El B.U.P. correspondía, en esos momentos, a los estudios preuniversitarios.

conclusión de que los estudiantes utilizan tres imágenes distintas del concepto de área que permite clasificar a los estudiantes entrevistados en los siguientes niveles de razonamiento:

- *primitivo*: son aquellos estudiantes que tienen una imagen primitiva geométrica del área ligada a la extensión y una imagen numérica ligada a una fórmula. Admiten que las superficies rectilíneamente limitadas tienen área, que ésta depende de la forma por lo que su medida está determinada por una fórmula. No admiten que se puede determinar el área de superficies no rectilíneamente limitadas.
- *operativo*: son aquellos estudiantes que no dan una descripción explícita del concepto de área pero que la noción que tienen de ella les permite asignarle a la misma propiedades, que usan correctamente en la resolución de problemas. Admiten la igualdad de áreas para superficies de distinta forma, estén o no rectilíneamente limitadas, la conservación del área por descomposición o movimientos, utilizan las propiedades aditiva y transitiva, admiten la posibilidad de asignar un número a cualquier superficie aunque no conozcan el procedimiento para hacerlo.
- *descriptivo*: son aquellos estudiantes que son capaces de describir verbalmente el concepto de área que poseen así como sus propiedades usándolas en forma correcta. Admiten la conservación del área por descomposición o movimientos y utilizan correctamente y describen las propiedades de aditividad y transitividad. Pueden asignar un número a cualquier superficie aunque no conozcan el procedimiento para hacerlo.

En el Capítulo IV, intentaremos ver si esta clasificación se condice con los comportamientos de los estudiantes que hemos entrevistado en la presente investigación.

En cuanto a las estrategias utilizadas por los estudiantes obtiene, entre otros, los siguientes resultados:

- Se constata la falta de estrategias para la resolución de problemas de áreas, lo que no impide que los estudiantes utilicen correctamente el área de forma operativa.

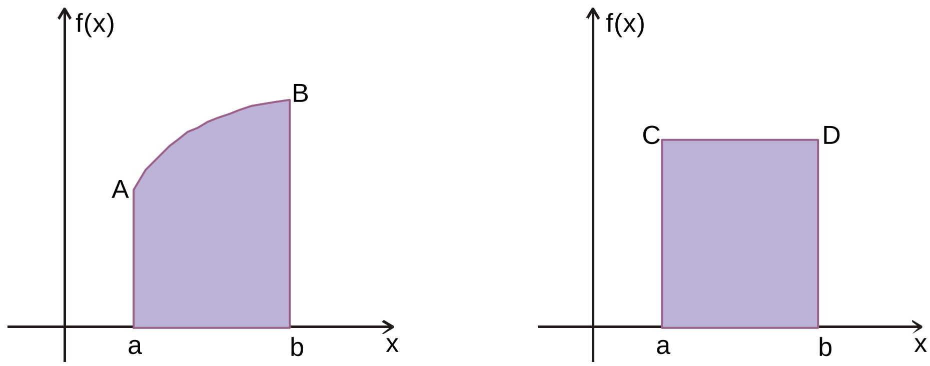
- Las descomposiciones infinitesimales de las superficies no son procedimientos evocados en forma espontánea para el cálculo de áreas. Se plantea que quizá esto se debe a tener que romper con la imagen que tienen del área como espacio que hay que cubrir.

- Imposibilidad de "ver" un área como límite de una suma de infinitesimales. Esto tiene como origen el paso al indivisible de una dimensión menos previamente a la suma de las áreas, por lo que el área "desaparece".

- Los estudiantes hacen un empleo tácito del infinitesimal como algo muy pequeño pero distinto de cero.

Las reflexiones antes mencionadas son producto de diferentes investigaciones realizadas por la autora en diferentes oportunidades y reportadas en Turégano (1994, 1996, 1998).

Esto la lleva a elaborar y presentar un modelo teórico, dentro del contexto matemático, que pudiera ser utilizado para una propuesta didáctica de la presentación de la integral definida. Es así que el problema que se plantea consiste en determinar un dominio rectangular cuya área sea igual a la de la región determinada por la gráfica de una función real f definida en un intervalo [a,b], acotada y no negativa.



Área(abBA) = Área(abDC)

El problema queda entonces reducido al cálculo de la altura media de la función f en el intervalo de definición. Para determinar dicha altura se realizan sucesivas subdivisiones del intervalo [a,b] por bipartición. Para cada subdivisión se determina el supremo (H) y el ínfimo (h) de la función generando de esta forma dos sucesiones monótonas y acotadas por lo que ambas tendrán límite. En el caso de que estos límites coincidan, éste será la altura media de la función en el intervalo [a,b].
Esta propuesta se presenta como una alternativa a la integral de Riemann para ser usado en la educación secundaria. La idea es secuencializar el currículo del cálculo de una forma que esté más acorde con la génesis histórica, es decir comenzar con la integral definida independientemente de la diferenciación.
Los argumentos que plantea la autora para encarar el tema de esta forma son a grandes rasgos los siguientes:

- Cuando una cosa se descubre antes que otra, es probable que la primera sea más sencilla que la segunda. Más de mil años antes de que se conocieran los métodos de la diferenciación Arquímedes ya estaba haciendo integrales definidas.
- La integral es una continuación de la idea de área, que los estudiantes conocen desde la escuela.
- Esta forma de trabajo impide que los estudiantes consideren a la integración principalmente como lo inverso de la diferenciación y pueden ver al Teorema Fundamental del Cálculo como lo que realmente es: un puente entre ambas estructuras matemáticas. (Turégano, 1996, 1998).

A diferencia de lo planteado por Turégano en la propuesta anterior, nuestro trabajo está enfocado a detectar estrategias de los estudiantes para ser utilizadas en la presentación de la integral de Riemann. Esta elección para la presentación de la integral definida se debe a que esta última es la que los estudiantes enfrentarán a nivel terciario una vez egresados del B.D. Compartimos con Turégano que el recurso más adecuado para la presentación de la integral es el de área, que en nuestro caso sería utilizado para dar un sentido a las sumas de Riemann.

III. DISEÑO EXPERIMENTAL

Presentamos en este capítulo, en una primera instancia, la secuencia que fue diseñada para ser presentada a los estudiantes como medio para recabar los datos que nos permitan dar una respuesta a nuestra pregunta de investigación. Haremos una justificación de la misma analizando los por qué de las propuestas, qué esperamos de los estudiantes en cada uno de los ítems propuestos. Mostramos, además, un análisis de la propuesta desde el punto de vista matemático. Luego haremos un detalle de las características de la población entrevistada y de la puesta en escena de la propuesta.

En una segunda instancia haremos una descripción de la metodología que hemos decidido utilizar para la presentación de los datos que hemos recabado, así como una guía para facilitar la lectura de los mismos.

III.1. DISEÑO Y DESARROLLO DE LA SECUENCIA

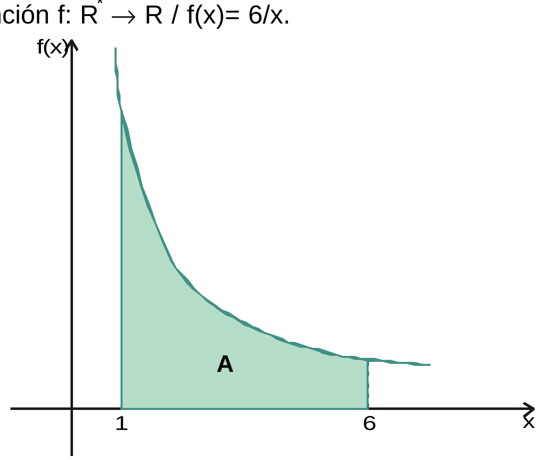
Uno de los principales objetivos de la presente investigación es conocer las diferentes estrategias que utilizan los estudiantes del Bachillerato Diversificado (edades 16 a 18 años) del Uruguay al enfrentarse al cálculo de áreas de figuras limitadas por la gráfica de una función no negativa definida en un intervalo [a,b], el eje de las abscisas, y las rectas de ecuaciones x = a y x = b. Se pretende, en una etapa posterior, utilizar la información recabada con el objetivo de elaborar una secuencia didáctica para introducir el cálculo de integrales definidas vinculándolas con el área bajo una curva. La idea es, en lo posible, explorar y utilizar aquellas formas naturales o espontáneas en que los estudiantes razonan en este tema en el diseño de una secuencia que acerque a éstas con aquellas utilizadas y aceptadas por la comunidad matemática. Creemos que este acercamiento nos permitirá, con pocas modificaciones de los conocimientos de los estudiantes, introducirnos en el tema de una forma natural siguiendo el camino que transitaron los matemáticos de antaño y acercando a los estudiantes los problemas que le dieron origen.
Para ello se diseñaron las dos propuestas siguientes:

III.1.1 Cuestionarios

Propuesta 1

Actividad 1

Este es el gráfico de la función f: $R^* \rightarrow R$ / f(x)= 6/x.



Sea A la región encerrada entre la gráfica de f, el eje de las abscisas y las rectas de ecuación $x = 1$ y $x = 6$, como muestra la figura.

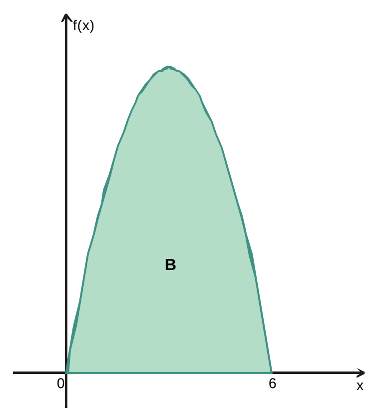
a) Intenta calcular el área de A.
b) El valor que hallaste en a), ¿corresponde al área de A? Justifica tu respuesta.

Actividad 2

a) El valor que hallaste en la actividad 1 es una aproximación del área de A. Encuentra una mejor aproximación.
b) ¿Se puede continuar este proceso en la búsqueda de mejores aproximaciones? Si contestaste afirmativamente explica ampliamente cómo harías una mejor aproximación. Si lo hiciste negativamente, justifica tu respuesta.

Actividad 3

Este es el gráfico de la función $f: R \to R \,/\, f(x) = x(6-x)$



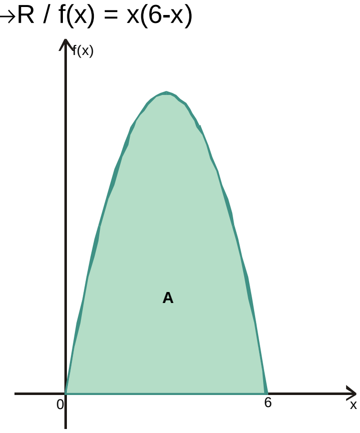
Sea B la región encerrada entre la gráfica de f y el eje de las abscisas entre los puntos (0,0) y (6,0), como muestra la figura.

a) Intenta calcular el área de B.
b) En caso de que lo consideres posible, explica ampliamente cómo encontrar mejores aproximaciones de B.

Propuesta 2

Actividad 1

Este es el gráfico de la función $f: R \to R \,/\, f(x) = x(6-x)$



Sea A la región encerrada entre la gráfica de f y el eje de las abscisas entre los puntos (0,0) y (6,0), como muestra la figura.

a) Intenta calcular el área de A.

b) El valor que hallaste en a), ¿corresponde exactamente al área de A? Justifica tu respuesta.

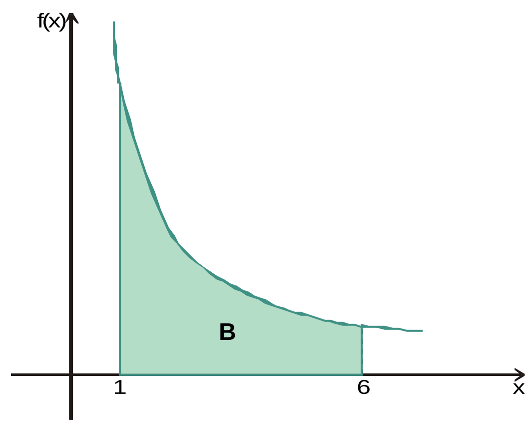
Actividad 2

a) El valor que hallaste en la actividad 1 es una aproximación del área de A. Encuentra una mejor aproximación.

b) ¿Se puede continuar este proceso en la búsqueda de mejores aproximaciones? Si contestaste afirmativamente explica ampliamente cómo harías una mejor aproximación. Si lo hiciste negativamente, justifica tu respuesta.

Actividad 3

Este es el gráfico de la función f: $R^* \to R$ / f(x) = 6/x



Sea B la región encerrada entre la gráfica de f, el eje de las abscisas y las rectas de ecuación x = 1 y x = 6, como muestra la figura.

a) Intenta calcular el área de B.

b) En caso de que lo consideres posible, explica ampliamente cómo encontrar mejores aproximaciones de B.

III.1.2. Fundamentación de las dos propuestas

Se pretende determinar si el estudiante dispone de alguna estrategia para enfrentar este tipo de tarea, en caso afirmativo cuál o cuáles son estas estrategias, cómo las utiliza, qué herramientas elige para trabajarlas, cuál es el grado de confiabilidad que tiene en ellas, cómo influye la concavidad de la función en el tipo de estrategia a utilizar, etc. Pensamos que éstas serán diferentes según que la función involucrada tenga concavidad positiva o negativa por lo que a la mitad de los estudiantes se les presenta la propuesta que involucra primero a la hipérbola y a la otra mitad la que aparece en primera instancia la parábola. Pensamos que mayoritariamente obtendrán aproximaciones por exceso en el caso de la función de concavidad positiva y por defecto en el otro caso. También se desea observar si estas estrategias son diferentes para cada situación, si son las mismas o si tienen algunos aspectos en común.

Al cambiar de curva esperamos observar también si el estudiante, al enfrentarse a la nueva situación, trabaja sin tener en cuenta lo hecho en las actividades anteriores, si utiliza igual estrategia, si cambia de estrategia, si ha habido algún tipo de aprendizaje en el transcurso de la prueba lo que podría llevarlo a trabajar con alguna estrategia más eficiente.

Cada propuesta es acompañada de las figuras a las que le tienen que calcular el área para que allí realicen trazados, mediciones, o lo que ellos consideren necesario con el fin de que las utilicen como figura de análisis, lo que a su vez nos permitirá interpretar el tipo de razonamiento que realizarán los estudiantes.
Todas las gráficas que se les presentan están hechas a escala (1:1), para que exista una congruencia entre las imágenes que se obtienen con la expresión analítica de la función y la lectura que se puede hacer de las mismas a partir de las gráficas. Esta decisión se tomó debido a que en una prueba preliminar realizada con otros estudiantes, al presentarse un cuestionario similar al presente acompañado de una figura de análisis que no mantenía dicha escala, varios estudiantes no continuaban su trabajo porque la figura no se correspondía con los valores que se obtenían por medio de la expresión analítica.

III.1.3. Justificación de cada pregunta

Como básicamente las dos propuestas son iguales, en esta etapa se justificarán las seis preguntas base de ambas propuestas.

Actividad 1

a) Intenta calcular el área de A.

En una primera instancia se pensó en enunciar este ítem diciendo: “Calcula el área de A”. De acuerdo con la tradición de nuestro sistema escolar la palabra “calcula” les estaría indicando que ellos deben conocer algún método que les permita realizar efectivamente el cálculo exacto del área de la región. Sin embargo, al tratarse de estudiantes que no han realizado hasta el momento ningún curso de cálculo integral sabemos que no cuentan con herramientas apropiadas. Pensamos que esa redacción los llevaría a buscar un camino conocido y al no encontrarlo algunos estudiantes podrían verse limitados y responderían que no se puede o simplemente que ellos no pueden porque no les fue enseñado, por lo que no harían intentos para aproximarse al área buscada. Para comprobar esta hipótesis, se realizó un estudio previo, que no se presenta en el presente trabajo, en donde se les pedía que calcularan el área de la región A y la mayoría de los estudiantes respondió lo que habíamos previsto. Otros, luego de un largo rato, preguntaron si podían aproximar el área en lugar de calcularla ya que no “recordaban” cómo hacerlo. Para revertir esta situación se optó por el uso de la palabra “intenta”, que consideramos permitiría que los estudiantes se sintieran en libertad de trabajar como quisieran ya sea acotando, aproximando, midiendo, etc.

Uno de los objetivos de esta pregunta es ver si los estudiantes detectan toda la información que se les brinda tanto en forma gráfica como analítica, si hacen uso de ella, si entienden la notación utilizada lo que nos permitiría determinar si estos aspectos serían o no obstáculos extras en el momento de trabajar el aspecto esencial de la investigación. También se pretende observar si usan la expresión analítica para realizar los cálculos o si utilizan instrumentos de medición. En definitiva se intenta determinar si interpretan y utilizan total o parcialmente los datos que se les ofrecen.

Se espera que los estudiantes utilicen la expresión analítica para calcular imágenes y que usen dichos valores para el cálculo de áreas de figuras que los llevaran a aproximar el área de la región.

En la prueba preliminar antes mencionada se trabajó con estudiantes de entre 14 y 18 años (1º, 2º y 3º año de Bachillerato Diversificado) y en general, los más jóvenes, no usaron la expresión analítica para llegar a las imágenes sino que usaron regla para determinar las dimensiones de las figuras auxiliares que habían trazado.
Para la presente investigación se acotó la población encuestada (se trabajó con estudiantes del último año de Bachillerato Diversificado) lo que nos permite prever que usarán el cálculo de imágenes de la función para la determinación de las dimensiones de las figuras auxiliares.

Consideramos que una posible estrategia a utilizar por los estudiantes para obtener un valor aproximado del área de la región es cubrir la misma con figuras bien conocidas por ellos (triángulos, rectángulos, etc.) a las que les puedan calcular el área.
También podría suceder que dividieran la región usando una partición ya sea horizontal o vertical.
En esta primer aproximación pensamos que la mayoría de los estudiantes llegarán a un valor aproximado del área de la región, ya sea con alguna de las estrategias ya nombradas u otras pero sin pensar en ninguna especie de algoritmo geométrico que les permita luego hacer una generalización.

b) El valor que hallaste en a), ¿corresponde exactamente al área de A? Justifica tu respuesta.

A través de esta pregunta se desea constatar si los estudiantes creen que el valor encontrado es el área de la región o se trata de una aproximación. Esperamos que la totalidad de los entrevistados reconozcan que el valor que hallaron no es exactamente el buscado.

Además se buscaría establecer si pueden aceptar la existencia de tareas que, por el momento, no pueden cumplir en su totalidad y para las cuales no han recibido instrucción. Es práctica usual en nuestro sistema de enseñanza que las actividades que se proponen a los estudiantes siempre tienen un resultado, que ese resultado es único y que, con la instrucción recibida en el aula alcanza para poder llegar a ese resultado. Con esto no se quiere decir que en ningún curso se trabaje con actividades que sean un reto para los estudiantes, es decir actividades que los lleven a investigar, conjeturar, argumentar, etc., sino que, en general, a partir de segundo año de B.D. las actividades que se les proponen son usualmente rutinarias e involucran una serie de algoritmos, fórmulas y tablas que terminan siendo manejables por gran cantidad del estudiantado sin que haya necesariamente un entendimiento profundo y significativo de la tarea. En definitiva se trataría de establecer la influencia de los contratos escolar y pedagógico y los distintos tipos de contrato didáctico que éstos regulan así como el impacto del contrato experimental en el comportamiento y rendimiento de los estudiantes durante la entrevista.

Por otro lado, se pretende ver qué tipo de argumentos usan para la justificación de su respuesta; si usan argumentos visuales, argumentos de orden instrumental (confianza en las herramientas utilizadas, en el manejo que ellos hacen de las mismas, etc.), etc. Se espera que haya diversidad de argumentos prevaleciendo el argumento gráfico, pues las herramientas que usaron no llegan a agotar completamente la región.

Actividad 2

a) El valor que hallaste en la actividad 1 es una aproximación del área de A. Encuentra una mejor aproximación.

El enunciado de esta actividad les es entregado una vez finalizada la actividad anterior. En el mismo se les proporciona nueva información que, según lo esperado, ya presumen o conocen. Se les pide entonces que profundicen sobre lo trabajado en la actividad anterior. Se pretende observar si hay cambios de comportamiento, si hubo o no aprendizaje, el grado de confianza de los estudiantes en sus procedimientos, influencia del contrato experimental y del contrato institucional.
Se espera en este caso, que una menor cantidad de estudiantes, con respecto a la actividad anterior, llegue a un nuevo valor ya que esta actividad exige mayor trabajo, que no sabemos si los estudiantes estarían dispuestos a asumirlo, y mayor demanda cognitiva, sobre todo si la primera aproximación es muy ingenua.

b) ¿Se puede continuar este proceso en la búsqueda de mejores aproximaciones? Si contestaste afirmativamente explica ampliamente cómo harías una mejor aproximación. Si lo hiciste negativamente, justifica tu respuesta.

Se espera observar aquí si los estudiantes son capaces de elaborar una estrategia sistemática que les permita calcular cada vez mejores aproximaciones del área de la región, o si por el contrario no encuentran en sus métodos de trabajo cierto procedimiento sistemático para continuar aproximando.
En caso de que su respuesta sea afirmativa sería de interés determinar si el alumno puede concebir un proceso finito o infinito y si sus procedimientos se asemejan o no a los generados por los matemáticos en la evolución histórica del concepto.
También se pretende observar si aparecen en sus argumentaciones los obstáculos, en el sentido de Brousseau, que enfrentaron, en el pasado, estos matemáticos y si aparecen otros obstáculos además de los epistemológicos (didácticos, cognitivos).

Actividad 3

a) Intenta calcular el área de B.

Aquí se pretende no solamente observar qué estrategias usan para hacer una primer aproximación del área de la región B sino también, como se dijo anteriormente, si utilizan los mismos procedimientos que usaron para la región anterior, si el cambio en la concavidad produce cambios en las estrategias, si hubo o no un aprendizaje, una reflexión, un cambio de actitud por parte de algunos estudiantes, etc.
Aunque las actividades anteriores se presume que sean de alta exigencia para el estudiante, se espera que la mayoría llegue a un resultado numérico aproximado del área de la región.

b) En caso de que lo consideres posible, explica ampliamente cómo encontrar mejores aproximaciones de B

Los objetivos y expectativas referidas a esta pregunta son similares a los de la Actividad 2 b), y nos servirá para comparar el tipo de argumentaciones de la actividad anterior con los que brinde ahora en esta segunda oportunidad.

III.2. ANÁLISIS DESDE LA PERSPECTIVA MATEMÁTICA

Analizaremos a continuación cuáles son las herramientas usadas al nivel de la obra matemática para el cálculo del área bajo las curvas que hemos decidido utilizar en la propuesta y diferentes caminos que permitirían a los estudiantes llegar al área buscada utilizando las herramientas que creemos ellos disponen de acuerdo a sus conocimientos previos. Esto nos permitirá reflexionar en profundidad sobre la tarea y así poder interpretar mejor las respuestas de los estudiantes.

III.2.1. Cálculo del área del segmento de parábola

f: $R \rightarrow R$ / f: $f(x) = x\,(6 - x)$

La herramienta que primero usaría un matemático, para realizar el cálculo del área, es la integral definida:

$$Á = \int_0^6 x(6-x)dx = \left[6\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^6 = 3.6^2 - \frac{6^3}{3} = 36$$

Sabemos que los estudiantes entrevistados no cuentan con ella por lo que presentamos a continuación otras formas de llegar al área buscada.

En todos los casos usaremos la simetría de la parábola con respecto a la recta de ecuación $x = 3$, por lo que estaríamos calculando el área de la región comprendida entre la curva, el eje de las abscisas y las rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = 3$.

Realizaremos una partición del intervalo [0,3] en n intervalos de amplitud $\frac{3}{n}$.

Utilizaremos los siguientes resultados cuyas pruebas visuales figuran en el Anexo II. Hemos elegido este tipo de pruebas basados en el análisis realizado en el Capítulo I en referencia al valor de las imágenes en cuanto nos pueden ilustrar resultados, conceptos, métodos y estrategias de pensamientos.

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$

2) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$

3) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

4) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{n.(4n^2-1)}{3}$

✖ *Estrategia 1*

Método Rectangular

Trabajaremos con aproximaciones por defecto y por exceso aunque pensamos que la mayoría de los estudiantes, al trabajar con esta figura, lo hará por defecto debido a la concavidad de la función.

Sumas inferiores

$$S(n) = \frac{3}{n}.f(0) + \frac{3}{n}.f\left(\frac{3}{n}\right) + \frac{3}{n}.f\left(\frac{3.2}{n}\right) + ... + \frac{3}{n}.f\left(\frac{3(n-1)}{n}\right) =$$

$$= \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left[\frac{3(i-1)}{n}\right] =$$

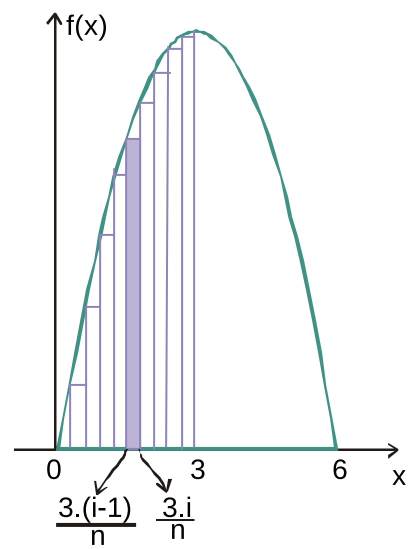
$$= \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{3(i-1)}{n}\left(6 - \frac{3(i-1)}{n}\right) =$$

$$= \frac{3}{n}.\frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1)[2n-(i-1)\ ] =$$

$$= \frac{3}{n}.\frac{9}{n^2}\left[2n\sum_{i=1}^{n}(i-1) - \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\right] \underset{\text{por 1) y 2)}}{=}$$

$$= \frac{3}{n}.\frac{9}{n^2}\left[2n\frac{(n-1).n}{2} - \frac{(n-1).n.(2n-1)}{6}\right] =$$

$$= \frac{3}{n}.\frac{9}{n^2}\frac{n(n-1)(4n+1)}{6} = \frac{9(n-1)(4n+1)}{2n^2} \Rightarrow \boxed{s(n) = \frac{9(n-1)(4n+1)}{2n^2}}$$



Sumas superiores

$$S(n) = \frac{3}{n}.f\left(\frac{3}{n}\right) + \frac{3}{n}.f\left(\frac{3.2}{n}\right) + ... + \frac{3}{n}.f\left(\frac{3.n}{n}\right) =$$

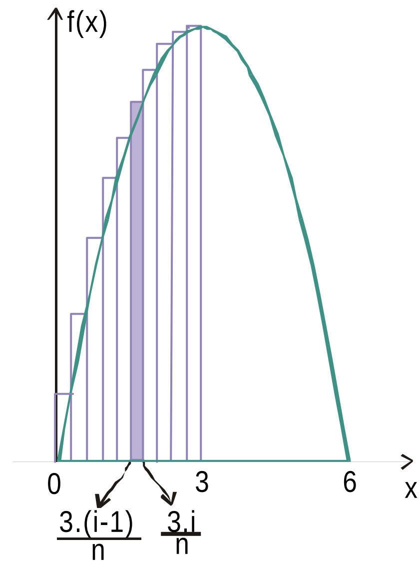
$$= \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left[\frac{3.i}{n}\right] = \frac{3}{n}.\left(\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3.(i-1)}{n}\right) + f(3)\right) =$$

$$= \frac{3}{n}\left(\frac{3.(n-1)(4n+1)}{2n} + 9\right) =$$

$$= \frac{3}{n}\left(\frac{3.(4n^2+3n-1)}{2n}\right) =$$

$$= \frac{9.(4n^2+3n-1)}{2n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S(n) = \frac{9.(4n^2+3n-1)}{2n^2}}$$



Sabemos que el área buscada está comprendida entre 2.s(n) y 2.S(n), es decir que:

$$2.s(n) \le Á \le 2.S(n) \Rightarrow \frac{9(n-1)(4n+1)}{n^2} \le Á \le \frac{9.(4n^2+3n-1)}{n^2}$$

$$36 - \frac{9}{n}\left(3 + \frac{1}{n}\right) \le Á \le 36 + \frac{9}{n}\left(3 - \frac{1}{n}\right)$$

Hallemos algunas cotas inferiores y superiores:
Para n = 3 obtenemos:

$26 \le Á \le 44$

Para n = 10 obtenemos:

$33{,}21 \le Á \le 38{,}61$

Para n = 1000 obtenemos:

$35{,}97.... \le Á \le 36{,}02....$
Si pasamos al límite obtenemos:

$$\lim_{n\to+\infty} 36 - \frac{9}{n}\left(3 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 36 + \frac{9}{n}\left(3 - \frac{1}{n}\right) = 36 \Rightarrow \boxed{Á = 36}$$

✖ *Estrategia 2*

Método Trapezoidal

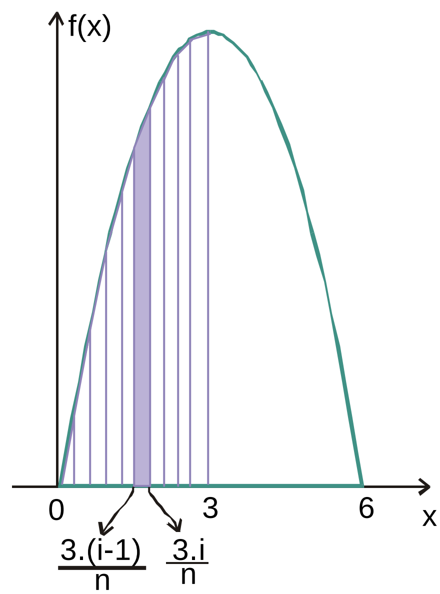
$$S(n) = \frac{3}{n}.\frac{f(0)+f\left(\frac{3}{n}\right)}{2}+\frac{3}{n}.\frac{f\left(\frac{3}{n}\right)+f\left(\frac{3.2}{n}\right)}{2}+........+\frac{3}{n}.\frac{f\left(\frac{3(n-1)}{n}\right)+f\left(\frac{3.n}{n}\right)}{2} =$$

$$= \frac{3}{2n}\left(f(0)+2.f\left(\frac{3}{n}\right)+........+2.f\left(\frac{3.(n-1)}{n}\right)+f(3)\right)=$$

$$= \frac{3}{2n}.\left(0+2\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3(i-1)}{n}\right)+9\right) =$$ [17]

$$= \frac{3}{2n}.\left(2.\frac{3(n-1)(4n+1)}{2n}+9\right)=$$

$$= \frac{36n^2-9}{2n^2} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \qquad 2.s(n) = \frac{36n^2-9}{n^2}$$

$$\boxed{2s(n) = 36-\frac{9}{n^2}}$$

Las aproximaciones que encontramos por este método son por defecto y como la expresión que nos permite determinar la suma es simplemente el promedio entre las sumas inferiores y superiores del método rectangular esto nos permite mejorar las cotas obtenidas para n = 3, 10 y 1000.

Las cotas inferiores que obtenemos son 35, 35,91 y 35,999991 para los valores de n: 3, 10 y 1000 respectivamente.

Si pasamos al límite obtenemos:

$$\lim_{n\to+\infty} 36-\frac{9}{n^2} = 36$$

[17] Por resultado obtenido al calcular la suma en el método rectangular.

✘ *Estrategia 3*

Método de la ordenada del punto medio

$$S(n) = \frac{3}{n}.f\left(\frac{3.1}{2n}\right)+\frac{3}{n}.f\left(\frac{3.3}{2n}\right)+\ldots\ldots+\frac{3}{n}.f\left(\frac{3.(2n-3)}{2n}\right)+\frac{3}{n}.f\left(\frac{3.(2n-1)}{2n}\right)=$$

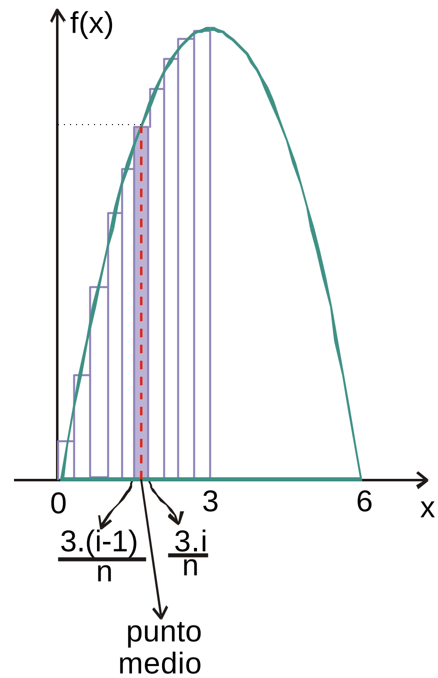
$$=\frac{3}{n}.\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3(2i-1)}{2n}\right) = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{3(2i-1)}{2n}\left(6-\frac{3(2i-1)}{2n}\right) =$$

$$=\frac{3}{n}.\frac{9}{4n^2}.\sum_{i=1}^{n}(2i-1)(4n-(2i-1)) =$$

$$=\frac{27}{4n^3}\left(4n.\sum_{i=1}^{n}(2i-1)-\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2\right)\underset{\text{por 1) y 2)}}{=}$$

$$=\frac{27}{4n^3}\left(4n.n^2-\frac{n(4n^2-1)}{3}\right)=$$

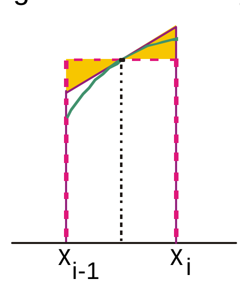
$$=\frac{72n^2+9}{4n^2}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow \quad 2.S(n) = \frac{72n^2+9}{2n^2} \qquad \boxed{2.S(n) = 36+\frac{9}{2n^2}}$$

Las cotas que obtenemos en este caso para n = 3, n = 10 y n = 1000 son 36.5, 36,045 y 36,000005 respectivamente.

Estas cotas son por exceso ya que para cada sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de [a,b] se cumple que el área del rectángulo cuya altura es la ordenada del punto medio es igual a la del trapecio determinado por la tangente a la gráfica en el punto medio, que está por encima de la gráfica por ser de concavidad negativa, y tres lados del rectángulo anterior. Esto se debe a que los triángulos en amarillo que se observan en la figura son congruentes ya que tienen congruentes un lado y los tres ángulos.



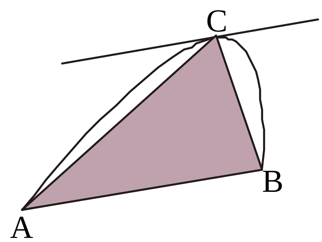
Si pasamos al límite obtenemos:

$$\lim_{n\to+\infty} 36+\frac{9}{2n^2}=36$$

✘ *Estrategia 4*

Método de Arquímedes

Como ya se explicó y se demostró en el Capítulo I, componente epistemológica, y en el Anexo I, Arquímedes encuentra el área de un segmento de parábola dividiéndolo en una serie de triángulos que agotan el área del segmento en el sentido que el área de la región no cubierta por los triángulos se puede hacer “tan pequeña como se quiera.”



Él prueba que el área de la sección parabólica es 4/3 el área del triángulo ABC, siendo C el punto de contacto de la tangente a la parábola paralela a la cuerda AB.

En nuestro caso el triángulo a considerar es el de vértices A(0,0), B(6,0) y C(3,9).

$$Á\left(\overset{\Delta}{ABC}\right)=\frac{6.9}{2}=27 \quad \Rightarrow \quad Á(sp(ABC)) = \frac{4}{3}.27=36$$

Las estrategias 5 y 6, inspiradas en el trabajo de Antonio Anzalone (2001), que desarrollaremos a continuación incluyen el uso de tangentes a la gráfica de la función y la estrategia de compensación de áreas.
Hemos decidido incluirlas en esta sección ya que algunos de los estudiantes trabajaron en este sentido.
Creemos que el trazado de tangentes dio a los estudiantes, a la hora de dividir la región en figuras conocidas por ellos, una sensación de mejor aproximación al área buscada.
En cuanto a la estimación visual pensamos que algunos estudiantes buscaron mediante trazados auxiliares (en los que incluimos a las tangentes) reconocer figuras geométricas bien conocidas por ellos que les resultaron equivalentes a las de la región en cuestión o a parte de ella.

✘ *Estrategia 5*

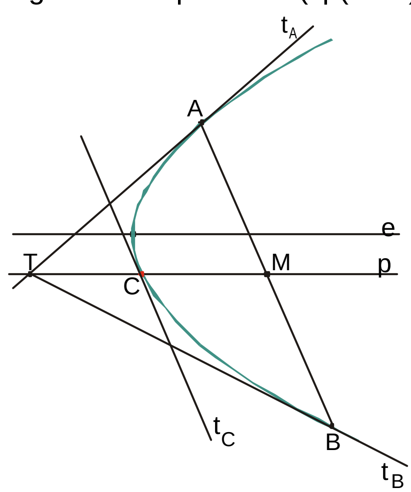
Sea un segmento de parábola de cuerda AB y el punto C de la parábola tal que la tangente a la misma es paralela a la cuerda AB.
Se trazan por A y por B las tangentes a la parábola (t_A) y (t_B) respectivamente
Sea (p) la recta paralela al eje de la parábola que pasa por C.

$(p) \cap (AB) = \{M\}$
$(p) \cap (t_A) = \{T_A\}$
$(p) \cap (t_B) = \{T_B\}$

Por propiedad 2 de Arquímedes[18] sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\text{i) C es punto medio del segmento } MT_A \\ \\ \text{ii) C es punto medio del segmento } MT_B\end{array}\right\} \Rightarrow T_A \equiv T_B{}^{19}$$

Se demostrará que el área del segmento de parábola (sp(ABC)) es igual a 2/3 del área del triángulo ATB.



$$\left.\begin{array}{l}\acute{A}(sp(ABC)) \;=\; \dfrac{4}{3}\acute{A}\left(\overset{\Delta}{ABC}\right) \\ \\ \text{C punto medio del segmento MT} \Rightarrow \acute{A}\left(\overset{\Delta}{ABC}\right) = \dfrac{1}{2}\acute{A}\left(\overset{\Delta}{ATB}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\acute{A}(sp(ABC)) \;=\; \dfrac{2}{3}\acute{A}\left(\overset{\Delta}{ATB}\right)}$$

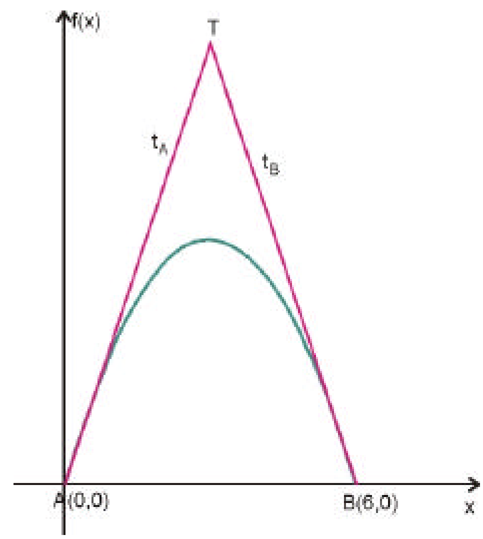
Para el caso que nos ocupa tendríamos:

---

[18] Ver Anexo I
[19] A este punto lo nombraremos T.

$$\left.\begin{array}{l} (t_A)\ y = 6x \\ (t_B)\ y = -6(x-6) \\ (t_A) \cap (t_B) = \{\ T\ \} \end{array}\right\} \Rightarrow T\ (3,18)$$

$$\left.\begin{array}{l} Á\left(\overset{\Delta}{ATB}\right) = \dfrac{6.18}{2} = 54 \\ Á(sp(ABC)) = \dfrac{2}{3} Á\left(\overset{\Delta}{ATB}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

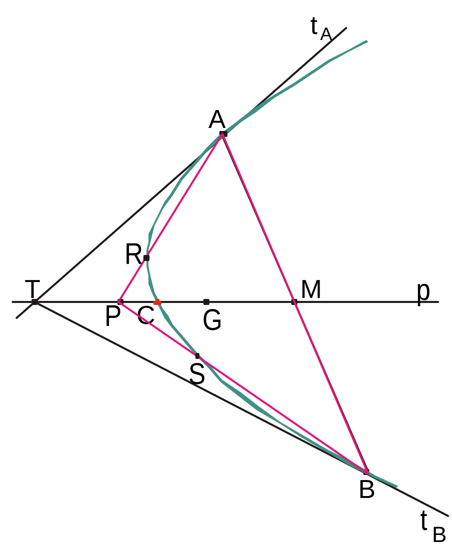


$$\Rightarrow\ Á(sp(ABC)) = \frac{2}{3}.54 = 36$$

✖ *Estrategia 6*

Sea G el baricentro del triángulo ABT y P el punto medio del segmento GT. Demostraremos que el área del segmento de parábola sp(ABC) es igual al área del triángulo ABP.

$$MG \underset{\text{G baricentro de } \overset{\Delta}{ABT}}{=} \frac{1}{3} MT \quad (1)$$



$$MP \underset{\text{P pto. medio de GT}}{=} \frac{2}{3} MT \quad (2)$$

$$Á(\overset{\Delta}{ABP}) = Á(\overset{\Delta}{AMP}) + Á(\overset{\Delta}{BMP}) =$$

$$= \frac{1}{2}.MP.d(A, MC) + \frac{1}{2}.\ MP.d(B, MC) \underset{\text{por (2)}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{2}{3} MT.\ d(A, MC) + \frac{1}{2}.\frac{2}{3} MT\ .d(B, MC) =$$

$$= \frac{2}{3}.\left(\frac{1}{2}.MT.\ d(A, MC) + \frac{1}{2}.MT\ .d(B, MC)\right) =$$

$$= \frac{2}{3}.\left(\acute{A}(\overset{\Delta}{ATM}) + \acute{A}(\overset{\Delta}{BTM})\right) =$$

$$= \frac{2}{3}.\acute{A}(\overset{\Delta}{ABT}) \underset{\text{por (A)}}{=} \acute{A}(sp(ABC)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\acute{A}(\overset{\Delta}{ABP}) = \acute{A}(sp(ABC))}$$

Apliquemos el resultado anterior a nuestra parábola.

Sea G el baricentro del triángulo ATB.
G pertenece a la recta de ecuación x = 3

$$GM \underset{\text{prop. baricentro}}{=} \frac{1}{3}TM,$$ M el punto medio del segmento AB.

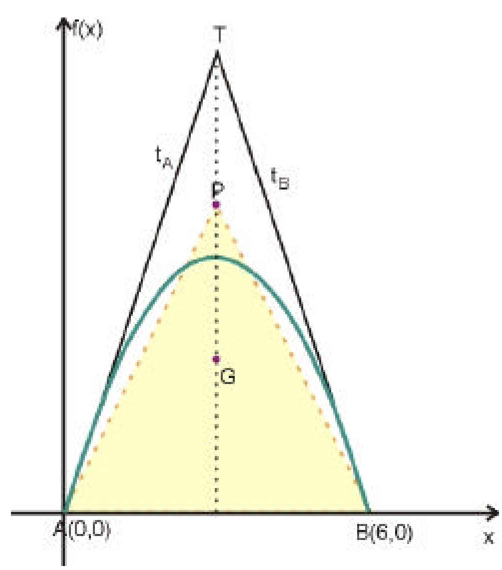
De lo anterior deducimos que las coordenadas de G son (3, 6).

Sea P punto medio del segmento TG.

$$\left.\begin{array}{l} T(3, 18) \\ G(3, 6) \end{array}\right\} \Rightarrow P(3, 12)$$

$$\left.\begin{array}{l} \acute{A}(\overset{\Delta}{ABP}) = \dfrac{6.12}{2} = 36 \\ \acute{A}(\overset{\Delta}{ABP}) = \acute{A}(sp(ABC)) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\acute{A}(sp(ABC)) = 36}$$



III.2.2. Cálculo del área del segmento de hipérbola

f: $R^* \to R$ / f: f(x) = $\dfrac{6}{x}$

Nuevamente utilizaremos a la integral definida para realizar el cálculo del área bajo la hipérbola.

$$\int_1^6 \frac{6}{x}.dx = 6\int_1^6 \frac{1}{x}.dx = \left[6.L(x)\right]_1^6 = 6L(6) - 6.L(1) = 6.L(6) \cong 10.75$$

Como ya se dijo los estudiantes no cuentan con esta herramienta por lo que procederemos a realizar el cálculo con otros procedimientos.

✘ *Estrategia 1*

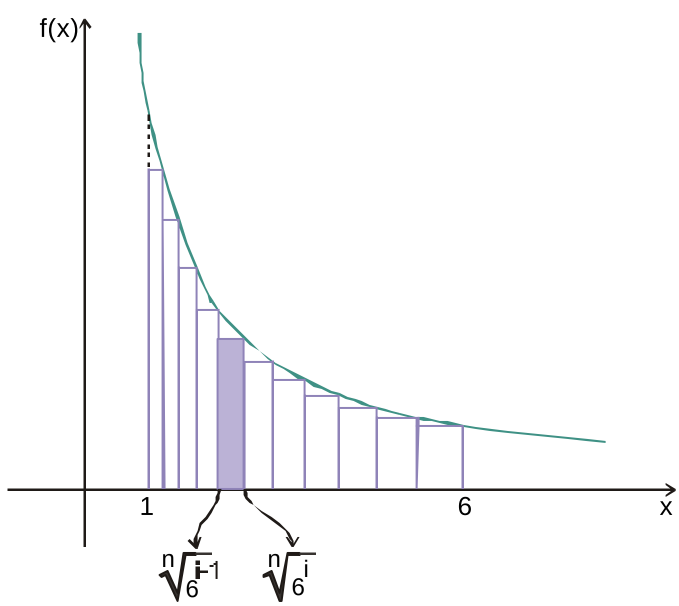
Método Rectangular

Trabajaremos con aproximaciones por defecto y por exceso aunque pensamos que los estudiantes, al trabajar con esta figura, lo harán mayoritariamente por exceso.

Tomaremos en el intervalo [1,6] una partición de modo que los puntos que la componen estén en progresión geométrica.

$$P_{[1,6]} = \left\{1 = \sqrt[n]{6^0}, \sqrt[n]{6}, \sqrt[n]{6^2}, ...\sqrt[n]{6^{n-1}}, \sqrt[n]{6^n} = 6\right\}$$

Sumas inferiores



s(n) =

$$\left(\sqrt[n]{6}-1\right).f\left(\sqrt[n]{6}\right)+\left(\sqrt[n]{6^2}-\sqrt[n]{6}\right).f\left(\sqrt[n]{6^2}\right)+\ldots+\left(\sqrt[n]{6^i}-\sqrt[n]{6^{i-1}}\right).f\left(\sqrt[n]{6^i}\right)+\ldots+\left(\sqrt[n]{6^n}-\sqrt[n]{6^{n-1}}\right).f(6)$$

$$s(n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[n]{6^{i}} - \sqrt[n]{6^{i-1}}\right).f\left(\sqrt[n]{6^{i}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sqrt[n]{6^{i-1}}\left(\sqrt[n]{6}-1\right).\frac{6}{\sqrt[n]{6^{i}}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[n]{6}-1\right).\frac{6}{\sqrt[n]{6}} =$$

$$= \left(\sqrt[n]{6}-1\right).\frac{6}{\sqrt[n]{6}}.n \;\Rightarrow\; \boxed{s(n) = \frac{6.n.\left(\sqrt[n]{6}-1\right)}{\sqrt[n]{6}}}$$

Sumas superiores

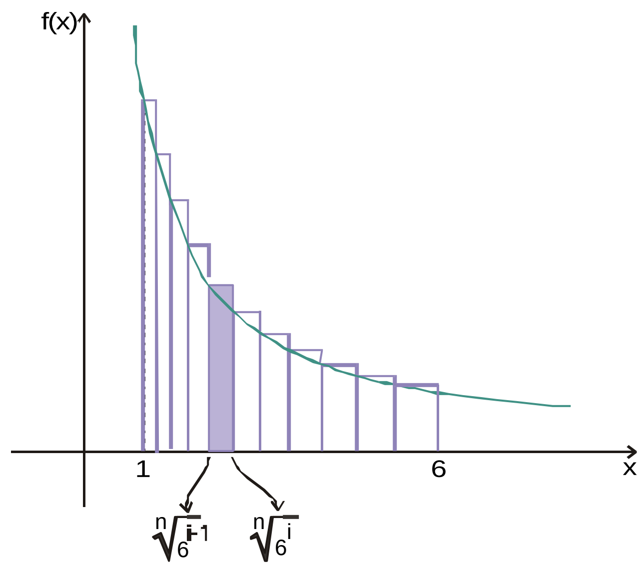
$$S(n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[n]{6^{i}} - \sqrt[n]{6^{i-1}}\right).f\left(\sqrt[n]{6^{i-1}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sqrt[n]{6^{i-1}}\left(\sqrt[n]{6}-1\right).\frac{6}{\sqrt[n]{6^{i-1}}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[n]{6}-1\right).6 =$$

$$= \left(\sqrt[n]{6}-1\right)6.n \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S(n) = 6.n.\left(\sqrt[n]{6}-1\right)}$$



Sabemos que el área buscada está comprendida entre s y S, es decir que:

$$s(n) \le Á \le S(n) \;\Rightarrow\; \frac{6.n.\left(\sqrt[n]{6}-1\right)}{\sqrt[n]{6}} \le Á \le 6.n.\left(\sqrt[n]{6}-1\right)$$

Hallemos algunas cotas inferiores y superiores:
Para n = 3 obtenemos:

$8{,}0942.... \le Á \le 14{,}7081....$

Para n = 10 obtenemos:

$9{,}8424.... \le Á \le 11{,}7738....$

Para n = 1000 obtenemos:

$10{,}7409.... \leq Á \leq 10{,}7601....$

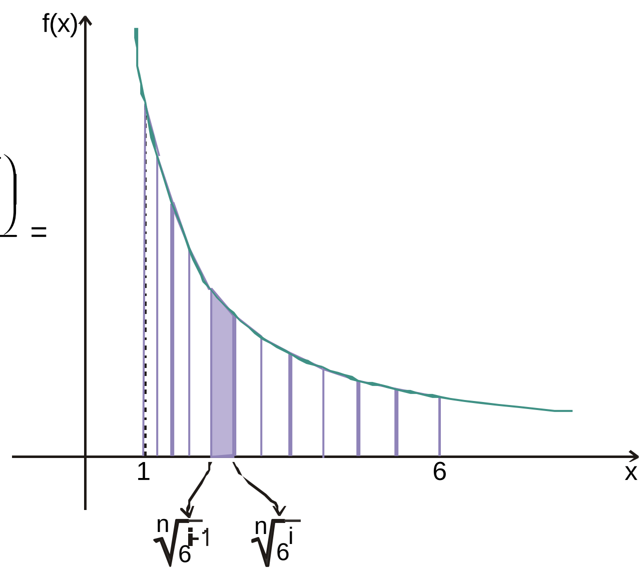
Si pasamos al límite obtenemos:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6.n.\underbrace{\left(\sqrt[n]{6}-1\right)}_{\approx \frac{1}{n}.L(6)}}{\sqrt[n]{6}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6.n.\frac{L(6)}{n}}{\underbrace{\sqrt[n]{6}}_{1}} = 6.L(6)$$

$$\lim_{n\to+\infty} 6.n.\underbrace{\left(\sqrt[n]{6}-1\right)}_{\approx \frac{1}{n}.L(6)} = 6.L(6)$$

Estrategia 2

Método Trapezoidal



$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left[f\left(\sqrt[n]{6^{i-1}}\right)+f\left(\sqrt[n]{6^{i}}\right)\right].\left(\sqrt[n]{6^{i}}-\sqrt[n]{6^{i-1}}\right)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{6}{\sqrt[n]{6^{i-1}}}+\frac{6}{\sqrt[n]{6^{i}}}\right)\sqrt[n]{6^{i-1}}\left(\sqrt[n]{6}-1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}.6.\left(\sqrt[n]{6}-1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt[n]{6}+1}{\sqrt[n]{6^{i}}}\right)\sqrt[n]{6^{i-1}} =$$

$$= 3.\left(\sqrt[n]{6}-1\right).\left(\sqrt[n]{6}+1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt[n]{6^{i-1}}}{\sqrt[n]{6^{i}}}\right) =$$

$$= 3.\left(\sqrt[n]{6^{2}}-1\right).\frac{n}{\sqrt[n]{6}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S(n) = \frac{3n.\left(\sqrt[n]{6^{2}}-1\right)}{\sqrt[n]{6}}}$$

Las aproximaciones que encontramos por este método son por exceso ya que la concavidad de la función es positiva y nuevamente se trata del promedio entre las sumas inferiores y superiores del método rectangular lo que nos permite mejorar las cotas obtenidas para n = 3, 10 y 1000.

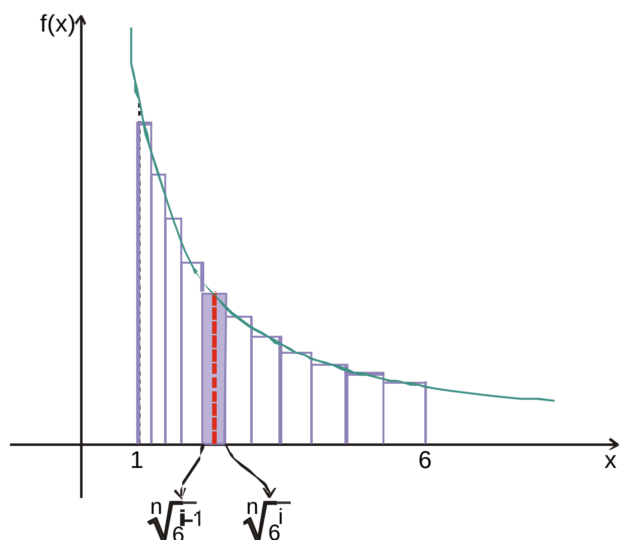
Las cotas superiores que obtenemos son 11,4011..., 10,8081... y 10,7505... para los valores de n, 3, 10 y 1000 respectivamente.

Si pasamos al límite obtenemos:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n.\overbrace{\left(\sqrt[n]{6^2}-1\right)}^{\approx \frac{2}{n}.L(6)}}{\underbrace{\sqrt[n]{6}}_{1}} = 6.L(6)$$

Estrategia 3

Método de la ordenada del punto medio



$$S(n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[n]{6^i}-\sqrt[n]{6^{i-1}}\right)f\left(\frac{\sqrt[n]{6^{i-1}}+\sqrt[n]{6^i}}{2}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sqrt[n]{6^{i-1}}\left(\sqrt[n]{6}-1\right)\frac{6}{\sqrt[n]{6^{i-1}}+\sqrt[n]{6^i}}.2 =$$

$$= 12.\left(\sqrt[n]{6}-1\right)\sum_{i=1}^{n}\sqrt[n]{6^{i-1}}.\frac{1}{\sqrt[n]{6^{i-1}}\left(1+\sqrt[n]{6}\right)} =$$

$$= 12.\left(\sqrt[n]{6}-1\right).\frac{n}{\left(1+\sqrt[n]{6}\right)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{S(n) = \frac{12.n.\left(\sqrt[n]{6}-1\right)}{\left(1+\sqrt[n]{6}\right)}}$$

Las cotas que obtenemos en este caso para n = 3, n = 10 y n = 1000 son 10,4419..., 10,7218... y 10,7505... respectivamente.
Realizando un razonamiento análogo al hecho anteriormente con una función monótona de concavidad positiva llegaremos a que estas aproximaciones son por defecto.

Si pasamos al límite obtenemos:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{12.n.\overbrace{\left(\sqrt[n]{6}-1\right)}^{\approx \frac{1}{n}.L(6)}}{\left(1+\underbrace{\sqrt[n]{6}}_{1}\right)} = 6.L(6)$$

✖ *Estrategia 4*

Método de Saint-Vicent

Repasemos los resultados obtenidos por Saint-Vicent y de Sarasa (En Durán, 1996) acerca de la cuadratura de la hipérbola, de acuerdo a lo analizado en el Capítulo I:

Dada la hipérbola de ecuación x.y = 1, un intervalo $[a,b] \subset (1, +\infty)$, una partición $P_{[a,b]}$. Llamaremos S(a,b) a la suma de las áreas de los rectángulos que dicha partición determina y A(a,b) al área encerrada por la curva, el eje Ox y las rectas de ecuación x = a y x = b.

Saint-Vicent prueba que $S(k.a,k.b) = S(a,b) \ \ \forall\, k \in R^{+}$ (1) y como:

si consideramos una subdivisión infinita de rectángulos con base infinitamente pequeña, la norma de la partición tiende a 0 y se cumple que: $S(a,b) \to A(a,b)$ y $S(k.a,k.b) \to A(k.a,k.b)$ y obtenemos como resultado:

$$A(a,b) = A(ka,kb), \ \ \forall\, k \in R^{+}.$$

Trabajemos ahora con nuestra función $f{:}R^{*} \to R \ / \ f{:}\ f(x) = \dfrac{6}{x}$ y la partición

$$P_{[1,6]} = \left\{1 = \sqrt[n]{6^0}, \sqrt[n]{6}, \sqrt[n]{6^2}, \ldots\ldots\ldots \sqrt[n]{6^{n-1}}, \sqrt[n]{6^n} = 6\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
s(n) = s\left(1,\sqrt[n]{6}\right) + s\left(\sqrt[n]{6},\sqrt[n]{6^2}\right) + \ldots\ldots + s\left(\sqrt[n]{6^{i-1}},\sqrt[n]{6^i}\right) + \ldots\ldots. + s\left(\sqrt[n]{6^{n-1}},6\right) \\[2ex]
\text{Por (1) sabemos que:} \\
s\left(1,\sqrt[n]{6}\right) = s\left(\sqrt[n]{6},\sqrt[n]{6^2}\right) = \ldots. = s\left(\sqrt[n]{6^{i-1}},\sqrt[n]{6^i}\right) = \ldots. = s\left(\sqrt[n]{6^{n-1}},6\right)
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(n) = n.\ s\left(1,\sqrt[n]{6}\right) =$$

$$= n.\ \left(\sqrt[n]{6}-1\right) f\left(\sqrt[n]{6}\right) =$$

$$= n.\left(\sqrt[n]{6}-1\right)\frac{6}{\sqrt[n]{6}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s(n) = \frac{6n.\left(\sqrt[n]{6}-1\right)}{\sqrt[n]{6}}}$$

resultado que coincide con la expresión obtenida para las sumas inferiores del método rectangular, como era de esperar.

III.3. POBLACIÓN ENTREVISTADA

Se entrevistó a 35 estudiantes de tercer año de Bachillerato Diversificado opciones Arquitectura e Ingeniería. Estas dos opciones provienen de un mismo tronco, de segundo año de Bachillerato orientación Científica[20]. Esto significa que todos los estudiantes entrevistados tuvieron los mismos cursos previos de matemática.
En cuanto al tercer año de Bachillerato en ambas opciones abordan, en general, los mismos temas pero con diferencias en el enfoque, la profundidad, la carga dentro del currículo. En la opción Ingeniería los temas se distribuyen en tres materias separadas denominadas Matemática A, B y C respectivamente, con una carga horaria total de 17 clases semanales. En la opción Arquitectura todos los temas se engloban en una sola materia con una carga horaria de 6 clases semanales. Estas diferencias se pueden ver en el Anexo III, en donde figuran los programas de matemática vigentes hasta el momento, de todas las orientaciones y opciones. En ambos cursos no figura el tema que nos ocupa, es decir que los estudiantes entrevistados no deberían conocer técnicas de cálculo de áreas bajo una curva, métodos de integración, etc., ni deberían haber escuchado términos como aproximaciones por exceso, por defecto, ni método de exhaución o similares. La excepción la conforman los cinco estudiantes del Liceo Cuidad de San Felipe que, en el curso de informática que forma parte de su currículo, realizaron un trabajo vinculado con el tema que se detalla más adelante. Los resultados de este grupo se analizarán más adelante en detalle.

Los estudiantes seleccionados realizan sus cursos en liceos estatales y liceos privados según el siguiente detalle:

- Liceos del Estado:
  Liceo N° 2, Instituto Héctor Miranda: 17 estudiantes
  Liceo N° 4, Juan Zorrilla de San Martín: 2 estudiantes[21]
- Liceos privados:
  Cuidad de San Felipe: 5 estudiantes
  Instituto Ariel Hebreo Uruguayo: 7 estudiantes
  Liceo Latinoamericano: 4 estudiantes

Las edades de los estudiantes oscilan entre los 16 y 18 años. Hay dos estudiantes de 16 años, diez de 18 años y los restantes de 17 años.
Dieciséis de ellos son estudiantes de Bachillerato opción Arquitectura y diecinueve de opción Ingeniería.
Para un mejor manejo de la información, a cada estudiante se le asignó un número del 1 al 35.

---

[20] Los detalles de cómo funciona el Bachillerato en Uruguay figuran en el Anexo III.
[21] El número tan pequeño de estudiantes, en este caso, se debe al carácter voluntario de la prueba. En el caso de los liceos privados los grupos entrevistados constan de la cantidad de estudiantes que figura en el detalle.

En cada uno de los cinco grupos en los que se realizó la entrevista se trabajó en ambas propuestas.
La propuesta 1 fue trabajada por 18 estudiantes designados con los números:
3, 4, 6, 7, 8, 10, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 34, 35.
La propuesta 2 fue trabajada por 17 estudiantes designados con los números:
1, 2, 5, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 30, 31, 33.

Estudiantes del liceo Ciudad de San Felipe

Los 5 estudiantes señalados con los numerales 15, 21, 31, 32 y 33 que realizan sus estudios de Bachillerato opción Ingeniería en el instituto privado Ciudad de San Felipe conforman un grupo especial. Esto se debe a que en el curso de informática, que forma parte de su currículo, trabajaron con el tema que nos ocupa previamente a la realización de la entrevista.
Este trabajo fue planificado, en forma conjunta, por los docentes de informática y de matemática con el objetivo de que los estudiantes tuvieran una idea del tema cuando fuera abordado en la clase de matemática. Cabe aclarar que el tema no forma parte del programa respectivo de matemática, sino que la docente a cargo decidió que sería conveniente realizar en clase una aproximación al tema ya que consideró que les sería de utilidad para los cursos de nivel terciario.

La mecánica de trabajo fue la siguiente:

- Primero se les presenta una función cuya representación gráfica es una recta y se les pide que calculen el área bajo la misma en un intervalo en donde la función es positiva. La figura determinada es un trapecio y no se presenta ninguna dificultad en el cálculo del área de dicha región.
- Ahora trabajan con una función definida por zonas cuya representación gráfica es una poligonal en un intervalo en donde no es negativa. Los estudiantes dividen el intervalo de forma tal que las figuras que obtienen son bien conocidas por ellos a las que les calculan el área sin dificultad. En esta instancia el docente sugiere a los estudiantes que realicen una partición más fina y que vuelvan a calcular el área. Comparan los valores obtenidos y discuten qué sucedería si se sigue afinando la partición.
- Se les presenta ahora una función continua en un determinado intervalo y no negativa y se les pide que calculen el área usando la idea de realizar particiones sucesivas. El docente les presenta dos opciones de trabajo: con trapecios y con rectángulos. Los estudiantes realizan los cálculos con las distintas opciones y discuten sobre la conveniencia de una u otra opción. Al continuar afinando la partición ven que las diferencias entre ambas van disminuyendo. Trabajan en forma similar con otras funciones, siempre continuas y no negativas en los intervalos de trabajo.
- El trabajo final consiste en que construyan un algoritmo que les permita realizar los cálculos y que elaboren un programa con el mismo para aproximar el área de cualquier función en las condiciones ya indicadas.

Esta actividad sería retomada con posterioridad en la clase de matemática al introducir la definición de integral de Riemann.

En el momento de la realización de la prueba que nos ocupa ya habían terminado con las actividades antes mencionadas en el curso de informática. La instancia de formalización del concepto por parte de la docente de matemática se realizó con posterioridad a nuestra entrevista.

III.4. PUESTA EN ESCENA

El cuestionario fue propuesto en cuatro oportunidades. Todos los estudiantes fueron consultados previamente acerca de si estaban dispuestos a realizar la actividad, se les explicó para qué y porqué se hacía. Las instrucciones para la realización de la misma fueron que trabajaran en libertad, que usaran el material que quisieran (calculadora, regla, compás, manuales, etc.), que dejaran por escrito todas las ideas que les surgieran. Un aspecto que se consideró importante aclarar es que no estaban siendo evaluados, ni ellos ni sus docentes, con el propósito de disminuir en lo posible el stress que puede generar la realización de una prueba. En una primera instancia hubo buena disposición de parte de los 35 voluntarios para realizarla.

La primera se realizó el 16 de agosto de 2002 a los 7 estudiantes de Arquitectura del Instituto Ariel Hebreo Uruguayo en el local donde cursan y en el horario de la clase de matemática. La totalidad de la prueba les insumió una hora y quince minutos. En el salón de clase se encontraban, además de los estudiantes, el profesor del curso y la investigadora.

Al segundo grupo, 4 estudiantes de Arquitectura del Liceo Latinoamericano, se le aplicó la prueba fuera del local de estudios, en la casa de uno de sus docentes, el 17 de agosto de 2002. La voluntad de realizarla fue más explícita ya que tuvieron que concurrir especialmente al lugar donde se haría la prueba. Mostraron mucha disposición e interés en la misma. Incluso, luego de terminada la prueba se mostraron interesados en conocer los valores exactos de las áreas que se les pidió que calcularan, de cómo se realizaban esos cálculos, de si su desempeño había sido correcto. La prueba transcurrió en un ambiente agradable y distendido, cosa que no ocurrió con el primer grupo. El tiempo utilizado fue de 2 horas y se encontraban presentes el docente mencionado y la investigadora.

El tercer grupo estuvo formado por los 2 estudiantes del Liceo N° 4, Juan Zorrilla de San Martín y los 17 estudiantes del Liceo N° 2, Instituto Héctor Miranda y se realizó en el local de este último el 21 de octubre de 2002. Los 19 eran estudiantes de Arquitectura e Ingeniería según el detalle que figura más arriba. La prueba se realizó fuera del horario de clase, lo que muestra un interés explícito de los mismos de participar en la actividad.

El último grupo fue el de los 5 estudiantes de Ingeniería del Liceo Ciudad de San Felipe. La prueba fue propuesta en el propio instituto, en el horario de uno de sus cursos de matemática y se encontraban presentes el docente del curso y la investigadora. La prueba se realizó el 23 de octubre de 2002 en un ambiente distendido y cordial e insumió 1 hora 45 minutos.

En cuanto a la prueba en sí, no se impuso límite de tiempo dejando que cada uno decidiera cuando finalizaría su trabajo.
Las tres actividades de cada una de las dos propuestas fueron entregadas por separado a cada alumno, teniendo acceso a la actividad siguiente una vez que el

estudiante consideraba finalizada la tarea anterior. Esto permitió que cada estudiante trabajara con tranquilidad y que manejara sus propios tiempos.
El papel del entrevistador consistió en ser un mero observador y organizador de la situación pero manteniéndose al margen del funcionamiento de la misma.

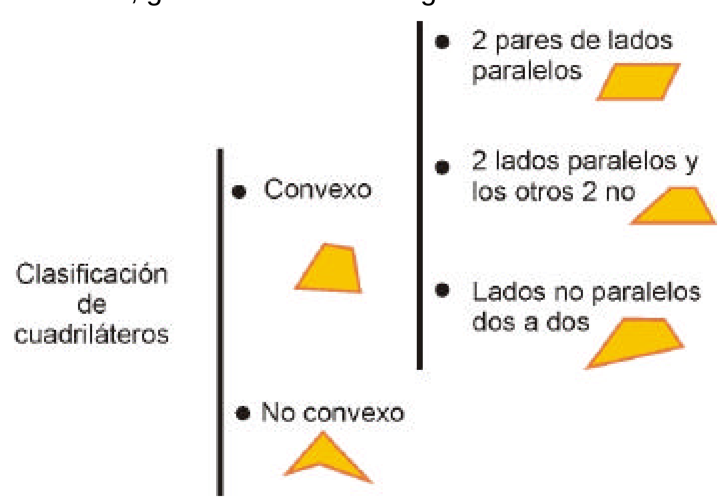
III.5. ANÁLISIS DE DATOS

III.5.1. Metodología

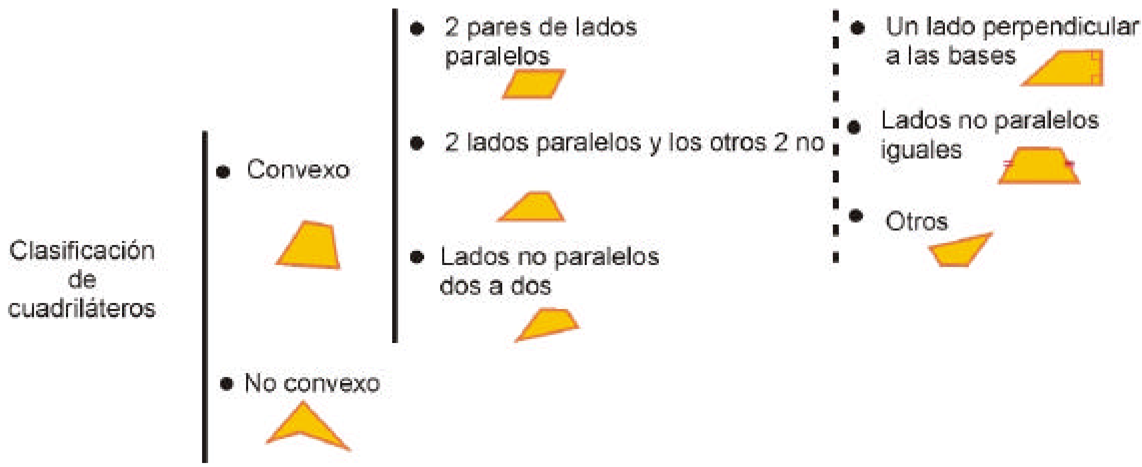
Para el análisis de los datos cualitativos obtenidos se ha elegido el uso de las redes sistémicas. Estas pueden ser vistas como un medio de divulgar los datos recogidos en forma categorizada. Esta categorización es entendida como una forma de etiquetar los datos, encasillarlos, darles nombres, reconocer que estas distinciones pueden ser dibujadas a lo largo de varias dimensiones independientes que involucren un solo nivel o que pueden necesitar divisiones sucesivas, es decir que una categoría puede ser subdividida en otras categorías. Esto dependerá de los objetivos trazados a la hora del análisis de datos. Una red sistémica es como un mapa del conjunto de categorías que se han seleccionado para usar, que nos muestran cómo se relacionan unas con otras. (Bliss, Monk y Ogborn, 1983).

Para entender bien los datos y sus interrelaciones presentados en cada red presentaremos a continuación la notación y terminología que se usará acompañada, cuando se crea necesario, de ejemplos. Mencionaremos únicamente aquellas que se utilizarán en el presente trabajo.

- Se usarán barras verticales para vincular una categoría principal seleccionada (colocada a la izquierda de la barra) con las subcategorías asociadas (colocadas a la derecha de la barra, una debajo de otra). Las subcategorías de cada sistema deberán ser disjuntas entre sí lo que ayudará a definirlas entre sí por contraste. El número de subcategorías a la derecha de la barra dependerá de la naturaleza del material que está siendo analizado y del conocimiento del analista, teorías o sentimientos acerca de lo que tendría más sentido. Las barras se podrán utilizar en forma sucesiva todas las veces que se considere necesario. Es decir que cada subcategoría puede ser a su vez subdividida ampliando el sistema, generando así un diagrama de árbol.
  Ejemplo:



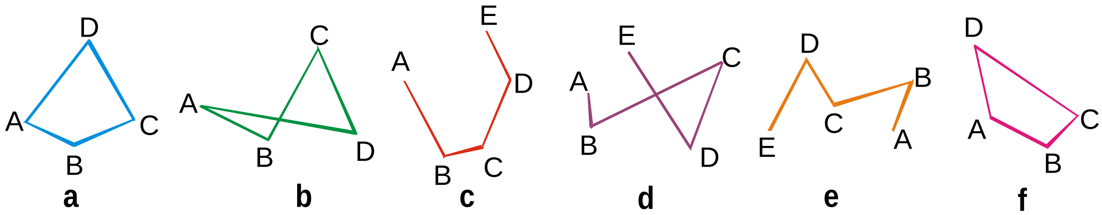
- Aunque no está previsto en el texto de Bliss, Monk y Ogborn (1983), en el presente trabajo se hará uso de una segunda notación asociada a las barras verticales. Cuando, al final del análisis de los distintos ítems de la propuesta se presenta una red resumen, se utilizará una barra vertical punteada para indicar que se está agregando alguna subdivisión, que no aparecía en la red pero que el analista considera destacable a los efectos de la investigación. Una ampliación de la red del ejemplo anterior puede ilustrar el uso de las barras verticales punteadas.
  Utilizando el ejemplo anterior se ilustra esta nueva convención.



- Llamaremos sistema al conjunto formado por una categoría y todas las subcategorías vinculadas entre sí por las barras verticales. A cada una de estas subcategorías las denominaremos términos.
  A medida que se pasa de una rama a otra del árbol las distinciones se hacen cada vez más refinadas. Llamaremos refinamiento al pasaje de cada sistema al siguiente. De igual forma, si nos movemos hacia atrás en el árbol pasamos de niveles más refinados a niveles cada vez menos refinados.
  A las categorías de una red determinada que no se le pueda aplicar un refinamiento las llamaremos categorías terminales.
  Por ejemplo en la red anterior será terminal, por ejemplo, la categoría “No convexo”. No lo es la categoría “Convexo”.

- Se usará una llave, en lugar de una barra vertical, para indicar que la categoría que aparece a la izquierda permite distinciones según diferentes enfoques o aspectos de un hecho que es necesario que sean descriptos, los que aparecerán indicados a la derecha de la llave uno debajo de otro.
  Es decir que esta notación nos está diciendo que todas las opciones que aparecen en el sistema pueden ocurrir simultáneamente. Los términos o sistemas que aparecen a continuación de una llave son análogos a las diferentes dimensiones de una tabla de doble entrada.

  Ejemplo: Clasificar las siguientes poligonales según tengan lados que se corten y/o según el número de vértices que las determinan.



Clasificación de las poligonales

• Cruzada y 5 vértices	⊣	d
• Cruzada y 4 vértices	⊣	b
• No cruzada y 5 vértices	⊣	c, e
• No cruzada y 4 vértices	⊣	a, f

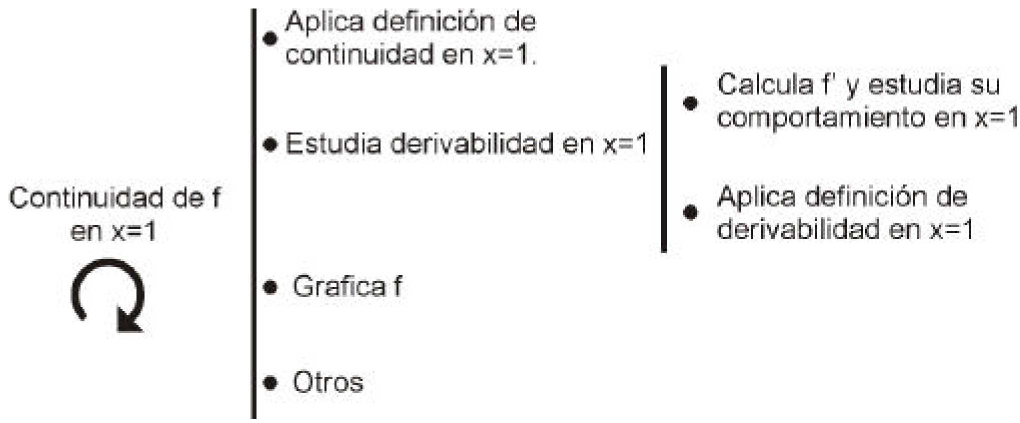
Clasificación de las poligonales {

- Según tengan lados que se cortan
  - Cruzadas ⊣ b, d
  - No cruzadas ⊣ a, c, e, f
- Según el número de vértices que la determinan
  - 4 vértices ⊣ a, b, f
  - 5 vértices ⊣ c, d, e

El uso de barras indica categorías mutuamente independientes mientras que el uso de llaves indica necesariamente una co-selección.
La elección entre el uso de una u otra configuración depende de los objetivos que persiga el analista.

- Existen casos en donde es más económico permitir selecciones repetidas en parte o en la totalidad de una red. A esto le llamaremos <u>recursión</u> y el símbolo que se usará para indicarlo será una flecha circular. Entonces, cuando en una red de categorías vinculadas por barras aparezca el símbolo de recursión, se deberá entender la existencia de algún dato en más de una categoría terminal. El símbolo de recursión puede ser usado tanto con la configuración de barras como con la de llaves.
  La recursión en un sistema de barras puede ser fácilmente confundido con el usos de una llave simple. La diferencia radica en que la recursión expresa la idea de que categorías comunes excluyentes pueden, en algunos casos, ser aplicadas en forma combinada y la llave nos está indicando que hay varios aspectos de un hecho que necesitan ser descriptos.

Ejemplo: Dada la función f: R → R / $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x \geq 1 \\ -x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$. Investiga si f es continua en x=1.



Si un estudiante aplica la definición de continuidad y verifica realizando la gráfica de la función f, sería de interés que figure en las subcategorías primera y tercera de la red, pero como éstas deben ser excluyentes no se podría hacer. Para poder hacer la clasificación en la forma deseada se agregará el símbolo de recursión al comienzo.

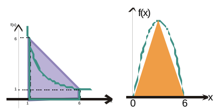
III.5.2. Algunos comentarios para una mejor interpretación de las redes que se presentarán.

Una vez efectuadas las pruebas a los 35 estudiantes se procedió a la lectura de las respuestas de éstos, y se procedió, para cada uno de los ítems, a la selección de las diferentes categorías principales. Éstas fueron elegidas en base a su alta frecuencia y/o su interés con respecto a los objetivos de la presente investigación. A su vez algunas de las categorías fueron divididas en subcategorías con el objetivo de mostrar distintos aspectos de la categoría principal.

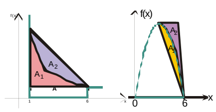
En todos los ítems que requerían del estudiante un trabajo de cálculo fue necesario utilizar el símbolo de recursión ya que un número considerable de estudiantes o trabajó en más de una idea para el cálculo del área o llegó a más de un valor por caminos diferentes. Esto no quita que en alguno de los demás ítems también haya sido necesario el uso del mismo.

Se presentará, en primera instancia redes sistémicas para cada uno de los seis ítems de cada propuesta. A la derecha de cada categoría terminal aparecerán los números que identifican a cada uno de los estudiantes que se considere que su respuesta está comprendida dentro de la misma. Estos números identificativos van del 1 al 35 de acuerdo a lo detallado anteriormente. En los casos que se considere necesario, aparecerá a la derecha de estos números una llamada que corresponde a comentarios o aclaraciones acerca de la respuesta, de actitudes frente a la misma u otra aclaración que se considere importante. Para finalizar se presentará una red resumen en donde, debajo de cada categoría y subcategoría aparecerá, entre paréntesis, la frecuencia de las respuestas incluidas en la misma.

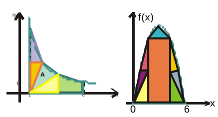
Para las actividades 1) a), 2) a) y 3) a) de cada propuesta se usarán íconos que representan las diferentes estrategias de aproximación o acotación usadas por los estudiantes de acuerdo al siguiente detalle:



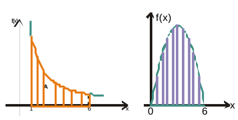
Acota por exceso con trapecio y por defecto con triángulo respectivamente.



Aproxima el área mediante estimación visual, comparando el área de la región en cuestión con la de una figura de la cual conoce cómo calcular su área.
Éstos íconos fueron elegidos ya que fueron usados por algunos de los estudiantes y consideramos que representan la presente categoría.



Divide a la región en figuras conocidas de las que conoce cómo calcularles el área.



Usa partición sobre alguno de los ejes. En esta categoría los estudiantes también dividen a la región en figuras conocidas. Hemos decidido diferenciarla de la anterior debido a que es la estrategia que mejor se adecua a la teoría matemática.

También se presentarán redes en donde están incluidas las estrategias de los 35 estudiantes referentes a los ítems que tienen en común (por ejemplo el cálculo del área de la sección parabólica o las explicaciones acerca de los procesos para encontrar mejores aproximaciones). Dichas estrategias, en general, superan en cantidad el número de estudiantes encuestados ya que para una misma actividad, algunos de ellos usaron más de una estrategia.

IV. LOS RESULTADOS

El presente capítulo lo hemos estructurado de la siguiente manera:

Se presentarán primero las seis redes correspondientes al vaciado de datos recogidos en relación a la Propuesta 1[22], en donde se trabaja en una primera instancia con el cálculo del área bajo la gráfica de la función f: $R^* \rightarrow R$ / $f(x) = 6/x$ (Actividades 1 y 2) y luego con el cálculo del área bajo la gráfica de la función f: $R \rightarrow R$ / $f(x) = x(6-x)$ (Actividad 3).
A continuación se hace lo propio con las redes correspondientes a la Propuesta 2 en donde se invierte el orden y se trabaja primero con la parábola y luego con la hipérbola.

Luego de la presentación de las redes se hace un análisis global de las respuestas buscando extraer las primeras reflexiones, presentando diferentes categorías de respuestas en un intento de comenzar a dar respuesta a nuestra pregunta de investigación.

Presentamos además un análisis de casos correspondientes a cada una de las categorías que representan las diferentes estrategias trabajadas por los estudiantes.

Para finalizar presentamos un análisis de los resultados a la luz de las consideraciones teóricas, confrontando los resultados obtenidos con los esperados en el análisis a priori que realizamos en el Capítulo III.

IV.1. RESULTADOS INMEDIATOS

De la lectura de las respuestas de los estudiantes a los diferentes ítems propuestos se detectaron y seleccionaron algunas categorías para agrupar las respuestas. Esta selección fue hecha en base a la frecuencia de las respuestas y al interés de acuerdo a los objetivos de esta investigación. Queremos aclarar que en un análisis inicial se detectaron dos estrategias fundamentales que son la división de la región en figuras que les son familiares a los estudiantes y de las que tienen herramientas para determinar sus áreas y lo que hemos denominado "estimación visual" que consiste en la determinación de figuras familiares que los estudiantes consideran equivalentes a la región que analizan. Dentro de la primera estrategia distinguimos tres sub-estrategias, que junto a la estimación visual conforman las cuatro estrategias en las que basaremos nuestro análisis. Estas categorías responden, como ya se mencionó en el Capítulo III, a las diferentes estrategias de aproximación o acotación utilizadas por los estudiantes y estarán representadas por íconos, los que fueron creados en base a algunos de los diagramas hechos por los propios estudiantes en la realización de la prueba. La explicación de lo que representa cada ícono, así como los detalles que permitirán la lectura de las redes que se presentarán a continuación, figuran al final del capítulo anterior.

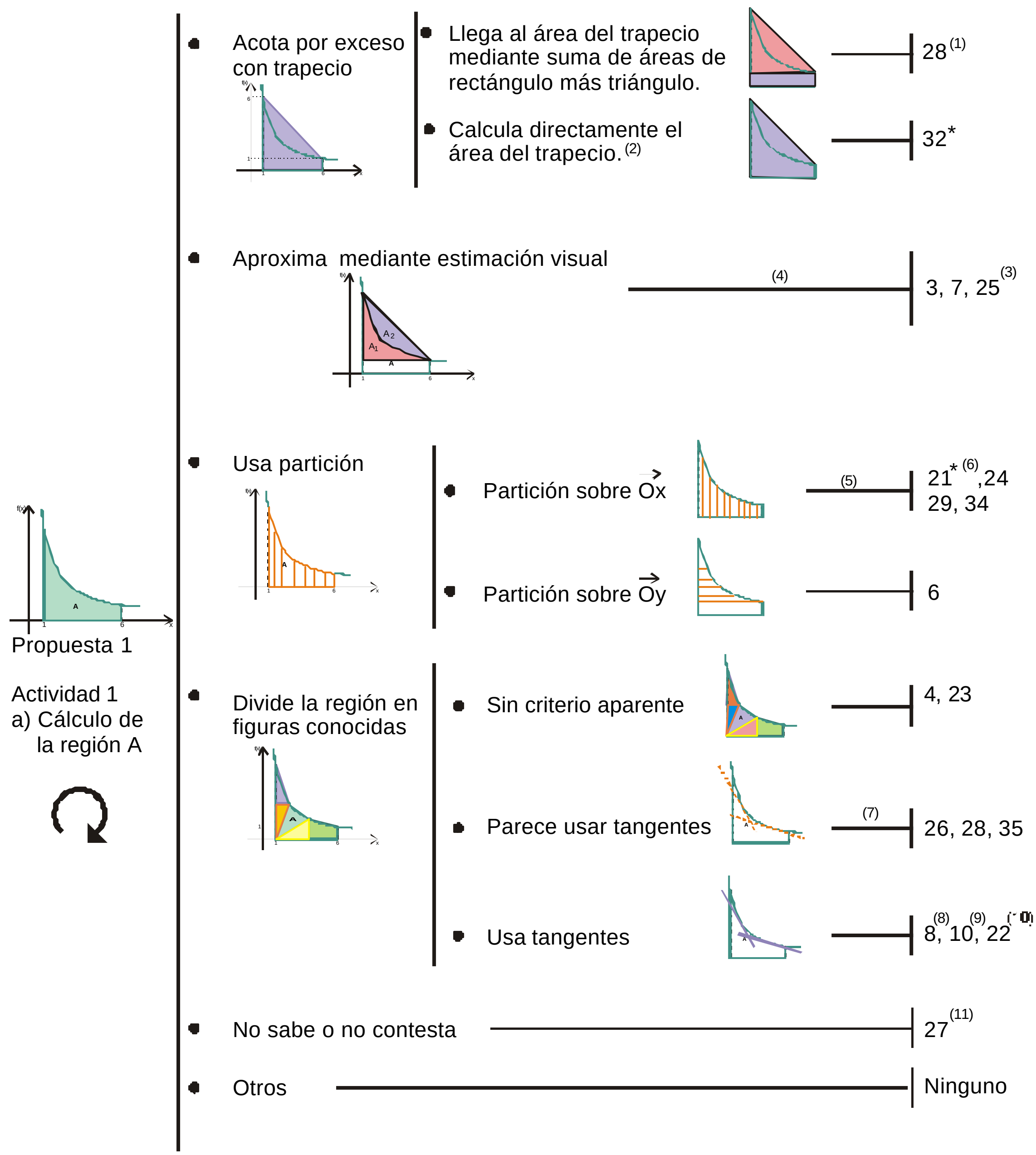
A continuación presentaremos las redes correspondientes a los seis ítems de cada propuesta en donde figuran, a la derecha, los números que corresponden a los

[22] Esta propuesta así como la Propuesta 2 figuran al inicio del Capítulo III, correspondiente al diseño experimental.

estudiantes que están dentro de cada categoría (del 1 al 35) y en algunos casos una llamada que corresponde a alguna observación que resulte interesante a los efectos de esta investigación, ilustrativa con respecto a la categoría o que sea necesaria para una mejor interpretación de los resultados. Luego de cada red presentamos una red resumen en donde figura la frecuencia de cada categoría.

IV.1.1. Redes sistémicas correspondientes a la Propuesta 1.

<u>Redes Sistémicas correspondientes a la Actividad 1 a) de la propuesta 1</u>



Observaciones:

(1) Este estudiante trabaja en dos ideas realizando cálculos sólo en esta primera.
(2) En esta subcategoría se encuentran pocos estudiantes. Creemos que se debe a que les resulta difícil visualizar al trapecio con sus lados paralelos ubicados en forma vertical. Es práctica común en el discurso escolar y en los libros de texto que los trapecios sean presentados a los estudiantes "apoyados" sobre su base mayor.
Pasa lo mismo con la mayoría de los estudiantes que trabajan con particiones sobre el eje de las abscisas y utilizan el método trapezoidal. En vez de calcular directamente el área del trapecio calculan las áreas del rectángulo y el triángulo que lo componen.
(3) Este estudiante trabaja en dos ideas realizando cálculos sólo en una de ellas.
(4) Los tres estudiantes de esta subcategoría calculan áreas de figuras conocidas como ser triángulos, rectángulos, trapecios, y luego, presumiblemente en base a la observación de las regiones, estiman un valor que les parece apropiado.
(5) El estudiante 21 trabaja con el método rectangular. Los otros tres estudiantes trabajan con el método trapezoidal, pero sólo uno de ellos (el estudiante 24) calcula directamente el área de los trapecios. Los otros dos suman áreas de rectángulo más triángulo.
(6) Este estudiante divide a la región en dos zonas: la primera, el rectángulo de vértices (1,0), (6,0), (6,1) y (1,1) y la segunda zona corresponde al resto de la región A. La partición la realiza para calcular el área de esta segunda zona.
(7) En esta subcategoría se encuentran los estudiantes que, de acuerdo a sus diagramas y a nuestra interpretación, parecería que las rectas que utilizan para dividir la región en figuras conocidas (generalmente triángulos) son tangentes a la curva.
(8) A pesar de que no se desprende claramente de sus diagramas y su trabajo, en la parte b) de esta actividad él explica que usa tangentes para dividir la región.
(9) Al realizar los trazados con las tangentes supone que alguno de los triángulos que le quedan determinados son rectángulos (en realidad no lo son). Hace los cálculos en base a esta suposición obteniendo las dimensiones con el uso de la regla.
(10) Traza la paralela media del triángulo de vértices (1,6) , (6,1) y (1,1) asegurando que es tangente a la curva, cosa que no lo es.
(11) Este estudiante hace unos pocos intentos pero no llega a ningún resultado. Esto lo lleva a que en el resto de la prueba no haga ningún intento. En las peguntas que siguen responde, en sus propias palabras, "reacción en cadena".

* Estos dos estudiantes pertenecen al grupo del Liceo Ciudad de San Felipe, que ya habían trabajado en el curso de informática con el cálculo de áreas.

Resumen

- Acota por exceso con trapecio **(2)**
- Aproxima mediante estimación visual.[23] **(4)**
- Usa partición **(5)**
  - Partición sobre $\vec{Ox}$ **(4)**
    - Método trapezoidal **(3)**
      - Rectángulo + triángulo **(2)**
      - Trapecio **(1)**
    - Método rectangular **(1)**
  - Partición sobre $\vec{Oy}$ **(1)**
- Divide la región en figuras conocidas **(8)**
  - Sin criterio aparente **(2)**
  - Usa o sugiere uso de tangentes **(6)**
- No sabe o no contesta **(1)**
- Otros **(0)**

Los 18 estudiantes que trabajaron en esta propuesta presentaron 20 formas de encarar esta pregunta. De esas 20, en 14 oportunidades realizaron cálculos y llegaron a un resultado aproximado y de las 6 restantes en 5 de ellas se explica el procedimiento sin realizar cálculos y sólo en un caso no se da respuesta alguna.

<u>Redes Sistémicas correspondientes a la Actividad 1 b) de la propuesta 1</u>

Propuesta 1

Actividad 1
b) El valor que hallaste en a), ¿corresponde al área de A?

- Es el área buscada — 22[(1)]
- No es el área buscada — 3, 4, 6, 8, 21, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 32, 34, 35
- No sabe — 7, 10
- No contesta — 27

---

[23] En la red inicial, en este ítem figuran 3 estudiantes. La frecuencia 4 se debe a que uno de ellos plantea dos caminos diferentes.

Observaciones:

(1) No explica porqué pero dice que lo que calculó "va a ser el área buscada". Más adelante en la Actividad 2 reconoce que lo que había calculado era una aproximación.

Dentro de los 14 estudiantes que contestaron que no es el área buscada las argumentaciones se pueden clasificar en:

Propuesta 1

Actividad 1
b) El valor que hallaste en a), ¿corresponde al área de A?
Justifica tu respuesta
.

- Porque sobran o faltan regiones — 6,[1] 21, 23,[2] 24, 26, 28, 32, 34, 35
- Porque estimó — 3
- Por errores de cálculo y trazado — 8[3]
- No sabe
  - No sabe calcular áreas bajo curvas [4] — 4, 25
  - No explica — 29

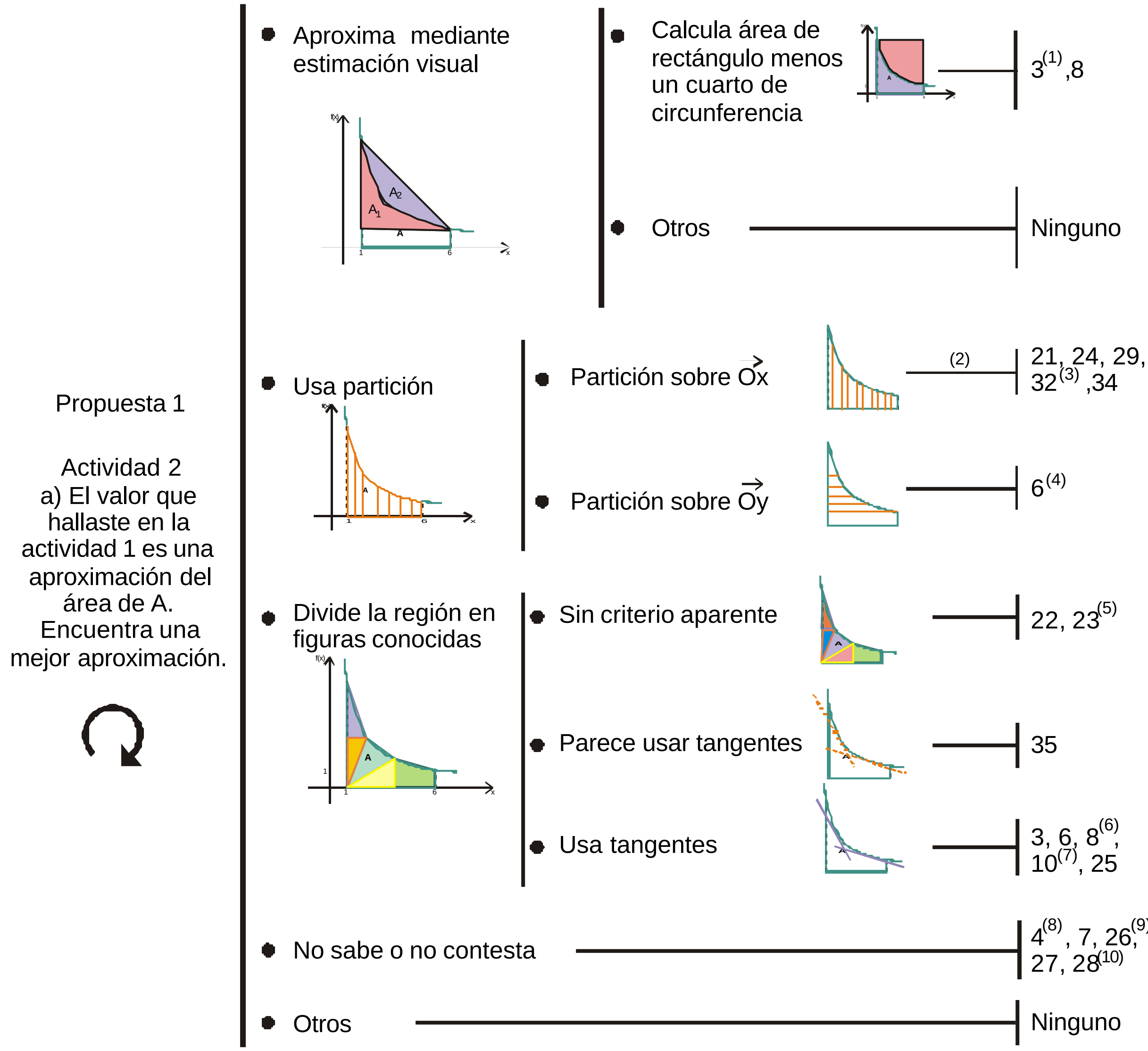
Observaciones:

(1) Explica que faltaría hallar el área de los triángulos de lado "curvo".
(2) Reconoce que no es el área buscada porque "es una parábola y no una recta". A pesar de saber, por cursos anteriores, que la expresión analítica corresponde a una función cuya representación gráfica es una hipérbola la confunde con una parábola.
(3) Está seguro de que el valor que halla no corresponde al de la región A pero sólo por errores en el trazado de las tangentes al gráfico y por errores de medición. El no usa imágenes para realizar los cálculos sino que mide con regla.
(4) Ambos estudiantes argumentan que no pueden hallar el área exacta porque no se les enseñó cómo hacerlo.

Resumen

- Es el área buscada **(1)**
- No es el área buscada **(14)**
  - Porque sobran o faltan regiones **(9)**
  - Porque estimó **(1)**
  - Por errores de cálculo y trazado **(1)**
  - No sabe o no explica **(3)**
- No sabe **(2)**
- No contesta **(1)**

Redes Sistémicas correspondientes a la Actividad 2 a) de la propuesta 1



Observaciones:

(1) Trabaja con dos estrategias diferentes. En esta primera hace los cálculos pero en la otra sólo explica.
(2) Todos los estudiantes de esta subcategoría (salvo el 32) ya habían utilizado esta estrategia. En esta oportunidad afinan la partición.
(3) Cambia completamente de estrategia con respecto a la Actividad 1. Parece recordar lo aprendido en clase de informática, hace una partición sobre el eje de las abscisas y trabaja con el método trapezoidal. Primero calcularía el área de los rectángulos por defecto. Lo interesante es que para determinar el área de los triángulos que completarían cada trapecio no usa imágenes sino que explica que usaría Pitágoras para el cálculo de uno de los catetos.
(4) Cambia del método rectangular al trapezoidal pero con una variante. Explica que para determinar los triángulos trazaría las tangentes al gráfico en cada sub-intervalo de la partición anterior.
(5) Mantiene las mismas zonas en que dividió a la región en la Actividad 1. Lo que hace en esta oportunidad es cuadricular las mismas y determinar figuras más pequeñas dentro

de ellas. Como no hace los cálculos no se da cuenta que de esta forma obtendría el mismo valor que en la actividad anterior.

(6) Divide la región A en menos figuras que en la actividad anterior lo que no lo estaría llevando a una mejor aproximación. El no lo advierte ya que en los hechos sí obtiene una mejor aproximación debido a errores de cálculo.

(7) Hace lo mismo que el estudiante 8, es decir que divide a la región con menos figuras. La diferencia es que en este caso ella sí se aleja del valor real pero no se percata de ello.

(8) Los alumnos 4 y 7 dicen simplemente que no saben y no hacen ningún intento ni en forma analítica ni gráfica.

(9) No tiene en cuenta la expresión analítica de la función para determinar coordenadas de puntos del gráfico, o no sabe cómo usarla. Explícitamente dice que si tuviera las coordenadas de un punto que nombra S (S es el punto de coordenadas (1,6)) podría determinar el área.

(10) En sus palabras: “no me acuerdo”. Esto es muy significativo ya que él, en realidad, no conoce ningún método que le permita realizar los cálculos para hallar el área exacta.

Resumen

- Aproxima mediante estimación visual **(2)**
- Usa partición **(6)**
  - Partición sobre $\overrightarrow{Ox}$ **(5)** (1)
  - Partición sobre $\overrightarrow{Oy}$ **(1)**
- Divide la región en figuras conocidas **(8)**
  - Sin criterio aparente **(2)**
  - Usa o sugiere uso de tangentes **(6)**
- No sabe o no contesta **(5)**
- Otros **(0)**

Observaciones:

(1) No se distingue entre método trapezoidal y rectangular ya que, como se explicó anteriormente, los estudiantes que habían trabajado con esta estrategia en la Actividad 1 afinan la partición que tenían manteniendo el método y el estudiante 32 usa el método trapezoidal (rectángulo más triángulo).

Los 18 estudiantes que trabajaron en esta propuesta presentaron 21 formas de encarar esta pregunta. De esas 21, en 3 oportunidades realizaron cálculos y llegaron a un resultado aproximado y de las 18 restantes en 14 de ellas se explica el procedimiento sin realizar cálculos, 3 de ellos no saben cómo hacerlo y sólo en un caso no se da respuesta alguna.

Redes Sistémicas correspondientes a la Actividad 2 b) de la propuesta 1

Propuesta 1 — Actividad 2 b) ¿Se puede continuar este proceso en la búsqueda de mejores aproximaciones?		
	Si	6, 8, 21, 22, 23, 24, 25, 29, 32, 34, 35
	No	28[(1)]
	No sabe	7, 10[(2)], 26
	No contesta	3, 4, 27

Observaciones:

(1) Argumenta que no se puede porque "no me acuerdo si existe una fórmula o manera de calcularla".
(2) Expresa que no sabe cómo. Lo que hace es promediar los valores que obtuvo para el área de la región A.

Las argumentaciones de los 11 estudiantes que contestaron que si, se pueden clasificar en:

Propuesta 1 — Actividad 2) b) Si contestaste afirmativamente explica ampliamente cómo harías una mejor aproximación.		
	Afinando partición	21, 24, 29 32[(1)], 34[(2)]
	Dividiendo la región con otras figuras	23[(3)], 35
	No sabe	22, 25, 26
	Otros	6[(4)], 8[(5)]

Observaciones:

(1) Afina partición, pero ahora cambia del método rectangular al método del valor intermedio.
(2) Afinando la partición hasta que la base de los trapecios tienda a 0 y entonces podría despreciar los triángulos superiores. Está pasando al método rectangular.
(3) Se plantea la idea de dividir la región en "más o menos figuras" y que entonces son "infinitas las posibilidades de hallar el área".
(4) En sus palabras: "continuando con el trazado de tangentes". Trabaja en un comienzo con una partición sobre el eje de las ordenadas con el método rectangular y luego pasa al método trapezoidal agregando los triángulos determinados por las tangentes al gráfico. Entonces su explicación de continuar con el trazado de tangentes se podría interpretar como que afina la partición lo que derivaría en nuevos triángulos determinados por las tangentes al gráfico.
(5) Insiste en que el problema de no poder determinar exactamente el área de la región se debe a la no precisión en los trazados. Al pasar de la Actividad 1 a la 2 expresa que lo intentará pero que no cree que mejore mucho la aproximación.

Resumen

Si
(11)

Afinando partición
(5)

Dividiendo la región
con otras figuras
(2)

No sabe
(3)

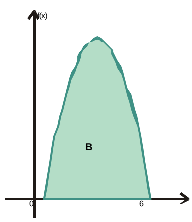
Otros
(2)

No
(1)

No sabe
(2)

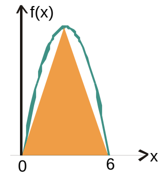
No contesta
(3)

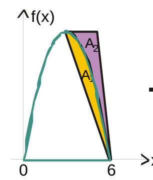
Redes Sistémicas correspondientes a la Actividad 3 a) de la propuesta 1

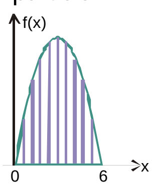


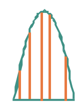
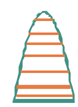
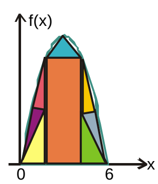
Propuesta 1

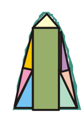
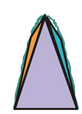
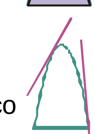
Actividad 3
a) Cálculo de la región B

- Acota por defecto con triángulo 

— 4, 6, 25, 28, 32, 35
- Aproxima mediante estimación visual. 

— 3, 7, 35
- Usa partición 

  - Partición sobre $\vec{Ox}$  — 21, 24, 34
  - Partición sobre $\vec{Oy}$  — 8(1)
- Divide la región en figuras conocidas 

  - Sin criterio aparente  — 8(2), 10
  - Inscribe triángulos en la parábola  — (3) — 22, 23
  - Usa tangentes al gráfico  — 22(4)
- No sabe o no contesta — 26(5), 27, 29(6)
- Otros — Ninguno

Observaciones:

(1) y (2) Trabaja en dos ideas. Primero, inscribe la sección parabólica en un rectángulo tangente a la parábola en el vértice y divide en figuras la región del rectángulo que queda fuera. Analizando sus trazados parecería que utiliza tangentes al gráfico para determinar dichas figuras, cosa que no explicita. Si está usando tangentes sería una continuación de su trabajo en las actividades anteriores en donde sí explicita el uso de estas.

Luego parece ordenar un poco su trabajo. Hay un cambio de actitud, una forma diferente de encarar la tarea. Realiza una especie de partición sobre el eje de las ordenadas que, regla mediante, le permite calcular las áreas de todas las figuras que él mismo traza y llegar así a un resultado concreto. En las Actividades 1 y 2 divide la región en figuras pero sin un criterio aparente lo que le impide calcular el área, en cada caso, de una de las figuras en las que dividió a la región. La forma en que quedaba ubicada esta figura le impedía darse cuenta de cómo obtener sus dimensiones.

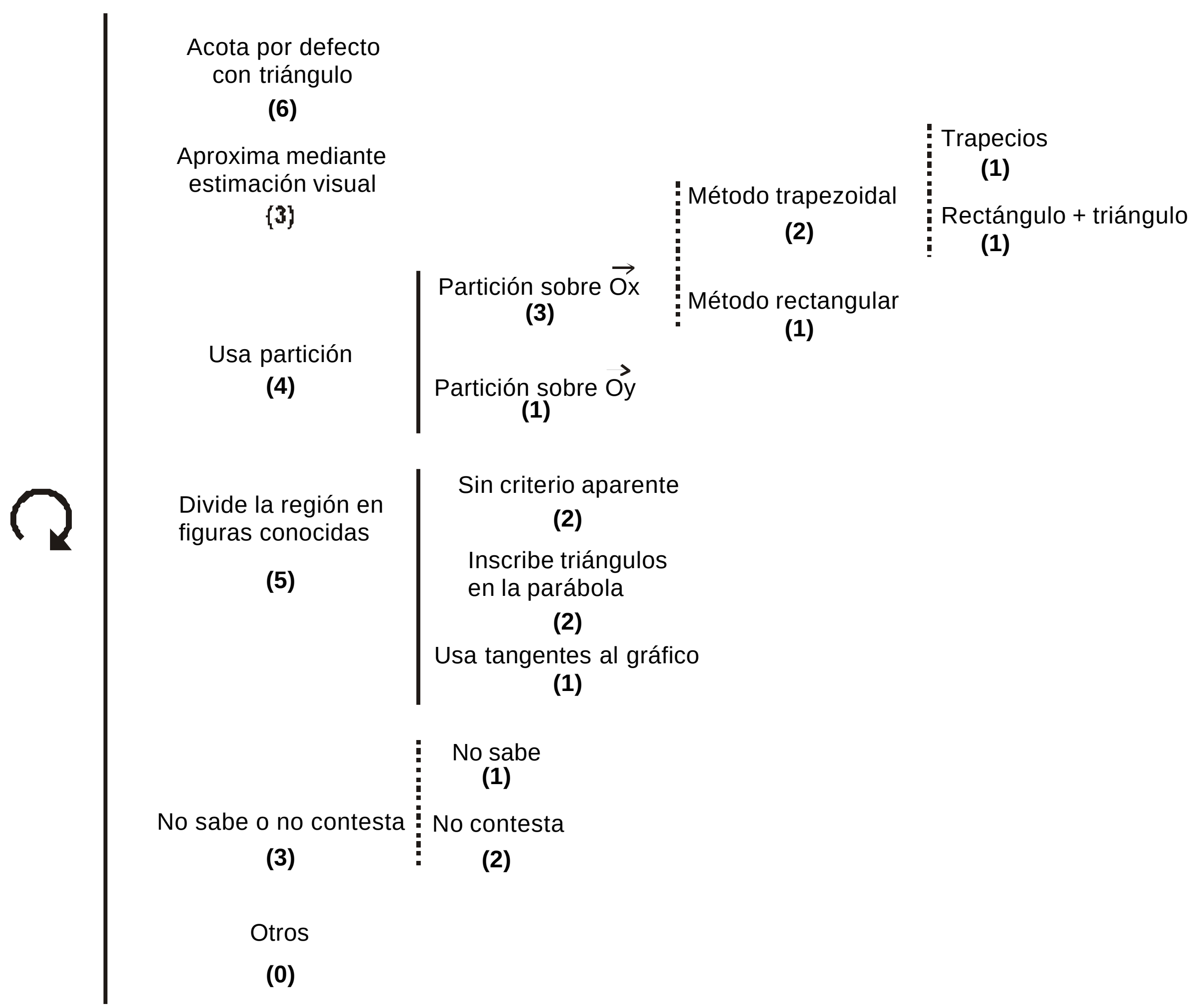
(3) En esta subcategoría se clasifica a los estudiantes que hacen un trabajo similar al realizado por Arquímedes en el método geométrico para el cálculo del área de una sección parabólica.

(4) Trabaja en dos ideas. Una de ellas con trazado de tangentes para determinar triángulos, exteriores a la región. La segunda idea es inscribir en la sección parabólica triángulos, que aparenta tener similitud con lo trabajado por Arquímedes con el método geométrico para el cálculo del área de una sección parabólica.

(5) En sus palabras: “No se puede hallar”.

(6) Se retira antes de la prueba por un problema del momento. En todo momento mostró buena disposición para realizar las actividades.

Resumen



Redes Sistémicas correspondientes a la Actividad 3 b) de la propuesta 1

Consideramos que esta actividad consta de dos partes: una sería si el estudiante considera o no posible el cálculo de mejores aproximaciones del área de la región y la otra, si contestó afirmativamente, cómo haría para encontrar las mismas. Es por ello que se presentan dos redes sistémicas que corresponden a cada una de las partes respectivamente.

Propuesta 1 — Actividad 3 b) ¿Consideras posible encontrar mejores aproximaciones de B?	Respuesta	Estudiantes
	Si	6, 8, 10, 21, 22, 24, 25,(1) 28, 32, 34, 35
	No	Ninguno
	No sabe	4, 7
	No contesta	3, 23, 26, 27, 29(2)

Observaciones:

(1) Cree que es posible, pero que él no puede pensar "correctamente" por el cansancio.
(2) Se retira antes de terminar las actividades por motivos personales.

Las explicaciones de los 11 estudiantes que contestaron que si, se pueden clasificar en:

Propuesta 1 — Actividad 3 b) ¿Cómo encontrarías mejores aproximaciones de B?	Respuesta	Estudiantes
	Afinando partición	21, 24,(1) 32(2), 34
	Dividiendo la región con otras figuras	6(3), 8, 10,(4) 22(5), 35
	No sabe	25, 28(6)

Observaciones:

(1) Este estudiante viene trabajando con particiones con el método trapezoidal. La idea que aporta en esta oportunidad es que a medida que tomamos intervalos "de abscisas más pequeñas" (lo interpretamos como intervalos de amplitud más pequeña) la curva tiende a una recta.
(2) Cuando intenta calcular el área de la región B, en la parte a), acota por defecto con el triángulo inscripto en la sección. Pero cuando explica cómo encontrar mejores aproximaciones pasa a trabajar con particiones con el método rectangular.
(3) Explica que se debería continuar con el trazado de tangentes a la curva para determinar triángulos. Sugiere el uso de la fórmula de la tangente a la curva en un punto pero no explica cómo la usaría.
(4) En sus palabras: "Buscar los triángulos posibles y hallarles el área". Con la forma en que lo expresa da la sensación de que la búsqueda de esos triángulos se agotaría en algún momento. Parecería que está pensando en un proceso finito.
(5) Se presenta aquí un cambio de estrategia. La estrategia que venía usando era la inscripción de triángulos en la sección parabólica, acotando por defecto. Ahora acota

por exceso mediante el rectángulo circunscrito a la sección parabólica y considera el trazado de tangentes a la curva para determinar triángulos en la zona exterior.

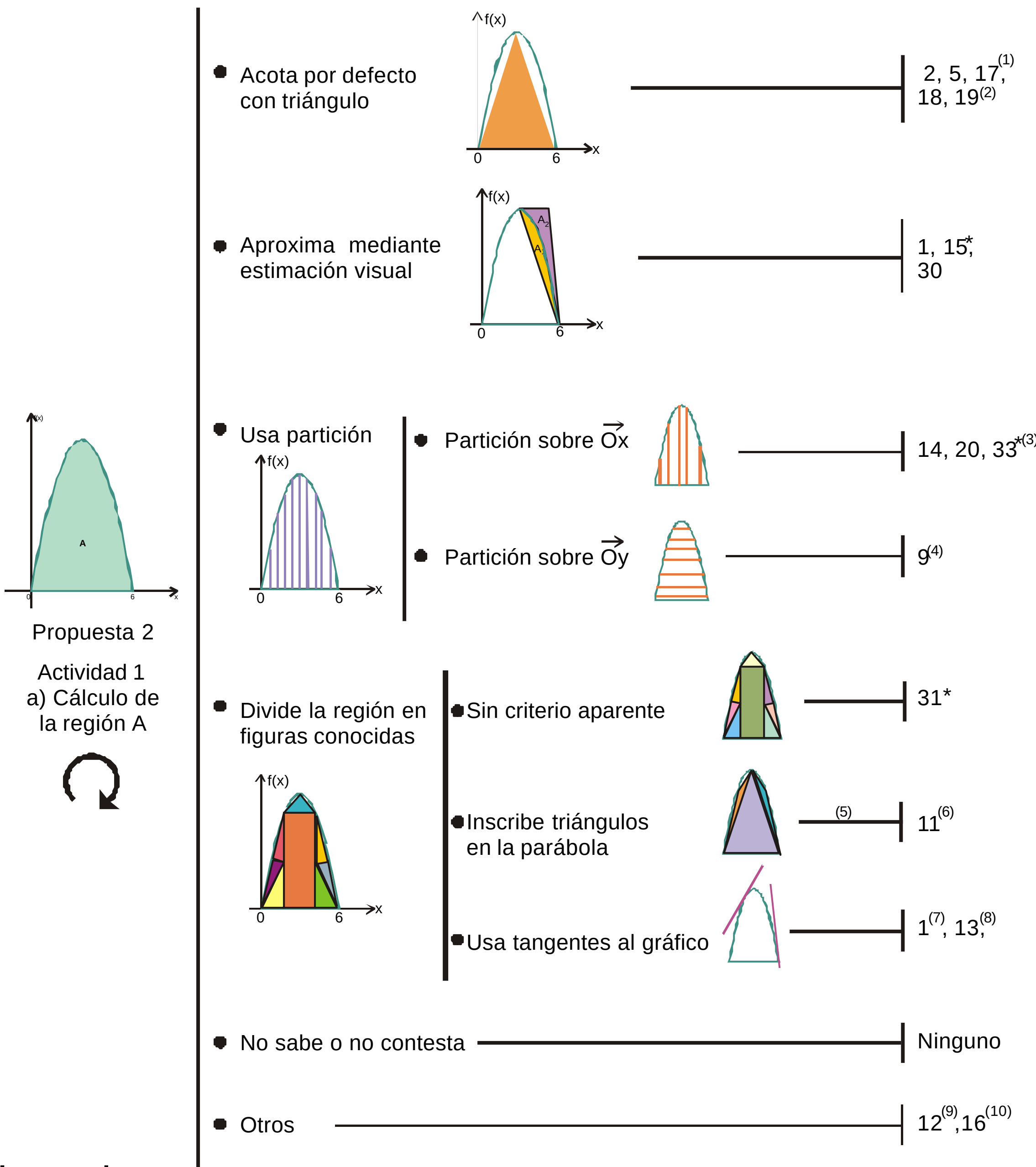
(6) Considera que es posible pero él no sabe. Dice que deben existir fórmulas de áreas que él no conoce o no recuerda.

Resumen

- Si **(11)**
  - Afinando partición **(4)**
  - Dividiendo la región con otras figuras **(5)**
  - No sabe **(2)**
- No **(0)**
- No sabe **(2)**
- No contesta **(5)**

IV.1.2. Redes sistémicas correspondientes a la Propuesta 2.

<u>Redes Sistémicas correspondientes a la Actividad 1 a) de la propuesta 2</u>



Observaciones:

(1) Trabaja en dos ideas diferentes. En la segunda considera que el área de la región A equivale a la del trapecio de vértices (0,0), (6,0), (4,9) y (2,9) que curiosamente es cierto.

(2) Para calcular el área del triángulo intenta usar la fórmula $\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right\|$ en donde los puntos de coordenadas (x_1,y_1), (x_2,y_2) y (x_3,y_3) son los vértices del triángulo, pero no

llega al valor correcto ya que opera mal y olvida multiplicar por ½

(3) Realiza un trabajo muy completo acotando por exceso con rectángulos y por defecto con trapecios. Va afinando la partición hasta llegar a que 35,75 < área de A < 40,25. Comenta que es mejor la aproximación con trapecios que con rectángulos. Evidentemente está viendo que con un trapecio cubre mejor la región.

(4) Al hacer la partición sobre el eje de las ordenadas necesita las preimágenes para determinar en forma exacta las dimensiones de las figuras en que divide a la región. Lo hace utilizando correctamente la expresión analítica de la función.

(5) Dentro de esta subcategoría están incluidos los estudiantes que parecería trabajan en forma similar a lo hecho por Arquímedes en la determinación del tercer vértice de los triángulos que va inscribiendo en la parábola en su método geométrico para la determinación del área de la sección parabólica.

(6) Usa simetría de la parábola. Sobre los lados iguales del triángulo de vértices (0,0), (6,0) y (3,9) construye triángulos cuyo tercer vértice pertenece a la parábola. Parecería, al analizar la figura que el estudiante construye, que dicho punto coincide con la intersección de la tangente paralela a la cuerda del segmento de parábola.

(7) Usa tangentes para determinar una figura que supone tiene igual área que la que está buscando.

(8) Trabaja por exceso calculando en primera instancia el área del rectángulo circunscrito a la sección parabólica. Luego determina en una de las zonas excedentes un triángulo rectángulo cuya hipotenusa está incluida en la tangente al gráfico en x = 6. Usa simetría de la parábola.

(9) Acota por exceso usando el rectángulo de vértices (0,0), (6,0), (6,9) y (0,9).

(10) Supone que el borde de la región A corresponde a media elipse y dice que si calcula el área de la elipse y divide el resultado entre 2 obtiene el área buscada. No explica cómo haría dicho cálculo.

* Estos tres estudiantes pertenecen al grupo del Liceo Ciudad de San Felipe, que ya habían trabajado en el curso de informática con el cálculo de áreas.

Resumen

- Acota por defecto con triángulo **(5)**
- Aproxima mediante estimación visual **(3)**
- Usa partición **(4)**
  - Partición sobre $\vec{Ox}$ **(3)**
    - Método trapezoidal **(3)**
      - Rectángulo + triángulo **(1)**
      - Trapecio **(2)**
    - Método rectangular(*) **(1)**
  - Partición sobre $\vec{Oy}$ **(1)**
- Divide la región en figuras conocidas **(4)**
  - Sin criterio aparente **(1)**
  - Inscribe triángulos en la parábola **(1)**
  - Usa tangentes al gráfico **(2)**
- No sabe o no contesta **(0)**
- Otros **(2)**

(*) De los tres estudiantes que realizan partición sobre el eje de las abscisas hay una estudiante que acota por exceso con rectángulos y por defecto con trapecios.

Los 17 estudiantes que trabajaron en esta propuesta presentaron 18 formas de encarar la misma. De esas 18, en 14 oportunidades se realizaron cálculos y llegaron a un resultado aproximado y en las 4 restantes se explica el procedimiento sin realizar cálculos.

Redes Sistémicas correspondientes a la Actividad 1 b) de la propuesta 2

Propuesta 2

Actividad 1
b) El valor que hallaste en a), ¿corresponde al área de A?

- Es el área buscada — Ninguno
- No es el área buscada — 2, 5, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 30, 31, 33
- No sabe — 1 (1), 16 (2)
- No contesta — 17 (3)

Observaciones:

(1) Porque duda si la zona a la que le halló el área equivale a la zona que necesitaba calcular.
(2) Esta estudiante ve a la sección parabólica como media elipse, entonces su argumentación es: “si la elipse fuese perfecta sería el área, sino no lo sería”.
(3) En realidad no contesta lo que se le pregunta. Halla el promedio de los dos valores que determinó en las dos ideas diferentes que trabaja en la primera parte de esta actividad.

Dentro de los 14 estudiantes que contestaron que no es el área buscada las argumentaciones se pueden clasificar en:

Propuesta 2

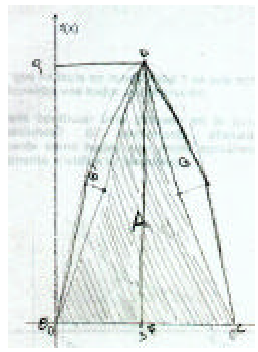
Actividad 1
b) El valor que hallaste en a), ¿corresponde al área de A?
Justifica tu respuesta
.

- Porque sobran o faltan regiones
  - Regiones con “lado curvo” — 9, 11, 19, 31, 33
  - Otros — 2, 5, 12, 13, 14 (1), 18 (2)
- Porque estimó — 15, 30 (3)
- No explica — 20

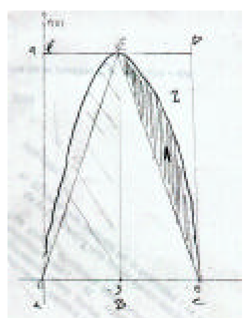
Observaciones:

(1) Porque considera que tendría que tomar infinitos trapecios (trabaja con partición sobre el eje de las abscisas con el método trapezoidal) y cree que es imposible.

(2) Dice que le falta calcular el área de las regiones B y B' (ver figura) que él determina en la figura. Dichas regiones corresponden a triángulos inscritos en la parábola cuyo tercer vértice parece corresponder al punto medio de la curva. No comenta nada de las zonas que, dentro de la sección parabólica, quedan fuera de estos triángulos.



(3) Realiza una estimación visual del área suponiendo que el área de la región que marca como 1 es igual al área de la región 2 (ver figura). Por este motivo dice que el valor que halló no corresponde al área buscada.



Resumen

Es el área buscada
(0)

No es el área buscada
(14)

- Porque sobran o faltan regiones
  (11)
- Porque estimó
  (2)
- No explica
  (1)

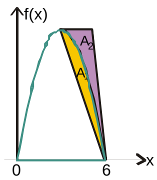
No sabe
(2)

No contesta
(1)

Redes Sistémicas correspondientes a la Actividad 2 a) de la propuesta 2

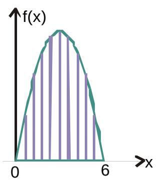
Actividad 2
a) El valor que hallaste en la actividad 1 es una aproximación del área de A. Encuentra una mejor aproximación.

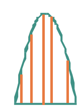
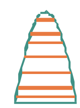
- Aproxima mediante estimación visual



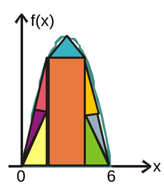
— 1, 12, 15(1)

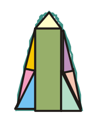
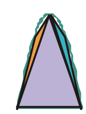
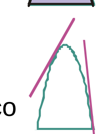
- Usa partición



  - Partición sobre $\vec{Ox}$  — 14 17, 20, 33
  - Partición sobre $\vec{Oy}$  — 9(2), 11(3), 31

- Divide la región en figuras conocidas



  - Sin criterio aparente  — 1,15,19
  - Inscribe triángulos en la parábola  — 16(4), 18(5)
  - Usa tangentes al gráfico  — 16

- No sabe o no contesta
  - No sabe — 2(6), 5, 30(7)
  - No contesta — Ninguno

- Otros — 13

Observaciones:

(1) Combina dos estrategias. En la actividad anterior estima el área visualmente. Ahora, sobre la base de lo calculado anteriormente, divide parte de la región en figuras conocidas para obtener una mejor aproximación. A pesar de ser uno de los estudiantes que había trabajado con cálculo de áreas por medio de los métodos rectangular y trapezoidal en el área de informática, no da muestra hasta el momento de lo ya visto en clase.

(2) Profundiza la idea trabajada en la actividad anterior afinando la partición sólo en una parte de la figura. Como la partición es sobre el eje de las ordenadas para determinar las abscisas usa la expresión analítica y calcula las preimágenes.

(3) Hace trabajo similar que alumno 9, en cuanto a la división de la región en figuras, pero para determinar las dimensiones de las figuras usa regla.

(4) Para determinar el tercer vértice de cada triángulo que inscribe en la parábola plantea el uso de tangentes. Pero al trabajar con la figura de análisis al explicar su procedimiento aparece una incongruencia ya que primero elige un punto, P por

ejemplo, de la parábola que dice que es cualquiera y luego traza la tangente por P, por lo que dicha tangente en realidad no la estaría usando para determinar el tercer vértice.

(5) Llega a calcular un valor para el área pero con errores al operar. Al calcular el área del triángulo que inscribe olvida dividir entre 2. Plantea el uso del teorema de Pitágoras para determinar la base del triángulo inscrito. Para determinar el tercer vértice determina el punto medio de ese lado que considera como base y traza la perpendicular a él por dicho punto. La intersección de la perpendicular con la parábola es el tercer vértice del triángulo. Para determinar su altura no tiene tanto cuidado ya que el valor que usa es la medida que dicho segmento tiene en su figura.

(6) Dice no saber hallar áreas de figuras limitadas por curvas.

(7) En la actividad anterior estima visualmente suponiendo que dos regiones que el determina (una que necesita y otra a la cual sabe calcular el área) son equivalentes. Ahora argumenta que no puede seguir porque no sabe cómo probar la igualdad de las áreas de dichas regiones.

Resumen

- Aproxima mediante estimación visual **(3)**
- Usa partición **(7)**
  - Según el eje
    - Sobre $\overrightarrow{Ox}$ **(4)**
    - Sobre $\overrightarrow{Oy}$ **(3)**
  - Según el método
    - Método trapezoidal **(6)**
      - Rectángulo + triángulo(s)(*) **(4)**
      - Trapecio **(2)**
    - Método rectangular **(0)**
    - Otro método **(1)**
- Divide la región en figuras conocidas **(5)**
  - Sin criterio aparente **(3)**
  - Inscribe triángulos en la parábola **(2)**
- No sabe o no contesta **(3)**
- Otros **(1)**

Observaciones:

(*) Los estudiantes que trabajan con particiones sobre el eje de las abscisas usan un rectángulo con un triángulo, determinando así un trapecio birrectángulo. Los que lo hacen sobre el eje de las ordenadas usan un rectángulo con dos triángulos obteniendo un trapecio isósceles.

Los 17 estudiantes que trabajaron en esta propuesta presentaron 19 formas de encarar la misma. De esas 19, en 9 oportunidades realizaron cálculos y llegaron a un resultado aproximado y de las 10 restantes en 6 de ellas se explica el procedimiento sin realizar cálculos y 4 de ellos no saben cómo hacerlo.

Redes Sistémicas correspondientes a la Actividad 2 b) de la propuesta 2

Propuesta 2 Actividad 2 b) ¿Se puede continuar este proceso en la búsqueda de mejores aproximaciones?	• Si	1, 2, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 31, 33
	• No	12 (1)
	• No sabe	5, 19
	• No contesta	30

Observaciones:

(1) Argumenta que no se puede porque no tiene más datos.

Las argumentaciones de los 13 estudiantes que contestaron que si, se pueden clasificar en:

Propuesta 2 Actividad 2) b) Si contestaste afirmativamente explica ampliamente cómo harías una mejor aproximación.	• Afinando partición	9 (1), 14, 20, (2) 31, 33 (3)
	• Dividiendo la región con otras figuras	1 (4), 13, 15 (5) 16 (6), 17, 18 (7)
	• No sabe	2 (8)
	• No contesta	11 (9)

Observaciones:

(1) Trabaja con una partición sobre el eje de las ordenadas con trapecios isósceles (rectángulo más dos triángulos) pero al explicar el procedimiento que haría dice: “realizar el proceso infinitamente dividiendo en rectángulos”.
(2) La idea que maneja es la de afinar la partición de tal forma que “los triángulos se ajusten más al borde de la parábola”.
(3) Elige los trapecios (trabaja acotando por defecto con trapecios y por exceso con rectángulos) porque cree que para esta función los trapecios darían “la mejor aproximación”. Plantea que el área buscada es el límite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{1}^{n}(f(x_i)+f(x_{i+1}))\cdot\frac{6i}{n}}{2}$

siendo $\Delta_x = 6/n$ (n número de intervalos), con cada intervalo de la forma $x_{i+1} - x_i$ y $x_i = i.\frac{6}{n}$.

(4) Dice que si se sigue dividiendo la región en figuras "llegaría un punto en el que se podría determinar una ecuación para hacerlo".

(5) Seguir dividiendo hasta llegar a un valor que va a tener un error "tan infinitésimo que lo vamos a dar por bueno".

(6) Continuar inscribiendo triángulos en la parábola. La forma de elegir el tercer vértice de los nuevos triángulos es tomando un punto de la parábola tal que la ordenada del mismo sea mayor que la ordenada del punto que había tomado en la etapa anterior. En los hechos elige R y escribe $f(R) > f(P)$, siendo P el punto elegido antes.

(7) La misma idea que el estudiante 16 pero con diferente forma de determinar el tercer vértice. Lo interesante es que ambos toman nuevos triángulos en la zona superior ya que aparentemente, según sus dibujos, la zona inferior se ve cubierta por el triángulo de la etapa previa.

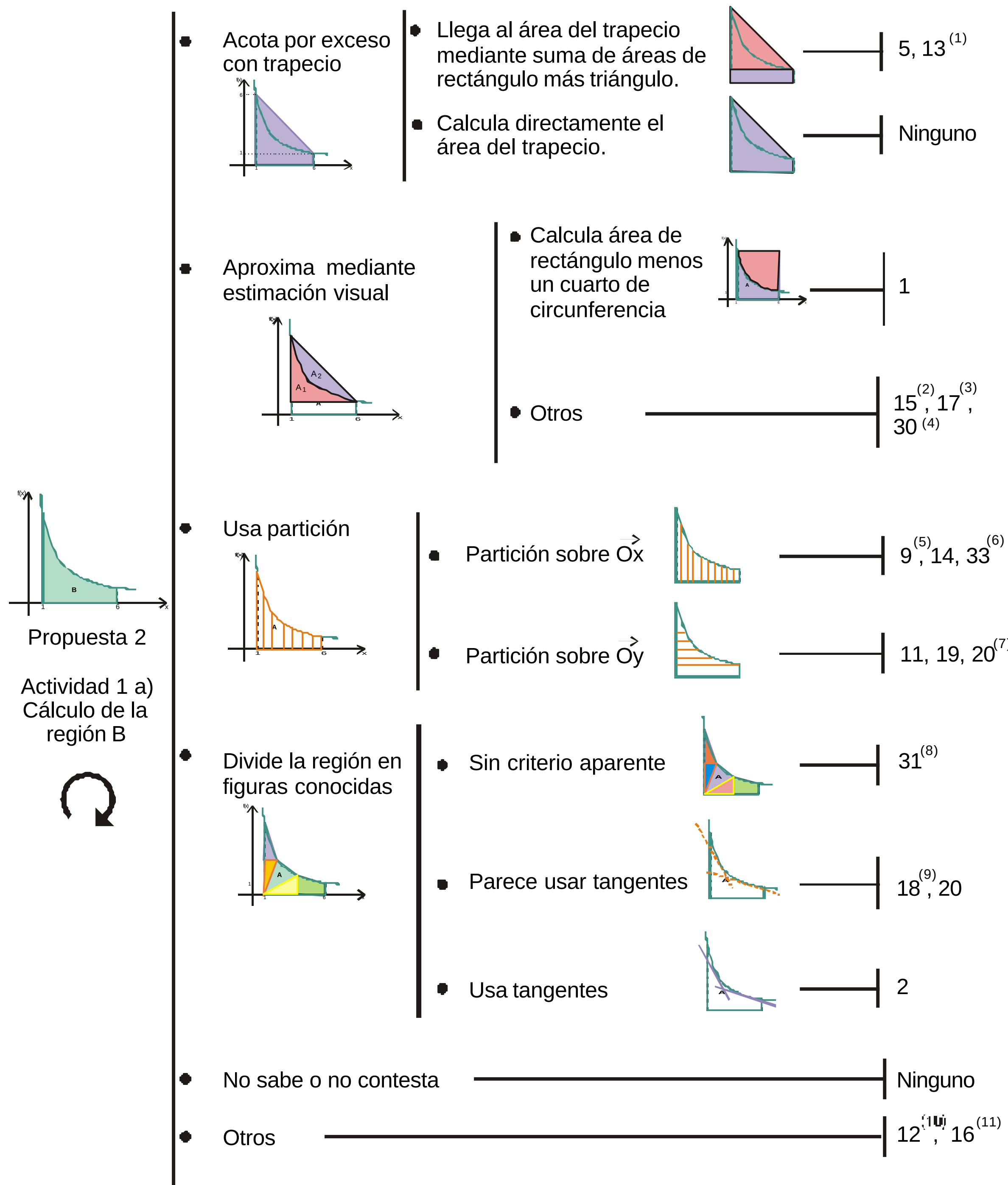
(8) No sabe hallar áreas de figuras limitadas por curvas.

(9) En realidad contesta otra cosa.

Resumen

- Si **(13)**
  - Afinando partición **(5)**
  - Dividiendo la región con otras figuras **(6)**
  - No sabe **(1)**
  - Otros **(1)**
- No **(1)**
- No sabe **(2)**
- No contesta **(1)**

Redes Sistémicas correspondientes a la Actividad 3 a) de la propuesta 2



Observaciones:

(1) Se confunde y calcula el área en el intervalo [0,6].
(2) Traza un segmento de extremos en los puntos de coordenadas (1,6) y (6,0). Según los cálculos que realiza y su figura de análisis presumimos que estaría suponiendo que las regiones sobrantes y faltantes son equivalentes.
(3) Traza segmento de extremos en los puntos de coordenadas (0,6) y (6,0). Dicho segmento determina con las rectas de ecuación x = 1 e y = 1 un triángulo. Suponemos

que estima que el área de la región B es la suma de las áreas de dicho triángulo y del rectángulo que aparece sombreado en la figura.

(4) Al igual que en la Actividad 1, con el área de la región A, considera dos regiones como equivalentes.

(5) Calcula primero el área del rectángulo de vértices (1,0), (6,0), (1,6) y (1,1) y utiliza la partición P = {1, 2, 3, 4, 5, 6} para el cálculo del área restante.

(6) Elige trabajar con trapecios ya que considera que “por la forma de la curva, el método del trapecio va a ser el más exacto”.

(7) Este estudiante figura clasificado en dos ítems ya que parece trabajar con una partición sobre el eje de las ordenadas pero en lugar de determinar con la misma, figuras del mismo tipo, trabaja con un triángulo, un trapecio y un rectángulo. Los dos primeros tienen uno de sus lados determinados por lo que parece ser una tangente al gráfico.

(8) En la división que hace de la región B dos de las figuras exceden la misma. Marca en la figura de análisis la zona sobrante sólo en una de las figuras. En la otra no parece darse cuenta del exceso.

(9) Parece trazar la tangente al gráfico en el “punto medio” de la curva en el intervalo, que también podría ser interpretado como la paralela a la cuerda de extremos (1,6) y (6,1). Halla un valor aproximado del área de la región sumando las áreas del triángulo determinado por la supuesta tangente y las rectas de ecuaciones x = 1 e y = 1 y el rectángulo de vértices (1,0), (6,0), (6,1) y (1,1).

(10) En esta ocasión trabaja el cálculo del área usando la expresión analítica de la función en un intento aparente de encontrar una fórmula.

(11) Calcula, en una primera instancia, el área del trapecio circunscrito a la región B y luego inscribe triángulos, en un trabajo similar al de Arquímedes, en la zona sobrante para ir restándole las áreas de éstos al área del trapecio.

Resumen

- Acota por exceso con trapecio **(2)**
- Aproxima mediante estimación visual **(4)**
- Usa partición **(6)**
  - Partición sobre $\overrightarrow{Ox}$ **(3)**
    - Método trapezoidal **(3)**
      - Rectángulo + triángulo **(1)**
      - Trapecio **(2)**
    - Método rectangular **(0)**
  - Partición sobre $\overrightarrow{Oy}$ **(3)**
- Divide la región en figuras conocidas **(4)**
  - Sin criterio aparente **(1)**
  - Usa o sugiere uso de tangentes **(3)**
- No sabe o no contesta **(0)**
- Otros **(2)**

De los 17 estudiantes que trabajaron en esta propuesta 12 realizaron cálculos y 5 no lo hicieron pero explicaron cómo lo harían. De los 12 primeros, once llegaron a un valor aproximado del área buscada.

<u>Redes Sistémicas correspondientes a la Actividad 3 b) de la propuesta 2</u>

Consideramos que esta actividad consta de dos partes: una sería si el estudiante considera o no posible el cálculo de mejores aproximaciones del área de la región y la otra, si contestó afirmativamente, cómo haría para encontrar las mismas. Es por ello que se presentan dos redes sistémicas que corresponden a cada una de las partes respectivamente.

Propuesta 2 Actividad 3 b) ¿Consideras posible encontrar mejores aproximaciones de B?		
	• Si	9, 13, 14, 15, 16, 18, 31, 33
	• No	2(1)
	• No sabe	1, 5, 11(2) 12(2), 30(3)
	• No contesta	17, 19 20

Observaciones:

(1) Trabaja con la idea de trazar tangentes a la gráfica de la función. A pesar de que en su curso se trabajó con la ecuación de la tangente a la gráfica en un punto de la misma y de conocer las herramientas analíticas para intersecar rectas y otras curvas, dice que no puede calcular el área de las figuras que determina en la región porque no conoce las coordenadas de algunos puntos ni la medida de determinados segmentos. Dice que aunque los conociera "nunca" se podría hallar el área total porque los bordes son curvos.

(2) Ambas estudiantes afirman que no pueden encontrar "otra" forma de hallar aproximaciones. No profundizan en las estrategias que habían trabajado en la parte a) de esta actividad sino que estarían pensando que es necesario encontrar una forma diferente de trabajar.

(3) Al igual que en la Actividad 1, al haber supuesto la igualdad entre las áreas de dos regiones, que en realidad no son iguales, y ante la imposibilidad de poder probar que lo son, dice que no puede responder.

Las explicaciones de los 8 estudiantes que contestaron que si, se pueden clasificar en:

Propuesta 2 Actividad 3 b) ¿Cómo encontrarías mejores aproximaciones de B?		
	• Afinando partición	9(1), 14, 33
	• Dividiendo la región con otras figuras	13, 15(2), 16(3), 18(4), 31
	• No sabe	Ninguno

Observaciones:

(1) Plantea dividir la región en más rectángulos a pesar que él venía trabajando con trapecios.
(2) En todas las actividades anteriores trabajó con compensación de áreas utilizando principalmente triángulos para la determinación de figuras auxiliares. Sin embargo en esta oportunidad plantea la división de la región en rectángulos "más chicos". No explica cómo haría la división. Podemos sospechar que estaría pensando en una partición y un trabajo con el método rectangular para acotar el área de la región ya que este estudiante es del grupo que había trabajado el tema en la clase de informática.
(3) Esta estudiante cambia de estrategia. En vez de continuar con el proceso iniciado en la parte a), inscribir triángulos para agotar la región excedente, ahora hace otra división en figuras conocidas (triángulos). De acuerdo a su figura de análisis parecería que usa tangentes para determinar dichos triángulos.
Pensamos que no continúa con la tarea de inscribir triángulos por un lado porque no visualiza en su figura de análisis las regiones que le faltan agotar, y por el otro porque parece no poder considerar este proceso como infinito.
(4) No considera posible calcular el área total pero sí una aproximación de la misma. Plantea para esto último la búsqueda de más triángulos para dividir la región. De acuerdo a su figura de análisis parecería que usa tangentes para determinar dichos triángulos.

Resumen

- Si **(8)**
  - Afinando partición **(3)**
  - Dividiendo la región con otras figuras **(5)**
  - No sabe **(0)**
- No **(1)**
- No sabe **(5)**
- No contesta **(3)**

IV.2. PRIMERAS REFLEXIONES

En esta etapa del trabajo, basándonos en los datos recogidos y organizados en las redes presentadas anteriormente, realizaremos un análisis que nos permita comenzar a dar respuesta a nuestra pregunta de investigación: ¿qué estrategias utilizan los estudiantes de Tercer año de Bachillerato Diversificado al enfrentarse al cálculo de área bajo la curva? ayudándonos con las preguntas secundarias, a saber:

- En el caso que el estudiante acota, ¿lo hace por exceso o por defecto? En la forma de acotar, ¿influye la concavidad de la función?

- ¿Utiliza toda la información que se le proporciona en el enunciado?, ¿Utiliza la expresión analítica de la función para determinar las dimensiones de las figuras auxiliares que traza?

- Como ampliación de lo anterior, ¿encara la actividad en forma compartimentada o puede fusionar los elementos de análisis matemático con los geométricos?

- ¿Cambia de estrategia a lo largo de la prueba?, ¿Los intentos anteriores influyen en su actividad al encarar las actividades siguientes?

- ¿Considera que los procedimientos que utiliza se pueden continuar indefinidamente o lo ve como un proceso finito?

Para ello hemos elaborado tablas, a modo de resumen que nos facilitarán el análisis. En las tablas en que sea necesario nombrar la estrategia utilizada por el estudiante lo haremos en base a un código que utilizaremos para abreviar la descripción de la misma. El código comienza con (H) o (P) según estemos hablando de la hipérbola o la parábola. A continuación figura la letra E y un dígito del 1 al 4 que corresponde a la estrategia utilizada:

E 1 Acota por exceso con trapecio y por defecto con triángulo respectivamente.
E 2 Aproxima mediante estimación visual, comparando el área de la región en cuestión con la de una figura de la cual conoce cómo calcular su área.
E 3 Usa partición sobre alguno de los ejes.
E 4 Divide a la región en figuras conocidas de las que conoce cómo calcularles el área.

Por ejemplo: **(H) E 2** corresponde a la segunda estrategia para determinar el área bajo la hipérbola y que se refiere a lo que denominamos “estimación visual”.

IV.2.1. Compromiso con la propuesta y comprensión de la misma

Es costumbre, en nuestro sistema de enseñanza, que a los estudiantes se les propongan actividades que ellos puedan resolver. Es decir, actividades en donde se les proporcione toda la información que sea necesaria para resolverlas por métodos que hayan sido trabajados previamente en clase. Esta cláusula del contrato didáctico no es solamente implícita. En las pruebas que se realizan durante el año lectivo y en el examen final, que es obligatorio, sólo se les puede proponer actividades similares a las

trabajadas durante el curso, de acuerdo a lo establecido por los reglamentos de la inspección que regulan este tipo de pruebas.
En cierta forma las actividades que les proponemos en la entrevista, rompen el contrato, por lo que es importante observar el grado de compromiso de los estudiantes.
Treinta y cuatro de los treinta y cinco estudiantes entrevistados se comprometieron con la propuesta inicial. Recordemos que la participación en el trabajo es voluntaria y no obligatoria por lo que es coherente el grado de compromiso en la etapa inicial. Aceptan resolver las actividades que se les plantean, suponiendo, en una primera instancia que lo pueden hacer con las herramientas que poseen. Creemos que confían que los datos que se les proporcionan son suficientes para llevar a buen término las actividades. Esta actitud estaría dentro de lo previsto por lo mencionado anteriormente acerca del contrato didáctico.

¿Pero qué sucede a medida que avanzan en la prueba y van detectando que no pueden llegar a calcular en forma exacta las áreas de las regiones A y B?
Seis de los estudiantes (2, 4, 5, 7, 26, 27), luego de algún intento en la Actividad 1) a), comienzan a argumentar que lo que se les pide nunca les fue enseñado, que no saben hallar áreas de figuras con "lados curvos" o simplemente que no se pueden determinar y alguno de ellos no sigue trabajando en la propuesta.

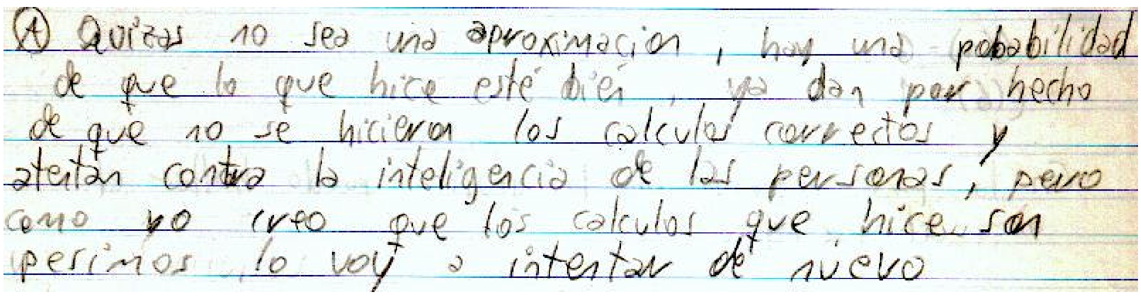
Estos argumentos también son usados por el resto de los estudiantes que sí sigue trabajando al tratar de justificar si los valores que hallan corresponden al área buscada.

La siguiente tabla nos muestra la disposición de los 35 estudiantes al enfrentarse a las diferentes actividades:

	Actividad 1) a)	%	Actividad 2) a)	%	Actividad 3) a)	%
No Calcula Explica	6	17.1	16	45.7	8	22.8
Calcula	28	80	12	34.3	24	68.6
No sabe No contesta	1	2.9	7	20	3	8.6

- Como podemos observar en la tabla, la disposición para resolver el problema inicial es mayoritaria como habíamos dicho. Solo 7 de los 35 estudiantes no intentan calcular el área. Seis de ellos simplemente explican cómo lo harían.

- Al llegar a la segunda actividad sólo doce estudiantes efectúan cálculos para lograr una mejor aproximación del área de la región A y aumenta el número de aquellos que sólo explican cómo procederían. Esto puede deberse a varios motivos. Por un lado algunos estudiantes habían realizado una división de la región de tal forma que los cálculos para determinar el área se hicieron engorrosos. Si seguían trabajando en la misma línea se les podía transformar en una tarea agotadora. Por otro lado en la formulación de la Actividad 2) a) se les dice "El valor que hallaste en la actividad 1 es una aproximación del área de A.", dándoles una información que puede haber influido en su forma de accionar. Se les está diciendo implícitamente que sin importar lo que hayan hecho en la actividad anterior, el entrevistador sabía que no podrían calcular el área. Volvemos a lo dicho anteriormente: se les hace explícita una ruptura del contrato didáctico, a la que no todos estarían preparados. Esto lo podían tomar como un nuevo desafío o por el contrario como una especie de engaño o sub-valoración de su trabajo. Al respecto, el alumno 25 dice:



(A) Quizas no sea una aproximacion, hay una probabilidad de que lo que hice esté bien, yo dan por hecho de que no se hicieron los calculos correctos y atentan contra la inteligencia de las personas, pero como yo creo que los calculos que hice son pesimos lo voy a intentar de nuevo

En el nuevo intento que dice que hará solamente explica un nuevo procedimiento para aproximar el área buscada.

Otro motivo puede estar relacionado con factores de inseguridad en el tratamiento del problema, de cansancio debido a lo extenso de la propuesta, falta de costumbre frente a este tipo de actividad que involucra otro tipo de compromiso diferente al que están acostumbrados o falta de interés al no poder dar una respuesta rápida o inmediata a los cuestionamientos planteados.

- En la tercer actividad, parecería que la propuesta con una nueva curva incentiva a los estudiantes pero en menor medida.

En cuanto a la comprensión de la propuesta, todos los estudiantes parecen comprender qué se les pide y la mayoría detecta y maneja sin grandes problemas aparentes la información proporcionada en el enunciado y en los gráficos.
A pesar de esto hemos comprobado que al momento de realizar los cálculos y estimar la medida de cada una de las regiones que les fueron presentadas se presentan ciertas dificultades que no les permite obtener valores próximos a los reales. Teniendo en cuenta los datos de la tabla anterior de los 28 estudiantes que realizan el cálculo del área de la región en la Actividad 1 a), sólo 5 de ellos se aproximan a la misma con un error menor que 1; en la Actividad 2 a) sólo 5 de 12; en la Actividad 3 a) sólo 6 de 24. De acuerdo a lo anterior se podría inferir que los aprendizajes formales sobre la medida no capacitan, generalmente, para la estimación.

No todos los estudiantes detectaron que la expresión analítica de la función les permitía calcular las dimensiones de las figuras geométricas que ellos mismos dibujaron.

Las siguientes tablas nos muestran el uso o no de esta herramienta por parte de los estudiantes con respecto a la estrategia inicial. Cada una de ellas corresponde a una de las dos propuestas:

Propuesta 1

	Hipérbola	Porcentaje	Parábola	Porcentaje
Usa imágenes	14	78 %	12	85.7 %
Usa regla	3	16.5 %	2	14.3 %
No se sabe	1	5.5 %	0	0 %

- Los tres estudiantes (8, 10 y 35) que, en su primer aproximación al área bajo la hipérbola usaron regla, habían dividido la región en figuras de tal forma, que la determinación exacta de sus dimensiones hubiera sido muy engorrosa o imposible. Lo mismo sucede con los dos estudiantes (8, 10) que usan regla en el caso de la parábola.

Propuesta 2

	Parábola	Porcentaje	Hipérbola	Porcentaje
Usa imágenes	14	82.3 %	8	50 %
Usa regla	1	5.9 %	2	12.5 %
No se sabe	2	11.8 %	6	37.5 %

- Sólo un estudiante (11) que usa regla estaría en condiciones de calcular las dimensiones de las figuras usando la expresión analítica de la función. Los otros no pueden por el tipo de división que hacen.

- En el caso de los alumnos que figuran en “No se sabe”, no se puede determinar el uso de imágenes ya que no realizan cálculos, sólo explican cómo lo harían.

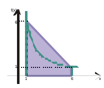
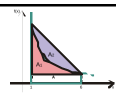
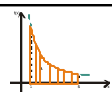
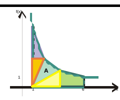
Como habíamos previsto en el análisis a priori, la mayoría de los estudiantes utilizó la expresión analítica para el cálculo de imágenes que les permitieron determinar las dimensiones de las figuras auxiliares que trazaron. Es natural que así lo hicieran ya que vienen trabajando con funciones en forma sistemática desde el Primer año de Bachillerato Diversificado. Además las dos funciones que se les proponen en la entrevista fueron trabajadas en profundidad en dicho curso y están familiarizados no sólo con la expresión analítica de cada una de ellas sino también con sus respectivas representaciones gráficas. Consideramos que es importante que puedan integrar ambos aspectos de la función, que haya interacción entre los registros gráfico, simbólico y algebraico. Esto será importante a la hora de construir la definición de integral definida en donde las aproximaciones gráficas al área bajo la curva deberán ir acompañadas de representaciones simbólicas de las mismas.

IV.2.2. Estrategia inicial

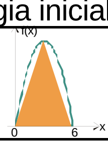
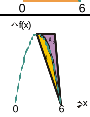
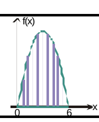
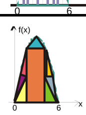
De un análisis primario de las redes presentadas podemos obtener los siguientes datos con respecto a la estrategia inicial para el cálculo del área, abordada por los estudiantes entrevistados al enfrentarse a las actividades que se les presentaron. En cada una de ellas se presenta en forma conjunta el primer intento de cálculo del área

bajo la hipérbola y la parábola, respectivamente, correspondiente a las dos propuestas. Es decir, que en cada tabla presentamos las estrategias elegidas en la Actividad 1) a) de una propuesta y la Actividad 3) a) de la otra propuesta.
Estas dos tablas han sido elaboradas en base al número total de estrategias trabajadas y no al número de estudiantes entrevistados.

Área bajo la hipérbola

Estrategia inicial	Propuesta 1	Propuesta 2	Total	Porcentaje
(H) E 1 	2	2	4	10,5 %
(H) E 2 	4	4	8	21 %
(H) E 3 	5	6	11	29 %
(H) E 4 	8	4	12	31,6 %
No sabe. No contesta.	1	0	1	2,6 %
Otros	0	2	2	5,3 %

Área bajo la parábola

Estrategia inicial	Propuesta 1	Propuesta 2	Total	Porcentaje
(P) E 1 	6	5	11	27,5 %
(P) E 2 	3	3	6	15 %
(P) E 3 	4	4	8	20 %
(P) E 4 	5	5	10	25 %
No sabe. No contesta.	3	0	3	7,5 %
Otros	0	2	2	5 %

En nuestro análisis a priori nos habíamos propuesto, entre otras cosas, observar si los estudiantes utilizan los mismos procedimientos que usaron para ambas regiones, si hubo o no un aprendizaje, una reflexión, un cambio de actitud por parte de algunos estudiantes, etc.

De la lectura de las tablas anteriores podemos observar que parece no haber cambios significativos en cuanto a la elección de la estrategia según sea esta encarada en la Actividad 1 o en la Actividad 3. Esto nos podría estar indicando que no siempre las actividades iniciales condicionarían el trabajo que realizan en la actividad final. Es decir que la estrategia a utilizar, podría estar en algunos casos condicionada por la curva en sí y no por las experiencias previas en la propia entrevista, lo que no coincidiría con lo que habíamos supuesto previamente.

Por estos motivos es que decidimos mirar con mayor detenimiento esta situación y elaboramos la siguiente tabla. En ella pretendemos observar si un mismo estudiante cambia de estrategia a lo largo de la prueba y si los intentos anteriores influyen en su actividad al encarar las actividades siguientes. Para ello se comparan las estrategias usadas en las Actividades 1) a) y 3) a). En el caso de que algún estudiante haya trabajado en más de una estrategia en alguna de estas actividades, hemos elegido la primera que presenta.

	Estrategia usada			**Estrategia usada**	
Número de Estudiante	**Act. 1)a)**	**Act. 3)a)**	**Número de Estudiante**	**Act. 1)a)**	**Act. 3)a)**
1	(P)E2	(H)E2	**19**	(P)E1	(H)E3
2	(P)E1	(H)E4	**20**	(P)E3	(H)E3
3	(H)E2	(P)E2	**21**	(H)E3	(P)E3
4	(H)E4	(P)E1	**22**	(H)E4	(P)E4
5	(P)E1	(H)E1	**23**	(H)E4	(P)E4
6	(H)E3	(P)E1	**24**	(H)E3	(P)E3
7	(H)E2	(P)E2	**25**	(H)E2	(P)E1
8	(H)E4	(P)E3	**26**	(H)E4	-------
9	(P)E3	(H)E3	**27**	-------	-------
10	(H)E4	(P)E4	**28**	(H)E4	(P)E1
11	(P)E4	(H)E3	**29**	(H)E3	-------
12	otro	otro	**30**	(P)E2	(H)E2
13	(P)E4	(H)E1	**31**	(P)E4	(H)E4
14	(P)E3	(H)E3	**32**	(H)E1	(P)E1
15	(P)E2	(H)E2	**33**	(P)E3	(H)E3
16	otro	otro	**34**	(H)E3	(P)E3
17	(P)E1	(H)E2	**35**	(H)E4	(P)E2
18	(P)E1	(H)E4			

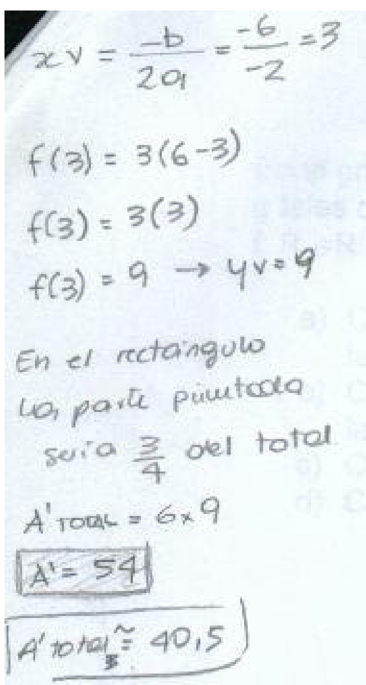
El análisis de esta última tabla nos confirma que es relativamente bajo el número de estudiantes que cambia de estrategia entre las Actividades 1) y 3). Sólo 12 de los 35 estudiantes lo hacen y, de estos 12 estudiantes, sólo 3 se encaminan hacia una estrategia que se podría considerar más cercana a la obra matemática referente al tema que nos ocupa.

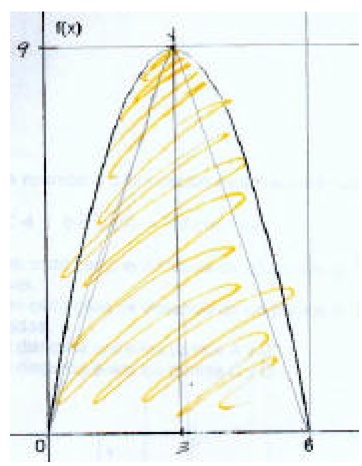
De las tres tablas presentadas podemos además observar que:

- Hay un bajo porcentaje de estudiantes que trabaja en base a particiones del intervalo, que es la estrategia que mejor se adecua a la presentación formal habitual que del concepto de integral se hace en nuestro país.

- Un número importante de estudiantes trabaja con la estrategia que hemos denominado estimación visual. Esta estrategia no involucra el uso de procesos infinitos, los que son necesarios a la hora de enfrentarnos al proceso que lleva a la definición formal de integral.

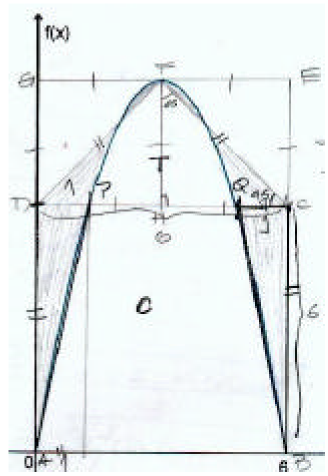
Para analizar este último ítem debemos aclarar primero a qué nos referimos cuando hablamos de la estrategia "estimación visual". En esta categoría hemos incluido a estudiantes que estiman el área de la región con argumentos o explicaciones visuales que pueden ser válidas o no. Por ejemplo, la estudiante 7 determina el área de la región bajo la parábola por estimación visual comparando ésta con el área de un rectángulo, de la siguiente forma:





Otros estudiantes identifican las curvas involucradas con otras curvas. Por ejemplo la estudiante 16 identifica la parábola y la asimila a media elipse. Asegura que calculando el área de la elipse obtendría el área bajo la parábola. Estaría en este caso trasladando el problema original a otra figura que en ninguno de los casos puede resolver.

Por último contamos, dentro de esta estrategia, a estudiantes que comparan el área de la región con el de otra figura, estimando que tienen igual área. Tal es el caso del estudiante 15 que estima que el área bajo la parábola es, según él "a grandes rasgos", igual a la suma de las áreas del cuadrado C de la figura y el triángulo (DCF).



En la mayoría de estos casos los estudiantes obtienen medidas para las áreas muy lejanas a las reales.
Esto evidencia que en etapas previas no se han realizado trabajos en el aula tendientes a que el estudiante aprenda a hacer estimaciones visuales y medición de áreas con cierta relación a argumentar. Es decir, no están capacitados en la tarea de manipular y transformar mentalmente las imágenes visualizadas, capacidad que es necesaria a la hora de estimar medidas de figuras como las que les fueron presentadas.

En cuanto al trabajo de los cinco estudiantes (15, 21, 31, 32, 33) que habían recibido instrucción previa con respecto al calculo de áreas bajo una curva en el curso de informática, del análisis de las redes vemos que sólo uno de ellos (33) trabaja durante toda la prueba en la forma que fue instruido en dicho curso.

Al trabajar con ambas funciones realiza particiones del intervalo en cuestión, cada vez más finas, y culmina su trabajo con el planteo del límite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{1}^{n}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right).\frac{6i}{n}}{2}$$

siendo n el número de intervalos y cada intervalo de la forma $x_{i+1} - x_i$ y $x_i = i.\frac{6}{n}$.

Los restantes estudiantes comienzan su trabajo usando las estrategias **E1**, **E2** o **E4**.
La estudiante 15 trabaja como primer aproximación al área de ambas curvas con la estrategia E2 y para la segunda actividad trabaja con E4. En ningún momento de la prueba se acerca a lo que ella había trabajado en informática. Lo mismo sucede con el estudiante 31.
Los otros dos estudiantes cuando trabajan en la segunda aproximación al área de la región A, parecen evocar lo que habían aprendido y plantean procedimientos en base a particiones del intervalo y afinación de las mismas.

Parecería entonces que el trabajo realizado no produjo gran impacto en los estudiantes ya que solamente la estudiante 33 trabaja durante toda la prueba en el mismo sentido que lo trabajado en informática.

No se apropiaron del procedimiento de tomar particiones, quizás porque no fue diseñado por ellos sino que les fue sugerido por el docente, o quizás porque no hubo una discusión acerca de la eficiencia de diferentes técnicas que les permitieran acercarse al área de una región no poligonal. Esta última hipótesis es muy factible ya que en informática el objetivo era programar determinada estrategia para aplicarla a un problema genérico y no discutir acerca de las ventajas o desventajas de la misma.

IV.2.3. Concavidad de la función

Para analizar si la concavidad de la función es condicionante para la elección de la forma de aproximarse al área de cada región, elaboramos la siguiente tabla. En ella registramos, en base a la primer aproximación de cada estudiante con respecto a cada función, si la cota dada o la forma de aproximar es por defecto o por exceso.

	Hipérbola Concavidad positiva		Parábola Concavidad negativa	
Defecto	4	11.4 %	23	65.7 %
Exceso	18	51.4 %	2	5.7 %
Otros	12	34.3 %	7	20 %
No sabe	1	2.9 %	3	8.6 %

De la tabla anterior podemos deducir que:

- Más de la mitad de los estudiantes eligieron una aproximación por exceso para la función de concavidad positiva. Casi la totalidad de estos 18 estudiantes utilizan trapecios (en forma directa o descompuestos en rectángulo más triángulo) para aproximar. Éste resulta visualmente más conveniente que un rectángulo si de aproximar “mejor” se trata.

- Las dos terceras partes de los estudiantes realizaron una aproximación por defecto para la parábola. Para ello, en general, se eligieron los triángulos y en algunos casos trapecios.

- El número de estudiantes que elige otros caminos en el caso de la hipérbola no es nada despreciable. Siete de estos doce estudiantes trabaja con la estrategia de estimación visual.

En cuanto al tipo de aproximación al área de las regiones que se hizo, las tendencias a acotar por exceso en el caso de la hipérbola y por defecto en el caso de la parábola, coinciden con lo esperado. Es decir que la concavidad de la función parece determinar la elección de acotar por exceso o defecto.

IV.2.4. Uso de la tangente

Hemos observado que un número considerable de estudiantes usa o sugiere el uso de rectas tangentes a las gráficas de las funciones como herramienta que permite dividir a la región en figuras.

Pensamos que la elección de la tangente como herramienta se debe a que sugiere a los estudiantes proximidad a la curva de tal forma que quedaría menor porción de la región sin cubrir. En uno de los textos uruguayos que analizamos en el Capítulo I cuando trata de hacer una descripción de tangente que sea compatible con la noción formal para el caso de funciones (tratándola de diferenciar de la noción griega de la tangente asociada a las cónicas) dice lo siguiente: "Debería ser una recta que *alrededor* de su punto de contacto esté muy *próxima* al gráfico de la función" (Giovannini, 1998). Esto puede estar dándoles la seguridad de proximidad en el sentido antes mencionado. Por lo tanto parece ser coherente esta elección ya que se estaría tratando de llegar a un valor para el área con el menor error posible.

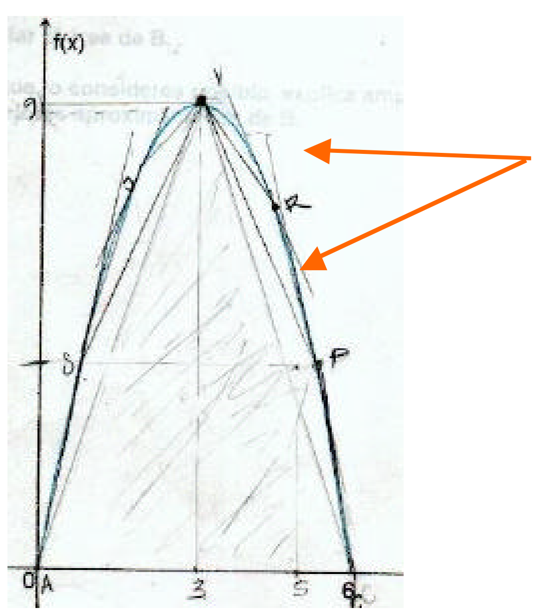
La siguiente tabla nos muestra el número de estudiantes que utilizaron esta herramienta de acuerdo a la propuesta y a la gráfica de la función.

	Hipérbola		Parábola	
	Prop. 1	Prop. 2	Prop. 1	Prop. 2
Actividad 1	6	----	----	2
Actividad 2	6	----	----	1
Actividad 3	----	3	1	----

De esta tabla y de los datos proporcionados por las redes correspondientes podemos inferir:

- De los seis estudiantes que utilizan esta herramienta en la Actividad 1 de la propuesta 1 sólo tres de ellos se mantienen en esta línea de trabajo, por lo tanto en la Actividad 2 se agregan tres nuevos estudiantes.

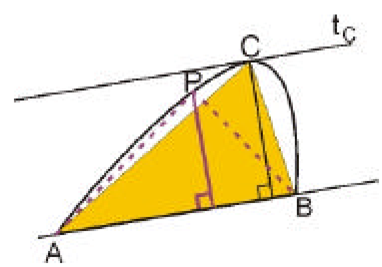
- En el caso de la parábola la estudiante 16 utiliza una tangente y el punto de tangencia lo toma como tercer vértice de un triángulo que inscribe en la misma como se puede apreciar en la figura. Este procedimiento lo repite varias veces en un intento de encontrar un procedimiento que le permita generar mejores aproximaciones. Primero con el vértice (V) de la parábola, luego con los puntos P y S, y finalmente con los puntos R y J (ver figura).



Pero en los hechos elige primero el punto y luego traza por él la tangente, que visualmente da la sensación de ser paralela a la cuerda de la sección parabólica en cuestión. Esto nos recuerda el trabajo realizado por Arquímedes.
¿Cómo y por qué elige estos puntos? Por el tipo de actividad propuesta la idea es encontrar una aproximación del área de la región con el menor error posible. Por lo tanto tiene que buscar una figura, dentro del repertorio de figuras a las que ella sabe calcularle el área, de tal forma que cubra la mayor cantidad posible de la región. Decide trabajar con triángulos inscritos en la parábola. Con el primer segmento de parábola (la región A) el punto V que elige determina con la cuerda AB el triángulo de mayor área posible. Casualmente este punto coincide con el punto de Arquímedes.
Veamos la situación a partir de la construcción de Arquímedes: la tangente t_C (paralela a la cuerda AB) deja a la parábola en un mismo semiplano con respecto de esta. Como C es el único punto de la parábola que pertenece a t_C, los demás puntos de la misma quedan en la franja determinada por t_C y AB.
Además se cumple que $d(t_c, AB) = d(C, AB)$

$\forall P \neq C, P \in (P)$ se cumple que $d(P, AB) < d(C, AB)$

Los triángulos ABP tienen igual base que el ABC y menor altura, por lo que el área del triángulo ABC es la mayor.



De esto se deduce que el punto de tangencia C (punto de contacto de la tangente paralela a la cuerda AB con la parábola) determina con AB el triángulo de mayor área posible.
En el segundo intento, con los dos nuevos segmentos de parábola que quedan determinados, los puntos que elige (S y P) no parecen cumplir con las condiciones antes mencionadas. Por lo menos en lo que se refiere a una apreciación visual. Pensamos, de igual forma, que está intentando cubrir al máximo la región.
En el tercer intento (como lo señalamos en la figura) los puntos R y J parecen cumplir estas condiciones.

IV.2.5. Procesos finitos o infinitos

Cuando se les pide a los estudiantes que expliquen si los procedimientos que utilizaron para llegar a mejores aproximaciones se pueden continuar, en general contestan que si, que dividiendo la región en más figuras geométricas, indicando, en algunos casos, qué figuras geométricas (triángulos, rectángulos, trapecios). Pero la mayoría no especifica cómo continuarían con dicho procedimiento.

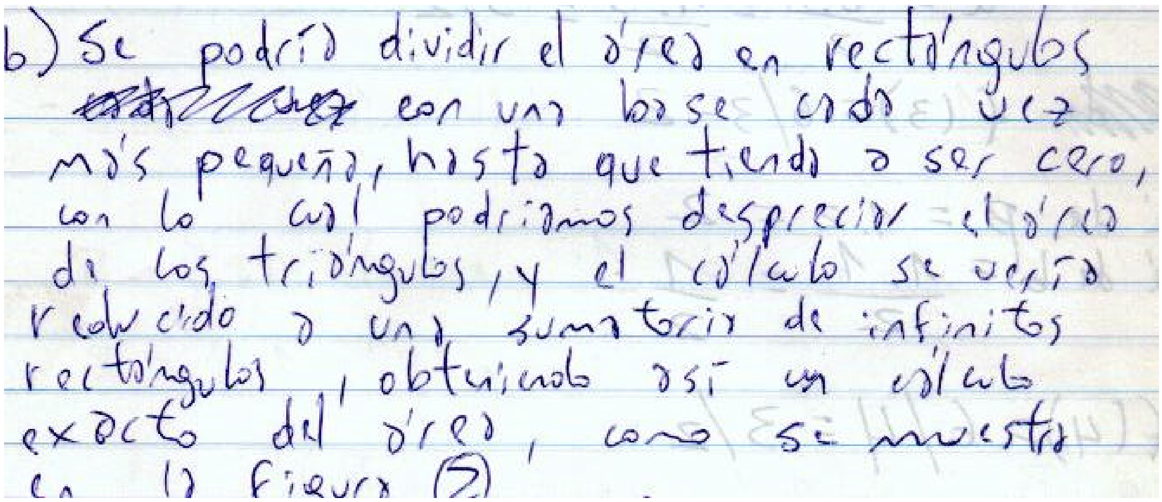
Algunos estudiantes sí hacen explícita la forma de continuar el trabajo. Entre ellos encontramos cinco estudiantes (9, 24, 32, 33 y 34) que indican, de una forma u otra, que los procedimientos determinados por ellos se pueden continuar en forma indefinida.

- Es de destacar que dos de estos cinco estudiantes (32 y 33) son del liceo Ciudad de San Felipe, por lo que ya habían recibido instrucción al respecto.

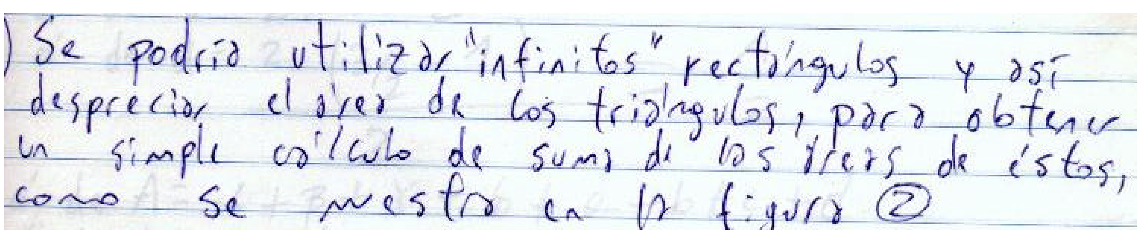
- Los razonamientos y argumentaciones en este sentido de los estudiantes 9, 24 y 32 los veremos en el análisis de casos que presentamos más adelante.

- De la estudiante 33 ya comentamos en el apartado anterior.

- El estudiante 34 trabaja con particiones con el método trapezoidal visualizando un rectángulo y un triángulo. En la parte b) de la Actividad 2 nos explica:


b) Se podría dividir el área en rectángulos con una base cada vez más pequeña, hasta que tienda a ser cero, con lo cual podríamos despreciar el área de los triángulos, y el cálculo se vería reducido a una sumatoria de infinitos rectángulos, obteniendo así un cálculo exacto del área, como se muestra en la figura (2)

Más adelante, en la Actividad 3) b) explica:


) Se podría utilizar "infinitos" rectángulos y así despreciar el área de los triángulos, para obtener un simple cálculo de suma de las áreas de éstos, como se muestra en la figura (2)

Por otro lado tenemos a cuatro estudiantes (10, 14, 18 y 23) que de cierta forma ven el proceso como una serie determinada de pasos concretos que le permitirán calcular el área deseada.

- La estudiante 10 dice que habría que “buscar los triángulos posibles y hallarles el área”. En el contexto de su prueba esto puede ser interpretado como una división ideal de la región en zonas, que ella no logra determinar. Para esto nos basamos en los comentarios que hace con respecto a las divisiones que ella realizó: “no creo que esté cerca ya que los triángulos que dibujé no deben ser los correctos”. Parecería que está pensando que para resolver estos problemas hay predeterminada una forma de dividir la región que el entrevistador sabe y ella no logra determinar.

- El estudiante 14 en cierta medida piensa que la solución del problema pasa por tomar “infinitos trapecios” pero lo ve imposible. Dice que únicamente se puede aproximar tomando "el máximo de trapecios posibles" y calculando posteriormente sus áreas. Vemos, por sus palabras, que este estudiante está visualizando una solución al problema pero pensamos que la figura que se le proporciona para que trabaje le obstaculiza la visión de esta solución. No puede conciliar su imagen visual de la solución con la figura concreta de la región. El espacio físico concreto le permite incluir dentro de la región "el máximo de trapecios posible", lo que lo lleva a descartar la solución a la que había arribado.

- El estudiante 18, en el caso del área de la parábola, trabaja la división de la región inscribiendo triángulos en la parábola, en forma similar a lo realizado por Arquímedes. Da primero una aproximación del área en base a los tres primeros triángulos y luego afirma que "no sería posible encontrar el área total, ya que es lo máximo que se puede meter dentro de la parábola". Como vemos maneja el mismo argumento que el estudiante 14. El espacio físico lo limita.

- La estudiante 23 al explicar sus procedimientos y cómo hallar mejores aproximaciones dice: "con distintas formas geométricas, con más o menos figuras, creo que son infinitas las posibilidades de hallar el área". Al igual que la estudiante 10 tiene la imagen de una división ideal de la región que no sabe si tendrá "más o menos figuras" que las que ella usó. La diferencia con la estudiante 10 es que sospecha que hay infinitas de esas formas ideales.

- Estos cuatro estudiantes, salvo el 14, no generaron o no pudieron generalizar el procedimiento en el cual trabajaron.

Vemos que, en general, los estudiantes que mencionan en sus respuestas la infinitud del proceso generado por ellos, lo hacen en el sentido de la posibilidad de poder determinar en cada etapa de dicho proceso una mejor aproximación. Esto nos da la idea de que poseen una concepción del infinito potencial y no lo ven como algo definido o acabado. El no poder llegar a calcular el área buscada, es decir el no poder terminar el proceso que iniciaron fomenta esta idea de infinito potencial que se puede transformar en un obstáculo a la hora de incursionar en la definición formal del concepto de integral.

El segundo grupo de estudiantes, que hemos considerado que conciben sus procesos como finitos, no logran generar un procedimiento. A pesar que parecerían admitir la existencia del área de la región en cuestión, no creen que se pueda determinar mediante un procedimiento concreto.

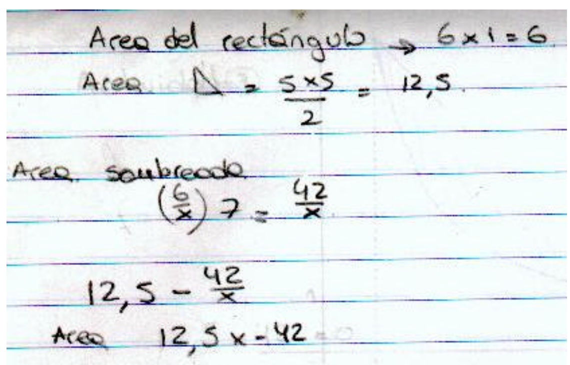
En ambos casos vemos que no logran ver un camino que les permita calcular el área en forma exacta. Unos porque no ven el proceso como algo acabado y los otros porque o consideran imposible la división de la región en "infinitas" figuras o por la imposibilidad, generada por la percepción visual, de que no se pueden agregar más figuras dentro de la región.

IV.2.6. Concepción del área como fórmula

Turégano (1996) nos dice que muchos estudiantes, como resultado de la instrucción recibida desde la escuela primaria, tienen una imagen primitiva del área, generalmente ligada a una fórmula, lo que les impide, entre otras cosas, poder determinar el área de superficies no rectilíneamente limitadas. Es decir que esta visión del área asociada a una fórmula les traería dificultades con las tareas que involucran la determinación de áreas de figuras de las que no disponen de una fórmula para calcularlas.

Compartimos en general estas afirmaciones, sobretodo en lo referente a la imagen de área ligada a una fórmula y presumimos que es una de las causas que generan las dificultades que Turégano menciona.

En las respuestas de varios estudiantes, registradas en esta investigación, aparece esta idea.
Por ejemplo la estudiante 1, al explicar el procedimiento que está realizando para calcular el área, comenta que "llegaría un punto en que podría determinar la ecuación para hallar el área".
La estudiante 12 cuando intenta calcular parte del área bajo la hipérbola usa la expresión analítica de la función en un intento aparente de encontrar una fórmula, pero para otra de las figuras en que divide a la región llega a una aproximación numérica.



Aparentemente en ella conviven estas dos formas de considerar el área, usando una u otra según la situación y la forma en que decodifica la información que se le proporciona.

Ante estas formas de trabajo nos preguntamos: ¿qué es para los estudiantes el área? ¿es un número? ¿es u na fórmula? ¿qué significa para ellos resolver un problema?

En la etapa escolar, cuando se empieza a trabajar con el tema áreas, se realizan actividades tendientes a medir superficies llegando a un número que representa el área buscada. Pero inmediatamente después de la obtención de las fórmulas, se deja de lado toda actividad de medición de áreas y se pasa a trabajar con las dimensiones de las figuras para aplicar las fórmulas. Se pasa entonces a ver el área de las figuras como fórmulas: el área de un cuadrado es lado por lado ($\ell \times \ell$), el área de un triángulo es base por altura sobre dos ($\frac{b \times h}{2}$), etc. En todos los libros que acompañan los cursos aparecen tablas o recuadros que nos recuerdan que, por ejemplo, el área del círculo es $\pi.r^2$, etc. Es decir, el área no se mide realmente sino que se calcula mediante las fórmulas adecuadas. También en el segundo año liceal, al trabajar con expresiones algebraicas muchas veces se les pide a los estudiantes que "calculen" el área de determinada figura en función de un parámetro, queriendo en realidad decir que "expresen" el área en función del mismo. Incluso en algún libro de texto usado para dicho curso aparecen problemas en donde el enunciado pide calcular en vez de expresar. También en Análisis Matemático se trabaja con problemas de optimización en donde está involucrada la función área; el estudiante obtiene una expresión para el área en función de determinadas variables y tratará, según el problema, de maximizarla o minimizarla. Todas estas actividades podrían estar reforzando la idea del área como fórmula, lo que nos llevaría a la afirmación de Turégano.

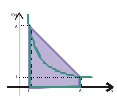
De acuerdo a las respuestas brindadas por algunos estudiantes parecería ser que resolver un problema es hacer operaciones pensando que los datos que se brindan son siempre suficientes y además que hay que utilizarlos todos. Esto nos recuerda que "tradicionalmente el contrato didáctico escolar contiene una cláusula que asegura que, cuando un profesor plantea un problema a sus alumnos, el problema está bien planteado y, en principio, el alumno dispone de los elementos necesarios para resolverlo. [...] los alumnos, [...] suponen que, como siempre, la solución del problema resultará de algunas operaciones aritméticas simples a partir de los datos del enunciado. " (Chevallard et al, 1997).
Pensamos entonces que estos estudiantes intentaron usar toda la información que poseían y podían decodificar, admitiendo como respuesta una fórmula, delegando en el profesor la responsabilidad de la validez de dicha respuesta.

IV.3 ANÁLISIS DE CASOS

De acuerdo a los 35 cuestionarios de los que disponemos y las cuatro categorías por cada propuesta surgidas en el análisis primario de los resultados, es que hemos seleccionado, para presentar a continuación, las pruebas de 8 estudiantes que representan cada una de las estrategias iniciales trabajadas.

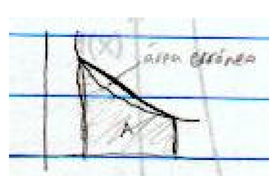
Analizaremos las mismas teniendo en cuenta la pregunta de investigación que nos hemos hecho (¿qué estrategias utilizan los estudiantes de Tercer año de Bachillerato Diversificado al enfrentarse al cálculo de área bajo la curva?) y las preguntas secundarias a saber: ¿se utiliza toda la información que se proporciona en el enunciado de la propuesta?, ¿se trabaja en forma compartimentada o se fusionan elementos de análisis matemático con los geométricos?, la concavidad de la función, ¿influye en la forma de acotar?, ¿hay cambios de estrategias a lo largo de la entrevista?, los procedimientos utilizados, ¿son considerados como procesos finitos?

Propuesta 1

(H) E 1  **Estudiante 32**

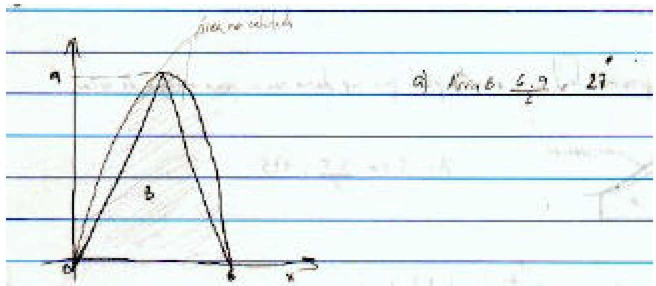
Sebastián es un estudiante que tenía 17 años en el momento de realizar la prueba. Cursaba 6º año de B.D. opción Ingeniería en el Instituto Ciudad de San Felipe. Es uno de los 5 estudiantes que habían trabajado con el cálculo de áreas determinadas por la gráfica de una función continua y no negativa, el eje de las abscisas y dos rectas de ecuaciones x = a y x = b, en el área de informática.[24]

× Sebastián había recibido instrucción previa, trabajando con particiones, afinando las mismas y elaborando algoritmos en base al cálculo de sumas inferiores para el método rectangular y con el método trapezoidal que le permitiría, luego de un número considerable de particiones, llegar a la medida del área buscada. A pesar de esto, en la Actividad 1) a), Sebastián da una cota superior del área buscada con el trapecio de vértices (1,0), (6,0), (6,1) y (1,6).



Algo análogo sucede cuando se enfrenta a la parábola en la Actividad 3) a). Acota por defecto con un triángulo.

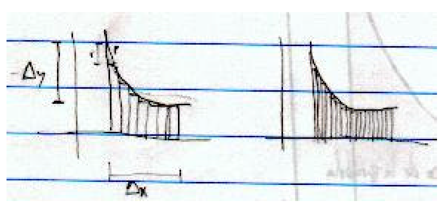
[24] Por más detalles sobre el trabajo ver en el Capítulo III, en la sección de Población entrevistada.



Parecería ser que no se apropió de la instrucción recibida y el trabajo realizado y reacciona frente a la actividad de manera similar a los estudiantes que no tenían la misma experiencia previa.

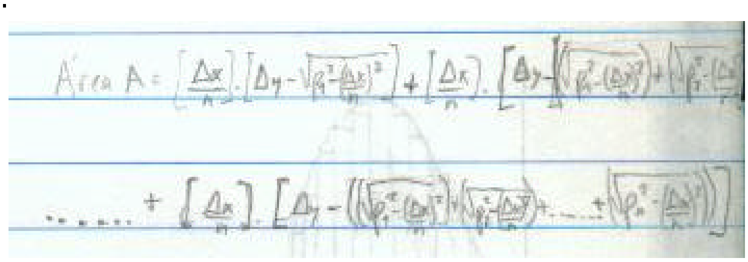
- En las Actividades 1) y 3) antes mencionadas, no se puede deducir si usa o no la expresión analítica de la función para determinar las dimensiones del trapecio y del triángulo respectivamente, que le permiten calcular su área, mientras que en las actividades posteriores sí lo hace. En 1) y 3) reconoce que lo que halla es una aproximación al área buscada.

- En la Actividad 2) a), en la que se le pide que realice una mejor aproximación, parece evocar lo aprendido en informática y divide la región en numerosos rectángulos. Explica cómo realizar una aproximación por defecto, que fue precisamente lo que hizo en informática. Al inicio de su trabajo explicita que "otra manera posible [de calcular el área] es dividir el área A en muchos rectángulos de diferentes áreas". Este estudiante presenta entonces dos formas de abordar esta parte de la actividad.



En la figura anterior se puede apreciar que la intención es afinar la partición.

- No realiza cálculos pero deja planteada el área de la región A como una fórmula en función de n (número de divisiones que realiza en el intervalo), Δx (amplitud del intervalo), etc.

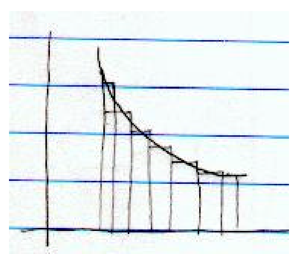


Vemos que a pesar de conocer la amplitud del intervalo en el caso concreto que está trabajando y otras dimensiones, él se limita a plantear una fórmula. No hace mención ninguna a si n lo considera variable o no.
Quizás esté pensando en el área como una fórmula. También, si tenemos en cuenta el ítem anterior piensa en el área como la región (él dice "el área A"). Es decir que

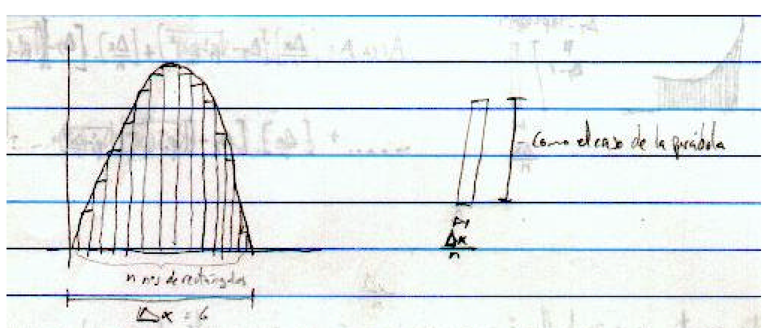
estarían conviviendo en él tres formas de ver al área: como una fórmula, la región misma y como un número que es como responde en la Actividad 1 a).

- En la Actividad 2) b), nos dice que: “por más rectángulos que yo haga nunca se va a poder calcular un valor exacto porque van a seguir quedando espacios libres”.

De igual manera hace otro intento y pasa a trabajar con el método de la ordenada del valor medio.
Dice que esta estrategia le permite aproximar mejor (sabemos que es así) ya que los rectángulos estarían cubriendo parte de lo que denominó los “espacios libres”. No aclara si la nueva aproximación a la que llegaría es por defecto o exceso, si las regiones que quedan por fuera de la región A compensan con las que quedan por dentro, simplemente asegura que sería mejor ya que cubriría las regiones que con el método que usa anteriormente habían quedado sin calcular. Creemos que basa su aseveración en argumentos visuales sin realizar un análisis más profundo.
Señala además que el ancho de los rectángulos aumentaría. Parecería estar comparando esta partición con la que él mismo realiza en la actividad anterior. No logra, por lo menos a través del dibujo, conciliar una partición fina con las condiciones que le impone a los rectángulos de la misma (que el punto medio del “lado superior” del rectángulo debe pertenecer a la curva).



- En la Actividad 3) b), no explica, no realiza cálculos, simplemente realiza una figura de análisis en donde se puede apreciar la partición que realiza.



- En ningún momento de la prueba plantea si el proceso que realiza es finito o infinito. Lo único que nos dice es que nunca se va a llegar a un valor exacto sino que lo que puede encontrar son aproximaciones, lo que se condice con el trabajo realizado en informática.

- En cuanto a si la concavidad de la función influye en el tipo de cota que presenta parecería ser que así lo es. Como lo mencionamos en el análisis de las preguntas realizado en el Capítulo III, y de acuerdo a la primera aproximación que hace, en el caso de concavidad positiva acota[25] por exceso y con la negativa acota por defecto. Esto refuerza nuestra hipótesis al respecto ya que durante la instrucción previa sólo habían trabajado con cotas inferiores. Cuando procede a trabajar con particiones lo hace, en general, por defecto.

Resumiendo

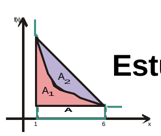
A pesar de la instrucción que recibió en el área de informática, Sebastián se enfrenta a las actividades presentadas, en una primera instancia, de la misma forma que lo hace la mayoría de los estudiantes que no habían recibido ninguna instrucción previa.

A medida que avanza la prueba y se le piden mejores aproximaciones parece recordar lo aprendido y comienza a trabajar con particiones del intervalo. No realiza cálculos, sólo plantea el método que elige por medio de dibujos y fórmulas genéricas.

En sus comentarios, a lo largo de la prueba, se puede observar que parecen convivir en él distintas formas de considerar el área de una región: como fórmula, como la región misma y como un número.

Logra pasar del registro gráfico al analítico sin mayores dificultades, apoyándose en el primero para lograr las "fórmulas" que le permitirían calcular el área. Utiliza en forma natural la información que se le brinda en forma analítica.

No manifiesta si considera los procesos que utiliza como infinitos. Creemos que logra visualizar que a medida que aumenta el número de divisiones del intervalo se va cubriendo la región y se pueden lograr mejores aproximaciones del área de la misma. A pesar de esto no creemos que, hasta el momento de realizada la prueba, haya logrado dar el paso hacia una visión de que estos rectángulos lleguen a agotar el área de la región.

(H) E 2  **Estudiante 3**

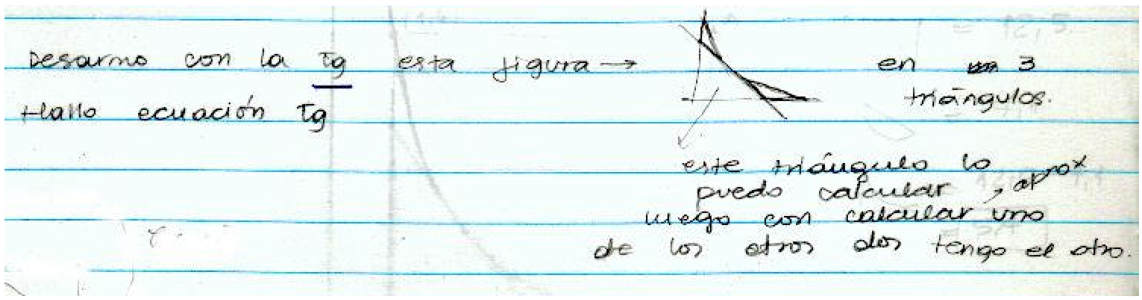
Iara es una estudiante que tenía 17 años en el momento de realizar la prueba. Cursaba 6º año de B.D. opción Arquitectura en el Instituto Ariel.

- En la Actividad 1) a) aproxima mediante estimación visual. Divide la región A en dos regiones: un rectángulo, al cual le puede calcular el área y luego estima un valor para el área de la otra región. Para esto considera el triángulo de vértices (1,1), (6,1) y (1,6) y supone que el área buscada es un poco más que la mitad del área de dicho triángulo. Así llega a que el área de la región A es aproximadamente 12. Ella misma usa el símbolo correspondiente ($\cong$) reconociendo así que no es exacto. Usa luego este argumento para justificar su respuesta de la Actividad 1) b).

[25] Cada vez que mencionemos que un estudiante acota nos estaremos refiriendo al tipo de trabajo que realiza, en el sentido que fue explicado en la sección Primeras reflexiones. En ningún caso los estudiantes hablan de cota sino que se refieren a aproximaciones.

- En la segunda actividad, cuando se le pide que encuentre una mejor aproximación trabaja en dos ideas diferentes.

En la primera traza lo que ella llama “la” tangente a la gráfica. Dicha tangente determina tres regiones, un triángulo y dos regiones limitadas por la gráfica de la función. Iara asocia a estas dos últimas con triángulos. Esto se deduce de sus palabras y la figura de análisis que realiza:

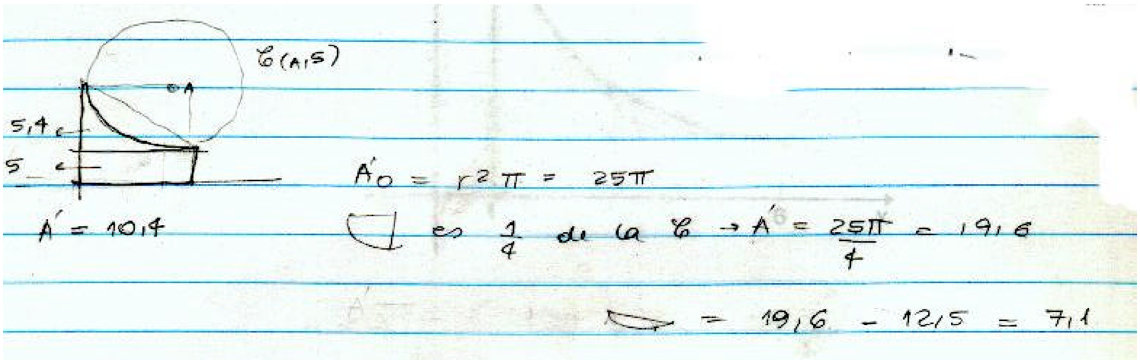


Si observamos el primer comentario de la figura anterior vemos que utiliza a la tangente como herramienta para dividir la región en zonas. Creemos que esta herramienta le da una sensación de confianza. Podría deberse a que la imagen que parece tener asociada al concepto de tangente y la que ella misma dibuja es de aproximación a la curva de manera tal que queda menos región por cubrir debido a la proximidad de la tangente a la curva en un entorno del punto de tangencia. Estamos haciendo referencia a la posible asociación de Iara a la noción de tangente al gráfico de una curva que ya comentáramos en las primeras reflexiones.
Esto acompañado del trabajo realizado en clase en geometría analítica le permiten presumir que podrá efectuar los cálculos con una aproximación aceptable.

- No realiza cálculos. Explica cómo sería el procedimiento. Hallaría la ecuación de la tangente para luego calcular el área de los tres “triángulos” determinados. Elige la tangente de forma tal que coincida con la imagen que se hace de que determinaría dos “triángulos iguales”. Para que esto suceda la tangente debe ser la paralela a la cuerda de extremos en los puntos de coordenadas (6,1) y (1,6).

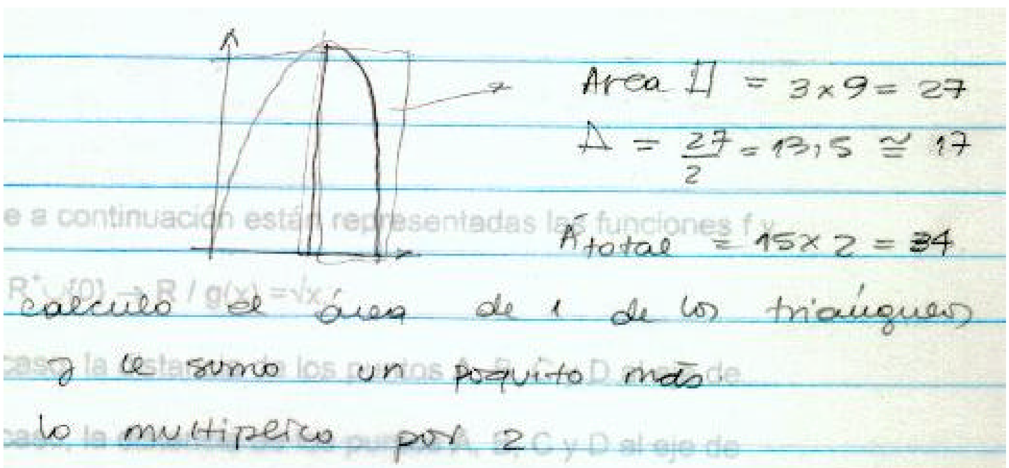
- Parecería hacer uso de todas las herramientas de las que dispone integrando los conocimientos de geometría analítica y análisis que recibió en el curso. Por lo menos en la descripción que hace de cómo procedería.

- La segunda idea en la que trabaja es aproximar la curva a un cuarto de circunferencia. La figura que se le adjunta para que realice los trazados auxiliares que considere necesarios parece llevarla a identificar parte de la hipérbola con parte de una circunferencia. A pesar de ello ella reconoce que la ecuación $y = \frac{6}{x}$ no corresponde a una circunferencia pero dice que el tramo “tiende a ser la cuarta parte de una”.



- En el primer intento Iara trata de buscar figuras conocidas que tengan o parezcan tener igual área a la de la región A o que le parezcan que sean una parte de la región.

- En la Actividad 3) a) recurre nuevamente a la estrategia que denominamos de estimación visual.



Iara hace una estimación visual del área de la región utilizando figuras de las cuales conoce una fórmula para calcular el área.

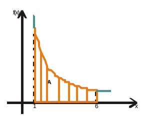
Resumiendo

Como vemos todo el trabajo de Iara se basa en el mismo argumento: buscar figuras conocidas para luego utilizar sus áreas para determinar las que ella está buscando.

Cuando se le pide que busque mejores aproximaciones lo hace por otros caminos que a priori no le aseguran que lo que obtendrá será una mejor aproximación. Podría estar basándose en la imagen visual que ella se hace de las nuevas estrategias a usar. Por ejemplo, cuando utiliza a la tangente como herramienta para dividir la región en figuras conocidas, la puede estar usando además como forma de aproximarse más y mejor a la curva lo que puede darle la impresión que está cubriendo mejor la región. Un razonamiento similar puede estar haciendo con respecto al uso de la circunferencia para aproximar la hipérbola.

En cada una de las actividades da muestras de utilizar toda la información que a priori consideramos relevante y vincula las actividades geométricas con las de cálculo aparentemente sin problema.

La estrategia que utiliza para ambas regiones (E2) no involucra procesos infinitos.

(H) E 3  **Estudiante 24**

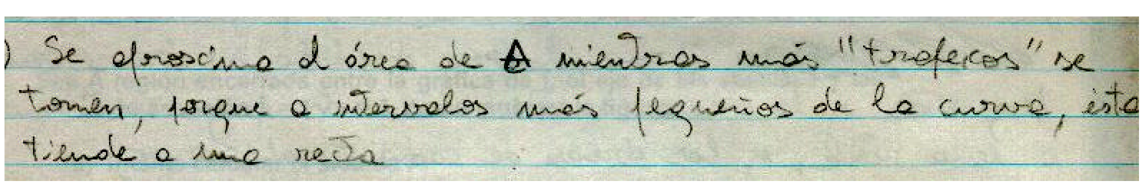
Darío es un estudiante que tenía 18 años en el momento de realizar la prueba. Cursaba 6º año de B.D. opción Ingeniería en el Instituto Héctor Miranda.

En todo su trabajo plantea varias ideas interesantes.

- Toma en el intervalo [1,6] la partición P = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } dividiendo a la región en 5 regiones. Dice que el área de cada una de ellas es "aproximadamente igual al área de un trapecio". Calcula entonces el área de cada trapecio y da una cota por exceso: 56/5. Cabe aclarar que Darío en ningún momento habla de cota por lo que la referencia a la misma corre por nuestra cuenta.

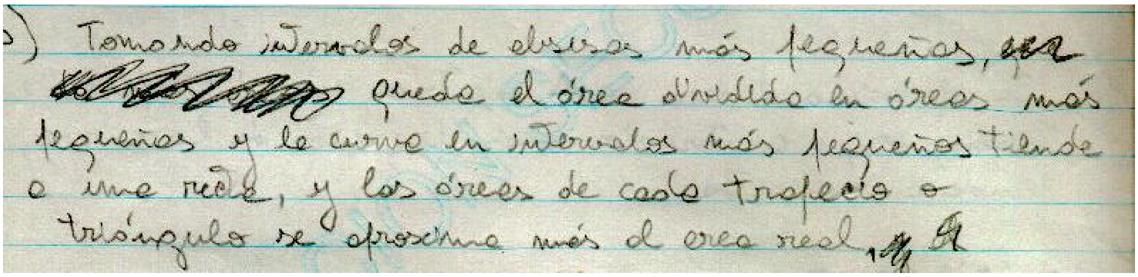
Dos cosas a comentar: Primero que no es el único estudiante que utiliza el método trapezoidal, pero a diferencia de los otros Darío no circunscribe trapecios en la región sino que él relaciona la forma de cada región en que le quedó dividida, con un trapecio. Segundo, usa como herramienta la identificación visual de cada parte de la región con un trapecio. Puede hacerlo a pesar de que, ni en los textos ni en el trabajo en el aula, en los ejemplos prototípicos que se les presentan a los estudiantes, éstos no aparecen con las bases en forma vertical. La mayoría de los estudiantes que usaron este método lo hicieron hallando el área de un rectángulo y de un triángulo.

- En la Actividad 1) b) reconoce que el valor que halló no corresponde al área de A, pero va más allá:

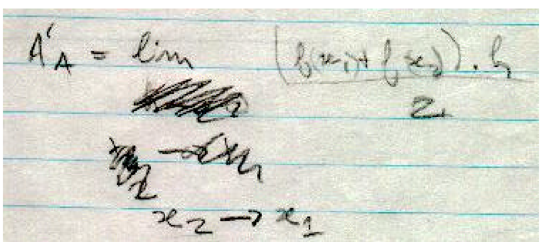

) Se aproxima al área de A mientras más "trapecios" se tomen, porque a intervalos más pequeños de la curva, ésta tiende a una recta

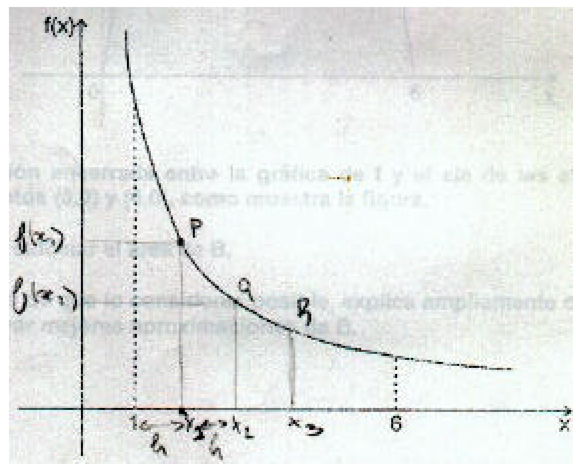
De acuerdo a este último comentario Darío parece tener una concepción de curva similar a la de Leibniz quien consideraba a la curva formada por trozos de segmentos indivisibles de longitud infinitesimal.

Esta concepción de curva y lo dicho anteriormente sobre las regiones cuyas áreas se aproximan a las del trapecio son reafirmadas en la Actividad 3) b) cuando comenta:


) Tomando intervalos de abscisas más pequeños, queda el área dividida en áreas más pequeñas y la curva en intervalos más pequeños tiende a una recta, y las áreas de cada trapecio o triángulo se aproxima más al área real.

- En la Actividad 2) a) no realiza cálculos pero explica como hallaría una mejor aproximación planteando el paso al límite de la siguiente manera:


$$A'_A = \lim \frac{(f(x_1)+f(x_2))\cdot h}{2}$$
$$x_2 - x_1$$
$$x_2 \to x_1$$



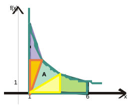
Como podemos apreciar aquí comete un error ya que sólo considera el área de una de las regiones y no la suma de todas, pero a pesar de ello creemos que evidencia un entendimiento claro de la situación. No existen evidencias al respecto pero creemos que este estudiante puede haber tenido algún contacto previo con la teoría del cálculo integral. Por lo que sabemos, de acuerdo al curso en el que está inserto, no debería haber tenido contacto con este tema.

Resumiendo

En su trabajo hay evidencias de que utiliza la expresión analítica para el cálculo de imágenes que le permite determinar las dimensiones de las diferentes figuras en las que divide a la región.

Logra conjugar adecuadamente los métodos y procedimientos del análisis matemático con los geométricos.
Las aproximaciones que realiza hacen el papel de cotas y, como presumíamos en el análisis hecho en el Capítulo III, para la hipérbola son por exceso y para la parábola por defecto.

Podría decirse que estaría considerando el procedimiento que eligió como infinito en la medida de que al plantear el límite está haciendo tender a 0 la amplitud de cada intervalo.

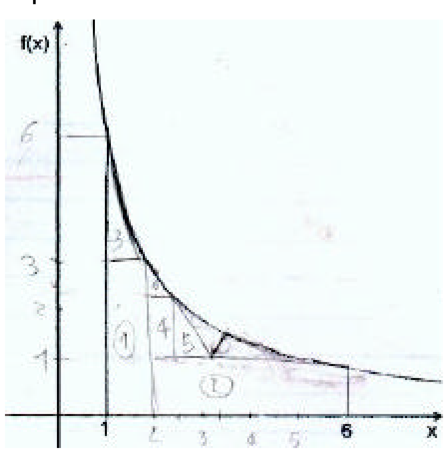
(H) E 4  **Estudiante 8**

Pablo es un estudiante que tenía 16 años en el momento de realizar la prueba. Cursaba 6º año de B.D. opción Arquitectura en el Instituto Latinoamericano.

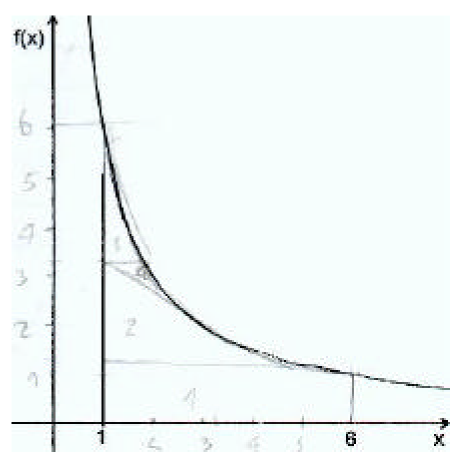
- Realiza un trabajo minucioso durante toda la entrevista. Se esfuerza en los intentos, en los cálculos, en las explicaciones. En otras palabras acepta resolver las diferentes actividades que le son propuestas. Parece suponer, en un principio, que los datos que se le proporcionan son suficientes para resolver el problema y que puede hacerlo con las herramientas de las que dispone.

- En la Actividad 1) inscribe la región en un rectángulo y lo divide en figuras conocidas (esto es figuras de las que conoce cómo calcular su área) usando tangentes. La visualización juega aquí un papel importante en la elección de la tangente como herramienta para dividir la región, ya que la proximidad de la misma a la curva le puede estar dando la seguridad de una mejor aproximación.
Usa las imágenes para determinar algunas dimensiones y en aquellas que considera que no las puede obtener de esta forma usa la regla. Luego realiza los cálculos. No confía en las herramientas que utiliza y manifiesta que: “El valor hallado en la parte a) no es exacto porque al trazar la tangente a la curva de la gráfica hay errores de trazado, también hay errores de escala y de aproximación”.

- En la Actividad 2) a) divide a la región en menos figuras que antes. Dice que será más precavido en los trazados.



Actividad 1) a)



Actividad 2) a)

No confía que con estas precauciones mejore la aproximación.

- En la Actividad 3) a) nuevamente realiza un trabajo minucioso usando, según lo considere apropiado, las imágenes o la regla para determinar las dimensiones de las figuras en que divide a la región.
Hace dos intentos. Uno por exceso y otro por defecto a pesar de lo cual los dos resultados que obtiene superan el área buscada. Analizados los cálculos realizados

por él y las mediciones correspondientes en la figura de análisis este error se debe a las mediciones que realizó con la regla.

- En el segundo intento parecería que busca una regularidad al hacer la división de la región. Primero que nada trabaja sólo con el intervalo [0,3] ya que se da cuenta de la simetría de la parábola. Se puede apreciar que realiza una división semejante a una partición sobre el eje vertical y a partir de ahí calcula el área de tres trapecios. Parece que la experiencia de lo trabajado en las actividades anteriores redunda en una mejora en el método de trabajo, en cuanto realiza un trabajo más ordenado, más regular.

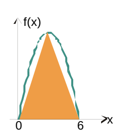
Resumiendo

A medida que avanza en la entrevista va adquiriendo cierta regularidad en su trabajo pero no llega a generar un procedimiento que le asegure obtener mejores aproximaciones al área buscada. No creemos que él esté pensando en un procedimiento en este sentido sino que hace intentos por diversos caminos sin llegar a profundizar ninguno. Por todo esto tampoco creemos que esté cerca de concebir a alguno de sus procedimientos como infinito.

En su caso la concavidad de la función no incide en su forma de acotar ya que en los diversos intentos que hace para ambas regiones trabaja a veces por defecto y otras por exceso.

Se aprecia la utilización tanto de herramientas concretas como cognitivas.

Propuesta 2

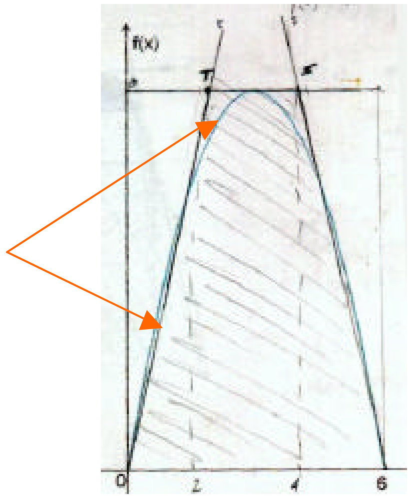
(P) E 1 

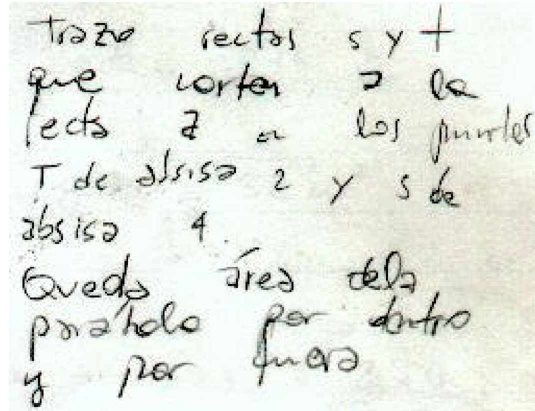
Estudiante 17

Álvaro es un estudiante que tenía 18 años en el momento de realizar la prueba. Cursaba 6º año de B.D. opción Ingeniería en el Instituto Héctor Miranda.

- Con el argumento “el área bajo la parábola contiene dentro de sí el área de un triángulo de igual base fácilmente calculable”, Álvaro determina el área del triángulo inscrito. Vemos claramente la intención de dar una respuesta rápida, sencilla, aunque sabe que no es lo que se le pide.

- En la Actividad 1) b), en lugar de contestar lo que se le pregunta intenta buscar otra aproximación del área para lo cual cambia de estrategia. Hace varios trazados auxiliares en las figuras de análisis que le fueron proporcionadas en la búsqueda de un trapecio que, a su entender, sea equivalente al segmento de parábola. Intenta primero con tangentes a la parábola y finalmente opta por trazar dos rectas por los puntos de coordenadas (0,0) y (6,0) respectivamente y que corten a la recta de ecuación y = 9 en los puntos de abscisa 2 y 4 respectivamente.





El área del trapecio determinado es exactamente la misma que la de la región A. Pero Álvaro no confía en el valor hallado y hace un promedio de los dos valores que determinó. La figura y los trazados que realiza en la misma le impiden conjeturar la equivalencia de las dos regiones: el segmento de parábola y el trapecio.

En cuanto a esta segunda estrategia queremos hacer algunos comentarios:

Parecería que trabaja en el mismo sentido que lo planteado por Anzalone[26] (2001), de buscar una figura equivalente, por sus comentarios de que queda área por dentro y por fuera de la parábola. Pero la figura de análisis no lo ayuda. Visualmente no percibe que las regiones del trapecio que quedan por fuera de la parábola son equivalentes a las que quedan por dentro (señaladas por las flechas en la figura), lo que deja en evidencia el papel preponderante de la visualización en este caso. Creemos que es por este motivo que hace finalmente un promedio.

- En la Actividad 2) acota por defecto con un trapecio inscrito en el segmento de parábola de vértices (0,0), (6,0) (4,8) y (2,8) y un triángulo también inscrito. Se cuida bien en esta oportunidad de que no haya regiones que queden por fuera de la región A. Para ello calcula las imágenes de 2 y 4.

- Cuando trabaja en la Actividad 3) a) también utiliza esta estrategia de estimación visual utilizando como herramienta para la división de la región la recta que pasa por los puntos de coordenadas (6,0) y (0,6). Previamente hizo el intento con tangentes a la hipérbola.

- En la Actividad 3) b) plantea que se puede aproximar más al área de la región B. Dice que "todo depende de los recursos geométricos utilizados, cuanto más se usen menos será el error." Cuando habla de recursos geométricos parece referirse a las figuras geométricas que determina en la región.

Resumiendo

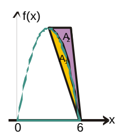
En los intentos para determinar figuras auxiliares para aproximar las áreas bajo la parábola y la hipérbola descarta, en general, las tangentes a las gráficas. Recordemos que dispone de las herramientas que le brindan los cursos de análisis matemático y el de geometría analítica para determinar ecuaciones de las tangentes, los puntos de

---

[26] Ver Capítulo III, estrategias 5 y 6 para el cálculo del segmento de parábola.

intersección de éstas con la parábola o hipérbola, las dimensiones de las figuras, etc. Creemos que la elección de determinadas herramientas y el descarte de otras se debe a que le sería difícil determinar las dimensiones necesarias para calcular las áreas correspondientes. En determinado momento él dice que las figuras deben ser aquellas que "nos es fácil de calcular".
No es que consideremos esencial el uso de las ecuaciones de las tangentes para el trabajo del cálculo de áreas. Hacemos estos comentarios en la medida de las argumentaciones y explicaciones que los propios estudiantes hacen de ellas al ir respondiendo a los cuestionamientos de la prueba.

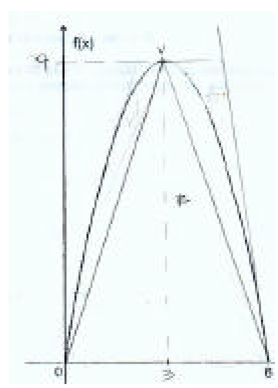
Parecería que la concavidad de la de la primer función influye en su acotación por defecto. En el caso de la hipérbola no podemos decir nada.

(P) E 2 

Estudiante 1

Tatiana es una estudiante que tenía 17 años en el momento de realizar la prueba. Cursaba 6º año de B.D. opción Arquitectura en el Instituto Ariel.

- En la Actividad 1) a), la primer aproximación la hace estimando el área y usa para ello un triángulo con uno de sus lados contenido en la tangente a la gráfica de la función en el punto de coordenadas (6,0). En él se incluye parte de la región encerrada por la parábola. Estima que la mitad del área de dicho triángulo es la que corresponde al segmento de parábola. Es decir que estaría considerando que las regiones que quedan por dentro y por fuera son equivalentes.



Plantea en forma genérica la ecuación de la tangente no aludiendo a la derivada primera en x = 6 como la pendiente de dicha recta. Ella cuenta con esta herramienta pero no la tiene en cuenta o no la evoca en ese momento. Esta situación parece evidenciar la compartimentalización y la falta de vinculación que se hace en los cursos de geometría y análisis.
Nuevamente queremos destacar que la importancia que parecemos estar dando a la ecuación de la tangente y su coeficiente angular es en la medida de las propias argumentaciones de la estudiante.

- En la Actividad 2) a) cambia de estrategia ya que inscribe figuras conocidas (de las que conoce las fórmulas para calcular el área) dentro del segmento de parábola.

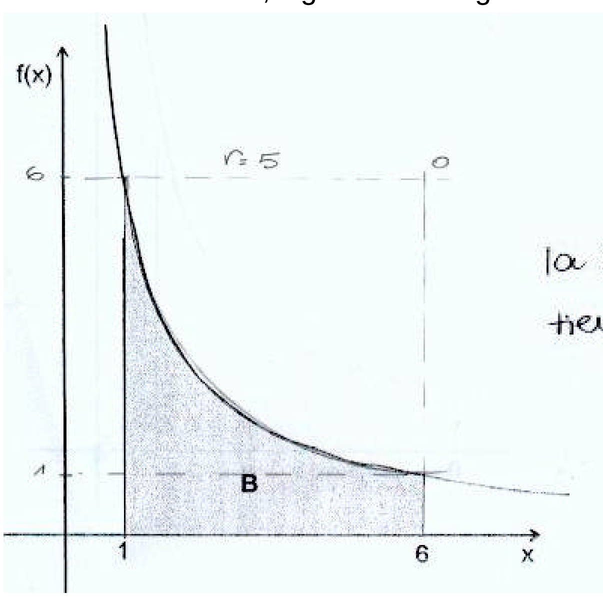
Explica que cuanto mayor cantidad de figuras pueda poner dentro la aproximación será mejor. Aquí se evidencia que está pensando en aproximaciones por defecto.

- Parecería por sus palabras

) como poder, se puede, pero creo que llegaría un punto en él que podría determinar una ecuación para hacerlo.

que por medio de este proceso puede determinar una fórmula para calcular el área. Esta supuesta fórmula estaría satisfaciendo una necesidad generada por la forma de trabajo a que el sistema la tiene acostumbrada: para todo una fórmula que soluciona los problemas. En esta oportunidad no realiza cálculos, simplemente explica.

- En la Actividad 3) a) inscribe la sección hiperbólica en un rectángulo y apunta que el borde de la región contenida en él que no corresponde a la región B "tiende" a un cuarto de circunferencia, logrando así llegar a un valor para el área de B.



la curva del área encerrada tiende a una circunferencia.

La visualización juega en esta oportunidad un papel relevante ya que lleva a Tatiana a identificar parte de la hipérbola con un cuarto de circunferencia lo que es relevante en el momento de elegir la estrategia para aproximarse al área de la región B. Esta similitud que encuentra en las curvas le estaría dando la seguridad por la proximidad ya que menciona que una tiende a la otra.

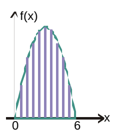
Resumiendo

La estrategia principal que utiliza en la prueba es la de estimación visual del área buscando figuras que sean equivalentes a las de las regiones A y B.

Al igual que en muchas de las pruebas, aparece aquí la elección de la tangente como herramienta concreta para la determinación de figuras. Es una herramienta que conoce bien, que podría determinar perfectamente pero no puede articular las herramientas geométricas con las de análisis matemático.

En esta prueba no se puede observar si la concavidad de las funciones influyen o no en la forma de acotar.

Al decir que se llegaría a una ecuación para determinar el área de la región evidencia la seguridad de que debe haber una fórmula que dé solución al problema. Ella no puede hacerlo con los elementos que cuenta por lo tanto tiene que existir una ecuación a la cual acudir. Como podemos ver aquí entra en juego una de la cláusulas del contrato didáctico asociado al tema área que, de acuerdo a la experiencia previa de los estudiantes, le está exigiendo la fórmula correspondiente que resuelva el problema.

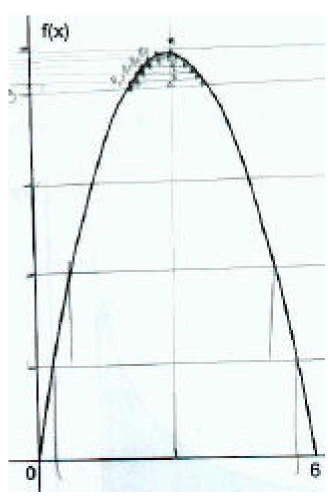
(P) E 3 

Estudiante 9

Diego es un estudiante que tenía 17 años en el momento de realizar la prueba. Cursaba 6º año de B.D. opción Arquitectura en el Instituto Latinoamericano.

- En la Actividad 1) a) hace una partición del intervalo [0,9] del eje de las ordenadas: $P_{[0,9]} = \{ 0, 2, 4, 6, 8, 9 \}$. Calcula las correspondientes preimágenes en forma algebraica. Trabaja por defecto. La región queda dividida en una serie de trapecios y un triángulo en el intervalo [8,9]. El área de cada trapecio la calcula sumando las áreas de un rectángulo y dos triángulos. De acuerdo a la imagen que se hace de la figura parece no "ver" los trapecios. Llega así a un valor aproximado de 35,5.

- En la Actividad 2) afina la partición hecha en la Actividad 1) obteniendo ahora $P_{[0,9]} = \{ 0, 2, 4, 6, 8, 8.2, 8.4, 8.6, 8.8, 9 \}$. Nuevamente determina las preimágenes analíticamente. Obtiene ahora un valor aproximado de 35,75.



Como se puede apreciar en la figura, deja de trabajar con trapecios y triángulos y considera ahora solamente rectángulos.

Parece darse cuenta que al afinar la partición y quedar dividida la región en más figuras, el error de aproximación que estaría cometiendo es cada vez menor y aproximarse más a la curva con un trapecio no cambiaría mucho la situación. Esto queda evidenciado cuando, al explicar cómo sería el procedimiento, reconoce explícitamente que puede aproximarse mejor mediante un proceso infinito, dividiendo en un número de rectángulos cada vez mayor.

- En la Actividad 3) a) continúa trabajando con particiones pero esta vez sobre el eje de las abscisas. Vuelve a trabajar con trapecios y, al igual que en la Actividad 1), determina su área como la suma de las áreas de un rectángulo y un triángulo. Calcula las imágenes para realizar los cálculos del área de cada figura en la que divide la región. Trabaja ahora por exceso.

- A pesar de trabajar con trapecios, cuando explica cómo llegar a una mejor aproximación, habla de dividir en rectángulos mencionando nuevamente que se trataría de un proceso infinito.

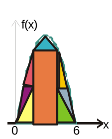
Resumiendo

Diego utiliza y aprovecha toda la información que se le brinda en los enunciados de la propuesta y amalgama sin dificultades las herramientas y procedimientos que le brinda la geometría y el álgebra.

Hay evidencias que la elección de la forma de acotar se ve influenciada por la concavidad de cada función, haciéndola en la forma prevista en el análisis preliminar.

Se mantiene durante toda la entrevista en una misma línea de trabajo, usando particiones, primero sobre el eje de las ordenadas y luego sobre el eje de las abscisas. Este último cambio podría deberse a la dificultad, o al trabajo más pesado que significa el cálculo de preimágenes.

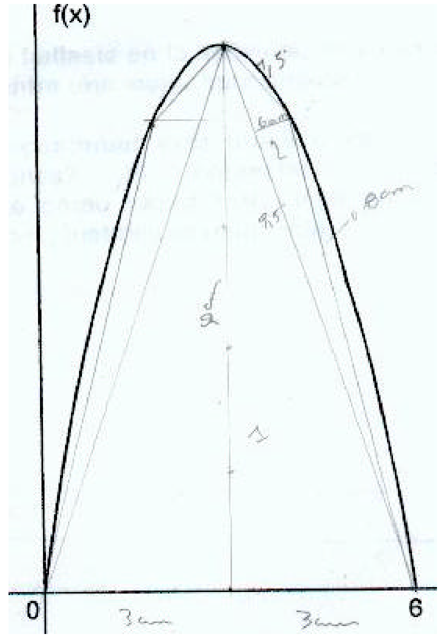
Considera que el procedimiento que acaba de crear para aproximarse al área de las diferentes regiones se puede repetir en forma indefinida. Explicita que se trataría de un proceso infinito.

(P) E 4 

Estudiante 11

Ana es una estudiante que tenía 17 años en el momento de realizar la prueba. Cursaba 6º año de B.D. opción Arquitectura en el instituto Héctor Miranda.

- En la Actividad 1) a) calcula el área del triángulo interior y sobre los lados iguales traza dos triángulos. Utiliza imágenes y mediciones con regla ya que se da cuenta que el dibujo está a escala 1:1. Trabaja por defecto.



- Si observamos la figura de análisis de Ana vemos que el triángulo que traza primero tiene base en la cuerda del segmento de parábola y el tercer vértice es el punto de la curva que determina el triángulo de mayor superficie posible. Éste coincide con el punto de intersección de la recta tangente a la parábola paralela a la cuerda del segmento de parábola. Este triángulo determina dos nuevas secciones parabólicas y en cada una de ellas construye un nuevo triángulo. Esta forma de trabajo nos recuerda a la que utiliza Arquímedes[27] en su demostración de que el área del segmento de parábola es 4/3 del área del triángulo inscrito.

La pregunta es entonces cómo determina Ana el tercer vértice de cada uno de estos triángulos. Parecería ser el punto de la parábola que se encuentra a mayor distancia de la cuerda. Determina así el triángulo de mayor área que se puede obtener con un lado en la cuerda del segmento de parábola. Creemos que es así, ya que Ana estaría buscando una figura que cubra la mayor superficie posible. Esto lo manifiesta en la parte b) de esta actividad cuando dice que la región está limitada por una parábola y "no tengo un dbujo que pueda completar en su totalidad el área". Aquí vemos que Ana, como muchos de los estudiantes entrevistados, está tratando de visualizar, de buscar dentro de la colección de figuras geométricas que maneja y de las que sabe como determinar el área, una que cumpla con las condiciones exigidas por la región.

Si esta es la estrategia usada por Ana, entonces el tercer vértice que determina en cada etapa coincide con el de Arquímedes.

- En la Actividad 2) a) cambia de estrategia y realiza una "especie" de partición del intervalo sobre el eje de las ordenadas. Divide a la región en trapecios que ella no "ve" o sí visualiza pero quizás no recuerda su fórmula. Por lo tanto calcula las áreas de los rectángulos y triángulos en que queda descompuesto cada trapecio. Mide con regla.

[27] Ver Capítulo I, Componente epistemológica.

- De acuerdo a sus dichos cree que mejora la aproximación ya que observa que quedan menos regiones por cubrir. Nada le asegura que esta nueva división, que obtiene con el cambio de estrategia, le permite mejorar la aproximación. Se basa únicamente en argumentos visuales. En los hechos llega a una mejor aproximación pero ella no lo puede saber.

- En la Actividad 3) nuevamente trabaja con una partición (irregular) en el eje de las ordenadas dividiendo en rectángulos y agregando triángulos para aproximarse mejor. De nuevo lo visual es lo que determina las figuras que elige para descomponer a la región B. Su aproximación es por exceso.

Resumiendo

Trabaja, en una primera instancia, de tal forma que nos recuerda el trabajo realizado por Arquímedes en la etapa de formalización de la demostración del cálculo del área del segmento de parábola. Aparentemente elige los mismos puntos que Arquímedes para determinar triángulos que cubran la mayor área posible. Utiliza para ello diversas herramientas y toda la información que se le proporciona.

Según la concavidad de la función de que se trate acota por defecto o exceso, de acuerdo a lo que habíamos previsto.

Hay un cambio de estrategia a lo largo de la prueba. Si hubiera continuado su trabajo con la inscripción de triángulos el trabajo hubiera sido bastante más complicado. Creemos que esta experiencia le hace buscar otro camino que le provea de cierta regularidad y que le facilite los cálculos. Es así que comienza a trabajar con particiones sobre Oy.

No creemos que haya pensado en ningún momento en si sus procedimientos se podrían continuar indefinidamente.

IV.4. RESULTADOS OBTENIDOS A LA LUZ DE LAS CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Analizaremos aquí los resultados obtenidos teniendo en cuenta las consideraciones teóricas desarrolladas en el Capítulo I, las primeras reflexiones y el análisis de casos. En estos dos últimos apartados ya incorporamos el análisis de las preguntas secundarias, que como dijimos al inicio de este trabajo, nos ayudarán a alcanzar el objetivo principal, a saber:

Detectar cuáles son las estrategias que utilizan los estudiantes de Bachillerato Diversificado al enfrentarse al cálculo de área bajo una curva, para analizar las ventajas, desventajas, dificultades y limitaciones que las mismas pueden generar al momento de tratar el tema formalmente.

Para el análisis de los resultados haremos una reflexión desde las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica. Esto nos permitirá una visión compleja, y si se quiere sistémica, de la problemática a estudiar.

La dimensión epistemológica nos permite conocer los obstáculos que enfrentaron los hombres a lo largo de la historia en la construcción de los significados y conceptos matemáticos, vinculados en este caso a la integral definida. Conocerlos en profundidad nos brinda información acerca de los posibles obstáculos y dificultades que pueden enfrentar los estudiantes cuando deben abordar tales conceptos. Es por ello que analizaremos si las estrategias de nuestros estudiantes recrean de alguna forma los pensamientos y argumentos utilizados por los matemáticos en la génesis del concepto.

Desde el punto de vista cognitivo, analizaremos los resultados utilizando el concepto de visualización que presentan Zazkis et al. (1996) y Zimmermann y Cunningham (1991a) y las consideraciones presentadas por Vinner (1991) en términos de imagen del concepto – definición del concepto.
Estos elementos teóricos nos permitirán interpretar las concepciones de los estudiantes y poder así dar explicaciones acerca del tema que nos ocupa.

Los elementos reseñados en la componente didáctica nos brindan elementos útiles para acercarnos a lo que son las prácticas de aula. En un país donde solamente el 13.5% de los docentes son titulados, creemos que los libros de texto nos permitirán de alguna forma tener una noción de qué se enseña y cómo se enseña ya que creemos que constituyen los principales puntos de referencia para aquellos profesores que no han logrado completar su formación inicial.
También nos brindan información acerca del discurso docente y del enfoque didáctico del tema.
Esta componente aparecerá interrelacionada con lo epistemológico pues nos interesa detenernos en la relación entre la evolución histórica del concepto y la presentación que se le da en el aula.

También pretendemos comparar algunos de los resultados obtenidos en esta investigación con los de:

- Dubinsky et al. (2000), acerca de las concepciones de área de estudiantes universitarios.

- Calvo (1997) sobre dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las integrales y otros aspectos concernientes a la presentación de las integrales a partir de la noción de área.
- Turégano (1994, 1996, 1998) vinculados al aprendizaje de la integral y el concepto de área.

Una reseña de los mismos es presentada en el Capítulo II de este trabajo.

IV.4.1 Nuestros entrevistados

Recordemos que para la presente investigación se trabajó con estudiantes del Tercer Año de Bachillerato Diversificado[28]. Éstos realizaban sus estudios en liceos estatales (19 estudiantes) y liceos privados (16 estudiantes).
Las edades de los mismos oscilan entre los 16 y 18 años. Hay dos estudiantes de 16 años, diez de 18 años y veintitrés de 17 años.
Dieciséis de ellos son estudiantes de B.D. opción Arquitectura y diecinueve de opción Ingeniería. Todos provienen de una rama común, orientación Científica, según muestra el siguiente cuadro:

1º BD	2º B.D. Orientación	3º B.D. Opción
Común	Humanístico	Derecho
		Economía
	Biológico	Agronomía
		Medicina
	Científico	Arquitectura
		Ingeniería

El carácter de la prueba fue voluntario.

IV.4.2 Análisis de los resultados relacionados con el objetivo de nuestra investigación

Como ya se mencionó, en el análisis inicial se detectaron dos estrategias fundamentales que son la división de la región en figuras entre las que se encuentran aquellas que les son familiares a los estudiantes y para las cuales creen tener herramientas para determinar sus áreas y lo que hemos denominado "estimación visual". En esta última categoría hemos incluido a estudiantes que estiman el área de la región con argumentos o explicaciones visuales que pueden ser válidas o no. Algunos de ellos determinan figuras familiares que consideran equivalentes a la región

[28] Por más datos ver Anexo III.

que analizan; otros identifican las curvas involucradas con otras curvas, otros estudiantes que comparan el área de la región con el de otra figura, estimando que tienen igual área. Esta estrategia no involucra el uso de procesos infinitos, los que son necesarios a la hora de enfrentarnos al proceso que lleva a la definición formal de integral definida.

Dentro de la primer estrategia distinguimos tres sub-estrategias en base a la frecuencia de las respuestas, al interés de acuerdo a los objetivos de esta investigación o por considerar que es una estrategia que mejor se adecua a la teoría matemática.

Estas tres sub-estrategias junto a la estimación visual conforman las cuatro estrategias en las que hemos basado nuestro análisis:

E 1 Acota por exceso con trapecio y por defecto con triángulo respectivamente.
E 2 Aproxima mediante estimación visual, comparando el área de la región en cuestión con la de una figura de la cual conoce cómo calcular su área.
E 3 Usa partición sobre alguno de los ejes.
E 4 Divide a la región en figuras conocidas de las que conoce cómo calcularles el área.

En la elección, por parte de los estudiantes, de cualquiera de estas cuatro estrategias, la visualización juega un papel preponderante. En E1, E3 y E4, la división que se hace de la región en cuestión depende, no sólo del repertorio de figuras conocidas (triángulo, rectángulo, trapecio) que manejan los estudiantes sino también de la concavidad de la función involucrada, de la percepción que tiene el estudiante de cómo cubrir en forma más efectiva la región, de la manipulación mental o con la ayuda de la figura de análisis que hace de las figuras.
Como hemos visto, un gran porcentaje de los estudiantes entrevistados, al enfrentarse al cálculo del área de las dos regiones, y con referencia a estas tres estrategias, tienen cierta habilidad para realizar una interpretación de la situación y representar una figura de análisis adecuada que les permite encaminarse a lo que consideran una solución del problema.

En el caso de la estrategia E2 (Estimación Visual) vemos que algunos estudiantes, al comparar la región a la que se pide calcular el área con otra que “ven” como equivalente llegan a resultados muy lejanos a los reales debido a que la supuesta equivalencia no es tal. Esto evidencia la falta de experiencias previas en el trabajo de aula que involucre la realización de estimaciones visuales y medición de áreas con cierto grado de exactitud, o que las experiencias en este sentido no son suficientes para realizar estimaciones confiables.
A pesar de esto sabemos que en la vida cotidiana, es decir en un ámbito fuera del aula, es necesario resolver determinados problemas que llevan al individuo a realizar estimaciones y de acuerdo a investigaciones a este respecto sabemos que las mismas se realizan en forma efectiva.
Entonces, ¿qué sucede en el aula?
De acuerdo a los resultados obtenidos en cuanto a la estimación visual de la medida en esta investigación, podríamos inferir que los aprendizajes formales sobre la medida, si es que los hubo, no capacitaron a nuestros estudiantes para la estimación y, al contrario. La estimación de medidas es un proceso mental que se basa en el conocimiento internalizado de unidades de medida referenciales que son objetos

conocidos por el individuo, como ser metro, tazas, pies, etc. En la tarea de estimación el individuo debe hacer manipulaciones mentales de esas unidades para, mediante la comparación, lograr dar una aproximación. Las estimaciones dadas por nuestros estudiantes, como ya se dijo, evidencian la falta de capacitación en la tarea de manipular y transformar mentalmente las imágenes visualizadas, capacidad que es necesaria a la hora de estimar medidas de figuras no rectilíneamente delimitadas.

✘ A pesar que en esta investigación no se preguntó a los estudiantes acerca de su concepción de área podemos, en base a sus respuestas y al análisis de las mismas, describir someramente las imágenes conceptuales de los estudiantes asociadas a la palabra área. Podemos decir que nuestros estudiantes asocian la palabra área con una fórmula, con un número o con un espacio a cubrir. Esta última fue la imagen mayoritariamente detectada. En nuestra investigación en algunos casos fueron evidenciadas más de una de estas imágenes en un mismo estudiante, como por ejemplo el estudiante 32, caso que fue presentado en este mismo capítulo.

Coincidimos con Turégano (1996), en que las imágenes asociadas al concepto de área de muchos de nuestros estudiantes, como resultado de la instrucción recibida desde la escuela primaria, son primitivas y generalmente están ligadas a una fórmula, lo que les impide, entre otras cosas, poder determinar el área de superficies no rectilíneamente delimitadas. Es decir que esta visión del área asociada a una fórmula les traería dificultades con las tareas que involucran la determinación de áreas de figuras de las que no disponen de una fórmula para calcularlas, como es el caso que nos ocupa.

El área no es vista por los estudiantes como un objeto geométrico salvo en el sentido de un espacio a cubrir.

Esta visión del área por parte de los estudiantes podría estar ligada al tratamiento que generalmente se hace del tema en los libros de textos y por consiguiente en el aula. Salvo en la etapa escolar, en donde se realizan actividades tendientes a medir superficies llegando a un número que representa el área buscada, en los años siguientes el área no se mide realmente sino que se calcula mediante las fórmulas adecuadas. Todas estas actividades podrían estar reforzando la idea del área como fórmula.

En cuanto a la clasificación que hace Turégano (1994) de los estudiantes en tres niveles de razonamiento de acuerdo a las diferentes imágenes del concepto de área, encontramos que nuestros estudiantes estarían en su mayoría en los niveles operativo o descriptivo pues obtuvimos las siguientes evidencias: admiten la igualdad de áreas para superficies de distinta forma, estén o no rectilíneamente delimitadas, la conservación del área por descomposición, utilizan las propiedades de aditividad y transitividad correctamente en la resolución de problemas, admiten la posibilidad de asignar un número a cualquier superficie aunque no conozcan el procedimiento para hacerlo. Estas capacidades son compartidas por ambos niveles, pero al no haber indagado en forma explícita sus concepciones acerca de la noción de área no contamos con elementos que nos permitan afirmar si nuestros estudiantes son capaces de describir verbalmente el concepto de área que poseen así como sus propiedades. Esto nos impide distinguir qué estudiantes entrarían en el nivel operativo y cuáles en el nivel descriptivo.

En referencia al nivel primitivo podemos decir que no tenemos evidencia de que alguno de nuestros estudiantes se encuentre dentro de este nivel, es decir no encontramos ningún estudiante que explícitamente no admita que se pueda determinar el área de superficies no rectilíneamente delimitadas.

- En cuanto a la relación entre las estrategias de los estudiantes y las que utilizaron los matemáticos en la génesis y posterior desarrollo del concepto, podemos decir que un número no despreciable de estudiantes trabaja en forma similar a la de Arquímedes, en su demostración de que el área del segmento de parábola es 4/3 del área del triángulo inscrito. Con esto nos referimos a que los estudiantes intentan agotar la figura inscribiendo triángulos en la misma.

En este sentido, nuestros hallazgos parecen coincidir con los detectados por Dubinsky et al. (2000). Aunque estos investigadores trabajaron con estudiantes que tenían instrucción previa específica, éstos últimos igualmente recurrieron a procedimientos como los descritos en el párrafo anterior. Esto indica, como se explicita en la mencionada investigación, que una fuerte intuición no puede ser destruida por la instrucción recibida en la clase.
Esto último es aplicable a cuatro de nuestros entrevistados que habían recibido instrucción previa en forma lateral en el ámbito de la clase de informática. A pesar de esto ellos comienzan su trabajo usando las estrategias E1, E2 o E4. En las primeras reflexiones conjeturábamos que este comportamiento, es decir la no apropiación del procedimiento de tomar particiones, se debía principalmente a que no hubo una discusión acerca de la eficiencia de diferentes técnicas que les permitieran acercarse al área de una región no poligonal. Ahora podemos agregar razones epistemológicas a los procedimientos elegidos por estos estudiantes ya que, en cierta medida, están reproduciendo los argumentos lógicos de los grandes matemáticos, como ser en este caso los de Arquímedes.

- También observamos que los estudiantes, usan o sugieren el uso de rectas tangentes a las gráficas de las funciones como herramienta que les permite dividir a la región en figuras. Este procedimiento también fue utilizado por Arquímedes en la demostración que mencionamos anteriormente.

Como ya dijimos en las Primeras reflexiones pensamos que la elección de la tangente como herramienta se debe a que sugiere a los estudiantes proximidad a la curva de tal forma que quedaría menor porción de la región sin cubrir, es decir, les estaría proporcionando una forma de aproximación del área buscada con el menor error posible. En esto juega un papel importante, no sólo la visualización sino creemos que también la concepción que el docente presente de este concepto.
En los cursos que estaban realizando estos estudiantes al momento de realizar la entrevista, tanto en Geometría Analítica como en el curso de introducción al Cálculo diferencial, se trabaja mucho con las tangentes a las cónicas y a las gráficas de las funciones tanto en los puntos críticos como en cualquier otro punto. El tratamiento que se hace del tema es en general del tipo algorítmico. Se determinan las ecuaciones de las tangentes a las cónicas en el primer caso y en el curso de cálculo, una vez introducida la definición de derivada en un punto y su interpretación geométrica se pasa a la determinación de la ecuación de la recta tangente a la gráfica en un punto de la misma. Luego se realizan actividades tendientes a la determinación de dichas ecuaciones en casos particulares. Pensamos que esto sucede así ya que en los libros de textos uruguayos, analizados en el Capítulo I, es este el tratamiento dado al tema y por lo expresado antes en cuanto a la preparación de la mayoría de los docentes, esto es lo que se vería reflejado en el aula. Como ya comentamos anteriormente, en uno de los libros de texto usados en nuestro país figura una aproximación a la noción de

tangente a la grafica en los siguientes términos: "Debería ser una recta que *alrededor* de su punto de contacto esté muy *próxima* al gráfico de la función" (Giovannini, 1998). Esto junto con la importancia que se le da en los cursos a la tangente, generalmente con una significación vinculada a problemas concretos de determinación de la misma, pensamos que hacen que esta herramienta sea considerada importante y les genere una sensación de confianza.

- Compartimos con Calvo (1997) que el tratamiento para las cotas inferiores y superiores no es análogo y aparece como vinculado a la concavidad de la función. Encontramos que las tendencias a acotar por exceso en el caso de la hipérbola y por defecto en el caso de la parábola, coinciden con lo esperado en nuestro análisis a priori. Es decir que la concavidad de la función parece determinar la elección de acotar por exceso o defecto.

En la estrategia inicial tenemos clasificados como de acotación 4 casos para la hipérbola y 11 para la parábola, por exceso y defecto respectivamente. Han sido puestos dentro de esta categoría por considerar que el tipo de trabajo que realizaron era de dar una cota para el área buscada. Pero, ¿los estudiantes entienden lo mismo que nosotros? Es decir, al elegir presentar una figura relacionada por inclusión con la región, ¿están pensando que están acotando? Creemos que no por dos razones:

- Primero, cuando los estudiantes se refieren a los valores que hallaron para las áreas de las regiones dicen que han hallado una aproximación de la misma, incluso algunos utilizan el símbolo correspondiente ($\cong$).

- En segundo lugar hay que tener en cuenta que, en general, las actividades de acotación que han hecho hasta el momento están referidas a dar cotas de subconjuntos de reales y no creemos que asocien el área de la figura que relacionan por inclusión con una cota.

Esto nos lleva entonces primero a analizar qué se entiende por cota y cuáles son las implicancias que tiene para la construcción formal del concepto de integral. Recordemos que la mayoría de estos estudiantes, en cursos posteriores, se verán enfrentados al aprendizaje del mismo. Teniendo en cuenta que estamos estudiando las estrategias de los estudiantes para utilizarlas, en la medida de lo posible, para introducir el tema integrales a partir de la noción de área, sabemos que la obra matemática sugiere hacerlo utilizando cotas. Es decir de definir a la integral definida como el supremo del conjunto de las cotas inferiores (integral inferior), o el ínfimo del conjunto de las cotas superiores (integral superior). Esta forma de encarar el concepto de integral definida difiere a la recomendada, en forma implícita, en el programa correspondiente de B.D. Es por esto que en general no están previstas actividades tendientes a generar en los estudiantes una visión de las cotas en el sentido que es necesario para aproximarse a la definición de integral definida.

Para analizar qué se entiende por cota nos podemos restringir a la naturaleza y funcionamiento de este conocimiento matemático. Cordero (2001) plantea como problemática fundamental de la enseñanza de la matemática la confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar. Éstas tienen naturaleza y funciones diferentes, requiriendo la segunda de una interpretación y reorganización de la primera, tomando como fuente a la actividad humana. Refiriéndose a los trabajos de Vergnaud señala que "la primera restricción (la naturaleza) estaría basada en las

visiones matemáticas y psicológicas, mientras que la segunda (el funcionamiento) estaría basada en la visión social."
En nuestro caso el significado matemático de cota estaría asociado al rigor matemático y sentido de certeza, en contraposición al de aproximación, que estaría asociado a la eficiencia. Es necesario que el estudiante tenga esta visión, que adquiera las competencias necesarias para ver a las cotas en este sentido y que dé significado a una nueva forma de razonamiento, a un nuevo procedimiento que consiste en la determinación de cotas cada vez más ajustadas. Esto le permitirá acceder luego al nuevo concepto en cuestión. Comprender la determinación de esos conjuntos, la naturaleza de sus elementos será fundamental al definir a la integral como el extremo superior de sumas inferiores o extremo inferior de las sumas superiores.

Para ello también deberán entender a la cota como un objeto. Al ir tomando particiones del intervalo, calculando las áreas de las figuras que se determinan, están formando un proceso que los llevará a la determinación de las cotas. El estudiante deberá, en esta etapa, percibir a este proceso como algo interno que está bajo su control pudiendo repetir, en su mente, las acciones involucradas en dicho proceso sin necesidad de realizar cada uno de los pasos. Deberá haber una instancia de reflexión del estudiante acerca de las operaciones que aplica a ese proceso y debe lograr verlo como un todo, para luego poder manipularlo como un objeto, es decir que deberá encapsular este proceso para formar el nuevo objeto.

Desde el punto de vista social, el concepto de cota se ve imbuido de las interacciones en el aula y fuera de ella y la tarea de determinar cotas más ajustadas puede llegar a ser interpretado como dar mejores aproximaciones. Esto está asociado a una mayor eficiencia y a una sensación de confianza. Entonces la elección de una herramienta u otra (cota o aproximación) dependerá de la actividad humana, del contrato didáctico en el que las partes están inmersas.
Entendemos que a priori se puede asociar la cota como una herramienta menos eficiente que la aproximación pero sabemos que en términos matemáticos es más segura.
Este cambio de óptica con respecto al concepto de cota sabemos que no es un proceso sencillo. Las formas de pensamiento y procedimientos provenientes del accionar cotidiano, del sentido de eficiencia que mueve al entorno social hoy en día, tienen un fuerte impacto en el individuo. En este sentido, Balacheff (1990) afirma: "el cambio que implica perseguir la certeza más allá de la eficiencia no tiene por qué ser aceptado naturalmente por el alumno cuando ingresa a la clase de Matemática."

De todo lo anterior podemos intuir que, si no se plantean actividades tendientes a redimensionar y revalorar la naturaleza y funcionamiento del concepto de cota, en el sentido de herramienta más segura, los estudiantes no se podrán apropiar de las nuevas competencias y concepciones que los lleven a significar el concepto de integral.

- Se pudo constatar que hubo una comprensión clara de las consignas dadas en la prueba por parte de los estudiantes. En general éstos hicieron una buena interpretación de todos los datos que se les brindaron tanto en el registro gráfico como analítico. La mayoría de los estudiantes utilizó la expresión analítica de la función en el cálculo de imágenes que les permitieron determinar las dimensiones de las figuras auxiliares que trazaron. Desde el Primer Año de B.D. nuestros estudiantes vienen

trabajando con funciones en forma sistemática, por lo que es natural que así lo hicieran. Las dos funciones presentadas en la entrevista fueron trabajadas en profundidad en dicho curso y por lo tanto están familiarizados no sólo con la expresión analítica de cada una de ellas sino también con sus respectivas representaciones gráficas. Consideramos que es importante que puedan integrar ambos aspectos de la función, que haya interacción entre los registros gráfico, simbólico y algebraico. Esto será importante a la hora de construir la definición de integral definida en donde las aproximaciones gráficas al área bajo la curva deberán ir acompañadas de representaciones simbólicas de las mismas.
La interpretación de las alturas de los rectángulos con los valores funcionales no ocasiona ningún conflicto con los conocimientos previos de los estudiantes ya que nos encontramos trabajando en el contexto de funciones no negativas, por lo que la imagen positiva es aceptada naturalmente como una de las dimensiones del rectángulo o trapecio, según corresponda. Es en este contexto que las nociones de área e integral son congruentes. En una etapa posterior, se tendrá que dar significado a que en el contexto del cálculo integral aparezcan rectángulos con "altura negativa" ya que se las estaría relacionando con los valores funcionales.

- A pesar de que los estudiantes entrevistados parecen admitir la posibilidad de asignar un número a una superficie no rectilíneamente delimitada, alguno de ellos manifiestan que nunca se va a llegar a un valor exacto sino que lo que se pueden encontrar son aproximaciones.

Encontramos algunos estudiantes que no logran ver un camino que les permita calcular el área en forma exacta porque consideran imposible la división de la región en "infinitas" figuras o por la imposibilidad, generada por la percepción visual, de que no se pueden agregar más figuras dentro de la región.

También hemos podido observar que una gran cantidad de estudiantes no logran generar procedimientos que les permitan obtener mejores aproximaciones de las áreas buscadas. En esta situación distinguimos dos casos: los que en la búsqueda de mejores aproximaciones no siguen una misma línea de razonamiento y los que creen haber encontrado un procedimiento que los llevaría a calcular el área o a "encontrar" una fórmula.
Entre los primeros podemos citar aquellos estudiantes que llegan al área de la región por estimación visual (como la estudiante que observa que el área buscada es ¾ del área de un rectángulo) o identificando la curva que limita la región con alguna curva conocida como ser una circunferencia. Estas estrategias no implican procesos infinitos.
Entre los segundos se encuentran aquellos que manifiestan que el procedimiento consiste en dividir la región en más figuras geométricas, indicando, en algunos casos, con cuáles figuras geométricas (triángulos, rectángulos, trapecios). Estos creen haber encontrado un proceso que los lleve a calcular el área buscada, pero la división que realizan de la región es tal, que sabemos no presenta regularidades que les permitan generar un proceso efectivo, por lo que no pueden generalizar dichos procedimientos.

Por último se encuentran aquellos estudiantes que intentan generar un proceso que les permita determinar mejores aproximaciones manifestando que los procedimientos determinados por ellos se pueden continuar en forma indefinida. Por las explicaciones que dan en este sentido, se observa que están viendo el proceso como la posibilidad de poder determinar en cada etapa del mismo, una mejor aproximación. Como ya comentamos anteriormente, esto nos estaría diciendo que conciben al infinito potencial y no lo ven como actual. El no poder llegar a calcular el área buscada, es decir el no poder terminar el proceso que iniciaron, fomenta la visión del infinito potencial. Consideramos que esto podría llegar a constituir un obstáculo a la hora de incursionar en la definición formal del concepto de integral.

V. CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS

Como ya mencionamos en la introducción a este trabajo, nuestra propuesta para iniciar a los estudiantes en el cálculo integral es vinculándolo con la noción de área y no presentarlo considerando a la integración como operación inversa de la diferenciación. Esta última es la forma de presentación elegida por quienes elaboran los programas uruguayos: tratar a la integral a partir de la primitiva, admitiendo la existencia de la misma para funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado. Esto es recogido por los libros de texto y por lo tanto es trasladado al aula de esta forma haciendo un tratamiento algebraico del tema, independiente de la noción de área.

Los motivos para la presentación del tema, que nosotros proponemos son de diversa índole:

- Históricamente sabemos que primero se trabajó en el cálculo de áreas con métodos realmente sofisticados e independientes de la diferenciación. Como ejemplo podemos citar los trabajos de Arquímedes al respecto que, por ejemplo, en el cálculo del área de un segmento de parábola utiliza argumentos infinitesimales en sus métodos mecánico y geométrico. Apoyados en las evidencias detectadas en este trabajo, podemos decir que las intuiciones de varios de nuestros estudiantes en el cálculo del área fueron similares a la presentada por Arquímedes en el cálculo del área del segmento parabólico. Compartimos con Turégano (1998) en que "Cuando una cosa se descubre antes que otra, es probable que la primera sea más sencilla que la segunda".
- Los argumentos históricos, que hemos visto en el Capítulo I, nos permiten inferir que la integral definida debería abordarse asociada a la noción de área. Con esto se daría un pasaje natural de los argumentos y lenguajes geométricos manejados por los estudiantes en el tema área a los argumentos y lenguajes analíticos que se procesan en el tratamiento de la integral definida.
- Finalmente, creemos que el tratamiento del tema encarado de esta forma, permite que los estudiantes vean a la integración en forma independiente de la diferenciación y no como la operación inversa de esta última. Esto nos permitirá mostrar la génesis epistemológica del concepto, presentando los conflictos, conjeturas e interpretaciones que le dieron significación al mismo.

Pensamos que este acercamiento nos permitirá, con pocas modificaciones de los conocimientos de los estudiantes, introducirnos en el tema de una forma natural siguiendo el camino que transitaron los matemáticos de antaño y acercando a los estudiantes los problemas que le dieron origen.

En base a esta postura nos hemos preguntado entonces cuáles son las estrategias que utilizan los estudiantes de B.D. en Uruguay al enfrentarse al cálculo de área bajo una curva.

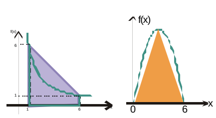
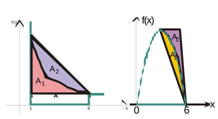
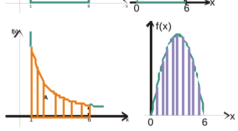
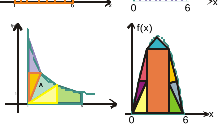
Para contestar esta pregunta, nos hemos centrado en el estudio del cálculo de áreas de figuras limitadas por la gráfica de una función continua y no negativa definida en un intervalo [a,b], el eje de las abscisas, y las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$, con $0 \leq a < b$. Dichas funciones son una cuadrática y una racional de primer grado cuyas representaciones gráficas son una parábola, de concavidad negativa en este caso, y una hipérbola equilátera, considerada en un intervalo cuya concavidad es positiva, respectivamente[29].

En base a los datos recogidos y al análisis de los mismos efectuados en el Capítulo IV, es que presentamos a continuación las conclusiones a las que hemos arribado y las consideraciones didácticas que creemos pertinentes.

- *Estrategias elegidas por los estudiantes*

En el análisis inicial se detectaron dos estrategias fundamentales al enfrentarse al cálculo de área bajo la primera curva que les fue presentada que son la división de la región en figuras que les son familiares a los estudiantes y para las cuales creen tener herramientas para determinar sus áreas y lo que hemos denominado “estimación visual”. En esta última categoría hemos incluido a estudiantes que estiman el área de la región con argumentos o explicaciones visuales que pueden ser válidas o no. Algunos de ellos determinan figuras familiares que consideran equivalentes a la región que analizan; otros identifican las curvas involucradas con otras curvas, otros estudiantes que comparan el área de la región con el de otra figura, estimando que tienen igual área.

Dentro de la primer estrategia distinguimos tres sub-estrategias en base a la frecuencia de las respuestas, al interés de acuerdo a los objetivos de esta investigación o por considerar que es una estrategia que mejor se adecua a la teoría matemática.
Estas tres sub-estrategias junto a la estimación visual conforman las cuatro estrategias en las que hemos basado nuestro análisis. Las mismas se detallan a continuación y van acompañadas de los íconos que hemos utilizado en este trabajo para identificarlas:

-  Acota por exceso con trapecio, en el caso de la hipérbola y por defecto con triángulo con la parábola. (E 1).
-  Aproxima mediante estimación visual con argumentos o explicaciones visuales que pueden ser válidas o no. (E 2).
-  Usa partición sobre alguno de los ejes. (E 3).
-  Divide a la región en figuras conocidas de las que conoce cómo calcularles el área. (E 4).

Si bien el procedimiento que realizan los estudiantes es el mismo en las estrategias E1, E3 y E4, en el sentido de que en todos los casos están dividiendo la región en figuras, distinguimos las estrategias E1 y E3 por considerar que son las que involucran procedimientos y modos de pensamiento que mejor se adecuan a la obra matemática en relación la definición con sumas de Riemmann. En la estrategia E4 hemos considerado a los estudiantes que dividen a la región en figuras sin un criterio bien determinado.

---
[29] La propuesta presentada a los estudiantes figura en el Capítulo III, Diseño experimental.

✖ *Uso de la expresión analítica*

En sus trabajos, una clara mayoría de los estudiantes, utilizó la expresión analítica de la función para el cálculo de imágenes con el fin de determinar las dimensiones de las figuras auxiliares que usaron en la división de la región cuya área debían calcular. En este sentido, no se observan grandes dificultades en la interacción entre los registros gráfico y algebraico, lo que a futuro, podrá ser aprovechado para la construcción de la integral definida, en donde aparecerá una estrecha relación entre ambos registros.
Debemos recordar que las funciones presentadas a los estudiantes en la parte experimental fueron trabajadas en los cursos previos en profundidad. Se trabajó con ellas en los registros gráfico, algebraico y tabular, estableciéndose las conexiones entre las tres representaciones y actividades tendientes a la traducción y pasaje entre ellas, por lo que era natural esperar un comportamiento como el que se produjo.

Las dos regiones presentadas a los estudiantes se ubican en el primer cuadrante, por tanto, las imágenes positivas coinciden naturalmente con las dimensiones de varias de las figuras auxiliares utilizadas por los estudiantes. Es en este contexto que las nociones de área e integral definida coinciden. En una etapa posterior, esta herramienta deberá ser resignificada, ya que en el cálculo integral aparecerán valores funcionales negativos.

✖ *Uso de particiones*

Si bien gran parte de los estudiantes divide la región sin un criterio bien determinado, observamos que la estrategia de usar una partición, ya sea sobre el eje de las abscisas o de las ordenadas, aparece casi en una tercera parte de los casos.
Las particiones son trabajadas con métodos que identificamos[30] con los métodos rectangular y trapezoidal, detectándose una preferencia por este último. La razón se fundamenta en la creencia de que permite obtener una mejor aproximación al área buscada.
Al momento de introducirnos en el estudio de la integral definida será posible optar por trapecios o rectángulos. Será entonces necesario generar los ámbitos de discusión pertinentes, para negociar con los estudiantes la estrategia a utilizar con el fin de conciliar la confianza que ofrece a los estudiantes el uso de trapecios, frente a la practicidad del uso de rectángulos.
La elección de un método u otro, dependerá de la actividad matemática en el salón de clases, entendida como actividad humana, que se nutre y genera a partir de las relaciones que se establecen en el aula.
Todo esto nos hace pensar que mediante el diseño de actividades adecuadas, es posible que los estudiantes adquieran las herramientas necesarias para el abordaje de la integral de Riemann.

✖ *Estimación de la medida*

De acuerdo a las evidencias en cuanto a los trabajos de estimación de la medida realizada por nuestros estudiantes, encontramos ciertas limitaciones en la posibilidad de estimar visualmente el área de una figura y realizar el cálculo de la misma con cierta exactitud. Sólo cerca de la cuarta parte de los estudiantes que llegan a dar una aproximación del área de las regiones que les fueron presentadas lo hacen con un

[30] No podemos decir que trabajan con estos métodos ya que se trata de estudiantes que, al momento de realizarse la prueba, no habían recibido ningún curso de cálculo integral por lo que no conocían los métodos mencionados.

error menor a 1. Es decir que encontramos que no están capacitados en la tarea de manipular mentalmente las unidades de medida referenciales (metro, tazas, pies, etc) para, mediante la comparación, lograr dar una aproximación. Esto nos lleva a inferir que los aprendizajes formales sobre la medida no capacitan, generalmente, para la estimación.
Recomendamos brindar a los estudiantes las experiencias previas necesarias que ayuden a manipular y transformar mentalmente las imágenes visualizadas que les permitan desarrollar las capacidades necesarias al momento de calcular las áreas de figuras no rectilíneamente delimitadas.

✖ *Incidencia de las actividades previas en la toma de decisiones*
Hemos detectado que la experiencia acumulada a lo largo de la prueba no influye en forma decisiva en cuanto a la elección de la estrategia cuando cambian de región. Es decir que la estrategia a utilizar, podría estar en algunos casos condicionada por la curva en sí y no por las experiencias previas en la propia entrevista, lo que no coincidiría con lo que habíamos supuesto previamente. Recordemos que en cada una de las propuestas se trabaja primero con una función cuya representación gráfica es una hipérbola (parábola) y luego con otra cuya representación gráfica es una parábola (hipérbola).
Al igual que Dubinsky et al. (2000) se pudo apreciar que los estudiantes que habían tenido experiencia previa (estudiantes que habían trabajado el tema en el área de informática) no estuvieron condicionados por esta a la hora de seleccionar la estrategia a utilizar.
Pensamos que estas evidencias deberán ser tenidas en cuenta a la hora de elaborar las actividades preparatorias para el abordaje de la integral definida. No sólo se deberán plantear actividades que propicien el uso de las diferentes técnicas que les permitirán acercarse al área de una región no poligonal sino que se deberán generar los ámbitos que permitan una socialización de la discusión acerca la potencialidad de cada estrategia, de las ventajas y desventajas de cada una de ellas, el carácter general o generalizable de ellas en relación a un grupo de regiones, así como la eficiencia o no de las mismas.

✖ *Acotar - Aproximar*
Al momento de abordar la integral definida sería deseable que los estudiantes hayan tenido experiencias con acotaciones de áreas por exceso y por defecto, ya que así lo requiere la obra matemática.
Intuiciones a este respecto no faltaron en nuestro estudio, sin embargo sostenemos que los estudiantes no están pensando en que al presentar una figura por inclusión con la región, están haciendo un trabajo de acotación. Es por ello que recomendamos, al igual que Calvo (1997), que el tratamiento de las cotas superiores e inferiores, deberá ocupar un lugar importante en las actividades de aula dentro del contexto del cálculo de áreas. Se deberán plantear actividades tendientes a redimensionar y revalorar la naturaleza y funcionamiento del concepto de cota, en el sentido de herramienta más segura, lo que facilitará la apropiación, por parte de los estudiantes, de las nuevas competencias y concepciones que los lleven a significar el concepto de integral.

Queremos destacar que en la elección de la forma de aproximación al área hecha por los estudiantes, la concavidad de la función parece haber determinado dicha elección. Hay una clara tendencia a aproximar por defecto en el caso de que la concavidad sea negativa (parábola) y por exceso cuando es positiva (hipérbola).

También coincidimos con ella en que en las actividades previas se deberán incluir actividades de aproximación de áreas por los métodos trapezoidal y rectangular y la reflexión acerca de si las aproximaciones así obtenidas son por exceso o defecto de acuerdo a la concavidad de la función.

✖ *Uso de la tangente*

Hemos constatado que un número no despreciable de estudiantes usa o sugiere el uso de rectas tangentes a las gráficas de las funciones que les fueron presentadas. En realidad trabajan con una falsa tangente en el sentido que es una recta que ellos perciben como tangente pero no aplican técnicas que le permitan deducir que esa es efectivamente la tangente ignorando las cuestiones infinitesimales vinculadas a las mismas.

Éstas son utilizadas como herramienta que les permite dividir a la región en figuras o como apoyo para determinar puntos que serán vértices de figuras que les servirán para dividir a la región o para compararla con ella.

Pensamos que la elección de esta herramienta se debe a que sugiere a los estudiantes proximidad a la curva de tal forma que quedaría menor porción de la región sin cubrir, es decir, les estaría proporcionando una forma de aproximación del área buscada con el menor error posible lo que les estaría proporcionando una sensación de confianza y de una aparente eficiencia.

Pensamos que se debería discutir con los estudiantes las técnicas de determinación de las tangentes, las posibilidades de generar procedimientos iterativos que les permitan determinar el área de regiones no rectilíneamente delimitadas mediante el uso de esta herramienta, entre otros.

✖ *Imagen de área como fórmula*

Encontramos que gran parte de los estudiantes tiene la imagen de área asociada a una fórmula. Esto podría en gran medida obstaculizar la determinación de áreas para las cuales no conocen una fórmula, como es nuestro caso.

En este sentido sería deseable, en la etapa escolar, se pospusiera la presentación de las fórmulas para el cálculo de áreas hasta tanto el estudiante no haya adquirido la noción de área.

Quizás esto les permitirá tener mayor flexibilidad al momento de elegir las estrategias, al no sentirse atados al uso de una fórmula.

✖ *Procesos infinitos*

Si bien cinco estudiantes señalan que el procedimiento que han utilizado puede realizase indefinidamente, debemos destacar que, en general, los estudiantes no generan procesos infinitos ni sistematización en los procedimientos para calcular el área de figuras no rectilíneamente delimitadas.

La mayoría de los estudiantes parece admitir la posibilidad de asignar un número a una superficie no rectilíneamente delimitada pero algunos de ellos no logran ver que realmente el área de la región no se agota en uno o dos pasos.

No pueden ver un camino que les permita calcular el área en forma exacta porque consideran imposible la división de la región en “infinitas” figuras. Creemos que esto puede ser generado por la percepción visual, ya que muchos manifiestan que no se pueden agregar más figuras dentro de la región, que hay un máximo de figuras que podrían incluirse dentro de la mismas. El espacio físico concreto estaría impidiendo que los estudiantes puedan admitir una solución que conlleve la división de la región en infinitas figuras.

VI. REFERENCIAS

✓ Anzalone, A. (2001). Alcune considerazioni sul segmento parabolico. *La matemática e la sua didattica,* 1.

✓ Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Pedro Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

✓ Balacheff, N. (1990). Beyond a Psychological Approach: the Psychology of Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics,* 10, 3.

✓ Balparda, O.; Lois, L. y Sbarbaro, M. (1993). *Matemática Sexto. Guía para el trabajo en clase (pp. 265-288).* Montevideo, Uruguay: Ediciones de la Plaza.

✓ Belcredi, L.; Zambra, M.; Deferrari, M. (2001) *Introducción al Análisis Matemático* (pp. 202-217). Montevideo, Uruguay: Ediciones de la Plaza.

✓ Bliss, J.; Monk, M. y Ogborn, J. (1983). *Qualitative Data Analysis for Educational Research.* Londres: Croom Helm.

✓ Boyer, C. (1949). *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* Londres: Dover.

✓ Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.

✓ Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Saiz (Comps.) *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones (pp. 65-94)*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

✓ Bruner, J. (1984). Acción, pensamiento y lenguaje. Compilación José Luis Linaza. pp 232. Alianza editorial: Madrid.

✓ Buendía, G. y Cordero, F. (2001). *La actividad en el salón de clases como fuente de construcción de conocimiento. Una socioepistemología de la periodicidad.* Documento interno de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa.

✓ Calvo, C. (1997). Bases para una propuesta didáctica sobre integrales. Tesis de Maestría. Programa de Doctorat del Departament de Didáctica de la Matemática i les Ciènces Experimentals. Universitat Autónoma De Barcelona.

✓ Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Épsilon*, 42, pp. 353-369.

✓ Cantoral, R. et al. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático.* México: Editorial Trillas.

✓ Chevallard, Y. et al. (1997). Cuadernos de Educación. Estudiar Matemáticas. *El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: ICE–HORSORI.

✓ Chevallard, Y. (1997). *La trasposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Aique.

✓ Cordero, F. (2001). *La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(2), pp. 103-128.

✓ Damerow, P. y Westbury, I. (1984). Conclusiones extraídas de las experiencias del movimiento de la nueva matemática. En *Matemática para todos. Educación Científica y Tecnología*. UNESCO. Montevideo: Oficina Regional de Ciencia y Tecnología de la UNESCO para América Latina y el Caribe – ORCYT.

✓ de Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático.* Madrid: Pirámide.

✓ Del Río Sánchez, J., Hernández Encinas, L. & Rodríguez Conde, M. (1992). *Análisis Comparado del Currículo de Matemáticas (Nivel Medio) en Iberoamérica*. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) y Mare Nostrum Ediciones Didácticas, Madrid.

✓ Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1990). *On difficulties with diagrams: Theoretical issues.* Proceedings of XIV PME Conference. México.

✓ Dubinsky, E. et al. (2000). Conceptions of Area: In Students and in History. http://trident.mcs.kent.edu/~edd/

✓ Durán, A. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo.* Madrid: Alianza.

✓ Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

✓ Farfán, R. (2000). *Lenguaje Algebraico y pensamiento funcional. Un estudio de las funciones pretextando la resolución de desigualdades*. En Cantoral, R. et al., *Desarrollo del Pensamiento Matemático (Cap. 7, pp. 89-145)*. México: Trillas-ITESM-Universidad Virtual.

✓ Giovannini, E. (1998). *Funciones reales. Matemática A para 6º año (pp. 217 y 296-297).* Montevideo, Uruguay: Edición personal.

✓ González Urbaneja, P. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII.* Madrid: Alianza.

✓ Grattan-Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica.* Madrid, España: Alianza.

✓ Heath, T. (1953). *The Works of Archimedes.* U.S.A.: Dover.

✓ Heath, T. (1956). *The thirteen books of the Euclid's elements.* New York, USA: Dover.

✓ Montesinos, J. (2000). *Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*. Educación Matemática en Secundaria, Nº 21. Madrid, España: Síntesis.

✓ Nelsen, R. (1993). *Proofs without Words*. *Exercises in visual thinking*. U.S.A.: MAA.

✓ Poincaré, H. (1995). *La creación matemática.* Investigación y Ciencia. Temas 1. Grandes matemáticos. Barcelona, España: Prensa Científica.

✓ Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

✓ Stein, S. (1999). *Archimedes. What did he do besides cry eureka?* U.S.A.: MAA.

✓ Tall, D. (1991). Intuition and Rigour: The Role of Visualization in the Calculus. En Zimmermann, W. & Cunningham, S. (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics (pp. 105-119)*. U.S.A.: MAA.

✓ Tall, D. (1997). *Functions and Calculus*. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*.

✓ Torija, R. (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo* (pp. 63-72). Madrid: Nivola.

✓ Turégano, P. (1993). De la noción de área a su definición. Investigación histórica sobre las técnicas, métodos y conceptos que condujeron a la teoría de la medida (pp. 77-81). España: Universidad de Castilla-La Mancha.

✓ Turégano, P. (1994). Imágenes del concepto y estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas de áreas. *Ensayos*, 9, pp. 237-257.

✓ Turégano, P. (1996). Reflexiones didácticas acerca del concepto de área y su medida. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 10, Octubre.

✓ Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (2), pp. 233-249.

✓ Vinner, Sh. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking (pp. 65-81).* Dordrecht, Holanda: Kluwer.

✓ Zazkis, R.; Dubinsky, E. y Dauterman, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a study of student´s understanding of the group D_4. *Journal of Research in Mathematics Education*, Vol. 27, 4, pp. 435-457.

✓ Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). Editors' Introduction: What is Mathematical Visualization? En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. U.S.A.: MAA.

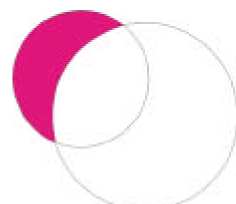
✓ Zimmermann, W. (1991). Visual thinking in calculus. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. U.S.A.: MAA.

Y así se hizo la historia

En este anexo presentamos las demostraciones de algunas cuadraturas, en especial las correspondientes a los segmentos de parábola y de hipérbola, que ilustran diferentes estrategias utilizadas por los matemáticos a lo largo de la historia.

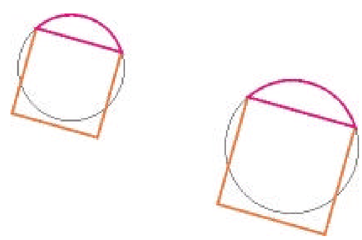
Hipócrates
Cuadratura de una lúnula

"Una lúnula es una figura plana limitada por dos arcos de circunferencia de distintos radios." (Boyer, 1986).

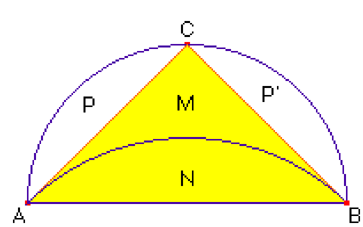


Para lograr la cuadratura de una de las lúnulas, Hipócrates utiliza un teorema que se le atribuye:

- Segmentos semejantes de círculos[1] están entre sí en la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus bases.



A partir de este teorema, "consiguió fácilmente Hipócrates la primera cuadratura rigurosa de una figura curvilínea en la historia de la matemática." (Boyer, 1986).
Su método consiste en considerar un triángulo rectángulo isósceles, la semi-circunferencia circunscrita a él y sobre la hipotenusa un segmento circular semejante a los segmentos circulares determinados por los catetos del triángulo.



Por el teorema antes mencionado: $\dfrac{P}{N}=\dfrac{(\overline{AC})^2}{(\overline{AB})^2}$; $\dfrac{P'}{N}=\dfrac{(\overline{CB})^2}{(\overline{AB})^2}$

[1] En el libro III de los *Elementos* de Euclides (Citado en Heath, 1956) encontramos las siguientes definiciones:
Definition 10. A *sector of a circle* is the figure which, when an angle is constructed at the center of the circle, is contained by the straight lines containing the angle and the circumference cut off by them.
Definition 11. *Similar segments* of circles are those which admit equal angles, or in which the angles equal one another.

Por el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC:

$$\left(\overline{AB}\right)^2 = \left(\overline{AC}\right)^2 + \left(\overline{CB}\right)^2 \Rightarrow 1 = \frac{\left(\overline{AC}\right)^2}{\left(\overline{AB}\right)^2} + \frac{\left(\overline{CB}\right)^2}{\left(\overline{AB}\right)^2} \Rightarrow 1 = \frac{P}{N} + \frac{P'}{N} \Rightarrow N = P + P'$$

Es decir que la suma de las áreas de los segmentos circulares menores es igual al área del segmento circular mayor.
Sea L el área de la lúnula; de lo anterior obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} L = \underbrace{P + P'}_{N} + M = N + M \\ \text{á}(\overset{\Delta}{ABC}) = N + M \end{array}\right\} \Rightarrow L = \text{á}(\overset{\Delta}{ABC})$$

El área de la lúnula es igual al área del triángulo ABC.
Por otro lado sabemos que el área del triángulo ABC es igual a la del cuadrado construido sobre la mitad de la hipotenusa AB, por lo que se consigue así la cuadratura de la lúnula.

Arquímedes:
Hacia la demostración geométrica del cálculo del área del segmento de parábola

1. Propiedades de Arquímedes

A continuación figuran las demostraciones de las propiedades que utilizó Arquímedes para el cálculo del área de un segmento de parábola.

Propiedad 1
Si desde un punto C de una parábola (P) se traza una paralela al eje (e) de la misma que corta a una cuerda AB de (P) en su punto medio M, entonces la tangente (t_C) a (P) en C es paralela a la cuerda AB. Y recíprocamente, si (t_C) es paralela a la cuerda AB y la recta paralela al eje por C corta a la cuerda AB en M, entonces M es punto medio de AB.

Directo

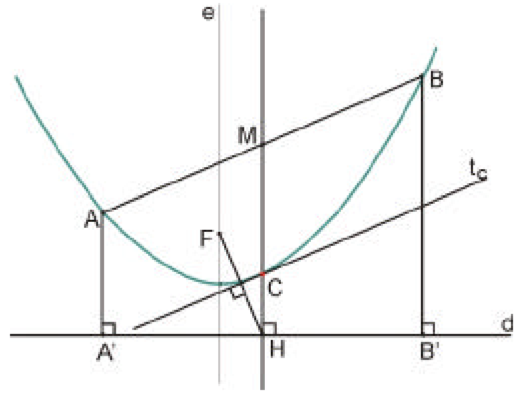
$$\left.\begin{array}{l} C \in (P),\ A \in (P),\ B \in (P), \\ M \text{ punto medio } AB \\ CM \ /\!/ \ e \end{array}\right\} \Rightarrow t_C \ /\!/ \ AB$$

<u>Demostración</u>:

Sean F y (d) el foco y la directriz de (P) respectivamente.
$\{A'\} = Proy_{(d)}(A)$
$\{B'\} = Proy_{(d)}(B)$
$\{H\} = Proy_{(d)}(C)$

Por propiedad métrica de (P), t_C es la mediatriz del segmento HF $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{t_C \perp HF} \quad (1)$$



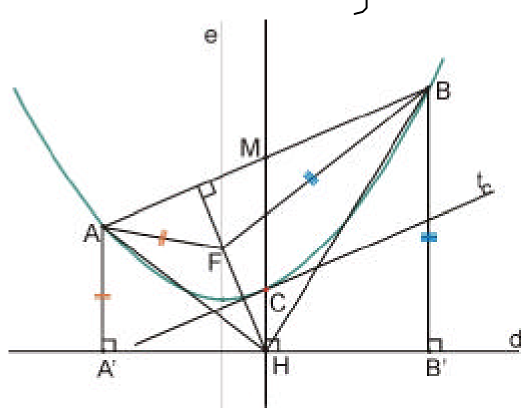
$$\left.\begin{array}{l} AA' \,//\, CM \\ BB' \,//\, CM \\ M \text{ punto medio de } AB \end{array}\right\} \underset{\text{paralela media}}{\Rightarrow} H \text{ punto medio de } A'B'$$

$$\overset{\Delta}{AA'H} \text{ rectángulo } \underset{\text{Pitágoras}}{\Rightarrow} (AH)^2 = (AA')^2 + (A'H)^2 \underset{A\in(P)}{=} (AF)^2 + (A'H)^2$$

$$\overset{\Delta}{BB'H} \text{ rectángulo } \underset{\text{Pitágoras}}{\Rightarrow} (BH)^2 = (BB')^2 + (B'H)^2 \underset{B\in(P)}{=} (BF)^2 + (B'H)^2$$

Restando miembro a miembro obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} (AH)^2 - (BH)^2 = (AF)^2 + (A'H)^2 - (BF)^2 - (B'H)^2 \\ \\ H \text{ punto medio de } A'B' \rightarrow A'H = B'H \end{array}\right\} \Rightarrow (AH)^2 - (BH)^2 = (AF)^2 - (BF)^2$$



$$\left.\begin{array}{l} (AH)^2 - (BH)^2 = (AF)^2 - (BF)^2 \\ \text{En } \overset{\Delta}{ABH} \text{ se cumple:} \\ (AH)^2 - (BH)^2 = (AB)^2 - 2.AB.\,Proy_{AB}(BH) \\ \text{En } \overset{\Delta}{ABF} \text{ se cumple:} \\ (AF)^2 - (BF)^2 = (AB)^2 - 2.AB.\,Proy_{AB}(BF) \end{array}\right\} \Rightarrow Proy_{AB}(BH) = Proy_{AB}(BF) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{HF \perp AM}$ (2)

de (1) y (2) se deduce: $\boxed{AB \; // \; t_C}$

Recíproco

$$\left.\begin{array}{l} C \in (P),\; A \in (P),\; B \in (P), \\ t_C \;//\; AB \\ M \in AB \;/\; CM \;//\; e \end{array}\right\} \Rightarrow M \text{ punto medio } AB$$

<u>Demostración</u>:

Del directo sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} (AH)^2 - (BH)^2 = (AF)^2 - (BF)^2 + (A'H)^2 - (B'H)^2 \\ (AH)^2 - (BH)^2 = (AB)^2 - 2.AB.\,Proy_{AB}(BH) \\ (AF)^2 - (BF)^2 = (AB)^2 - 2.AB.\,Proy_{AB}(BF) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (AB)^2 - 2.AB.\,Proy_{AB}(BH) = (AB)^2 - 2.AB.\,Proy_{AB}(BF) + (A'H)^2 - (B'H)^2 \\ \left.\begin{array}{l} \text{por hipótesis: } t_C \;//\; AB \\ \text{por prop. de } (P)\text{: } t_C \perp HF \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp HF \;\Rightarrow\; Proy_{AB}(BH) = Proy_{AB}(BF) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A'H)^2 - (B'H)^2 = 0 \rightarrow (A'H)^2 = (B'H)^2 \Rightarrow$$

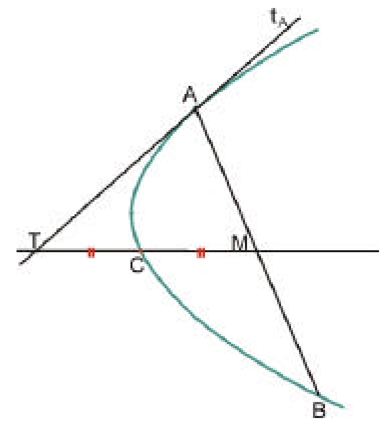
$$\Rightarrow A'H = B'H \rightarrow H \text{ punto medio de } A'B'$$

$$\left.\begin{array}{l} H \text{ punto medio de } A'B' \\ AA' \;//\; BB' \;//\; HM \end{array}\right\} \underset{\text{paralela media}}{\Rightarrow} \boxed{M \text{ punto medio de } AB}$$

Propiedad 2

Sea AB una cuerda de una parábola (P) paralela a la tangente en un punto C de la parábola. Si se traza por C una recta paralela al eje (e) de la parábola que corta a la cuerda AB en M y a la tangente en A en el punto T, entonces se cumple que C es punto medio del segmento TM.

$$\left.\begin{array}{l} C\in (P),\ A\in (P),\ B\in (P), \\ t_C \ // \ AB \\ CM \ // \ e \\ t_A \cap CM = \{T\} \end{array}\right\} \Rightarrow C \text{ punto medio } TM$$

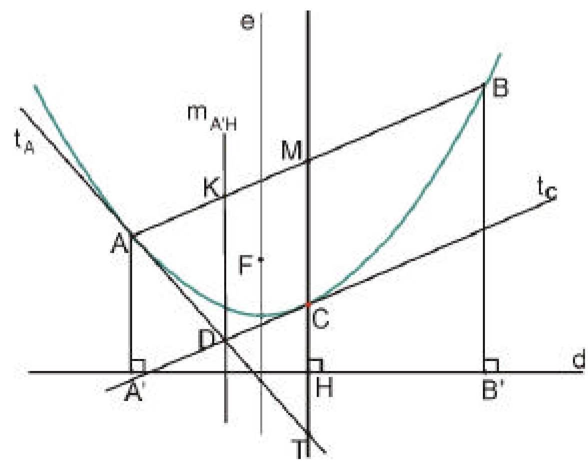


Demostración:

Por propiedad métrica de la parábola se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} t_A \text{ mediatriz de } FA' \,(m_{FA'}) \\ t_C \text{ mediatriz de } FH \,(m_{FH}) \end{array}\right. \\ y\ t_A \cap t_C = \{D\} \end{array}\right\} \Rightarrow D \in m_{A'H}$$

$m_{A'H} \cap AB = \{K\}$



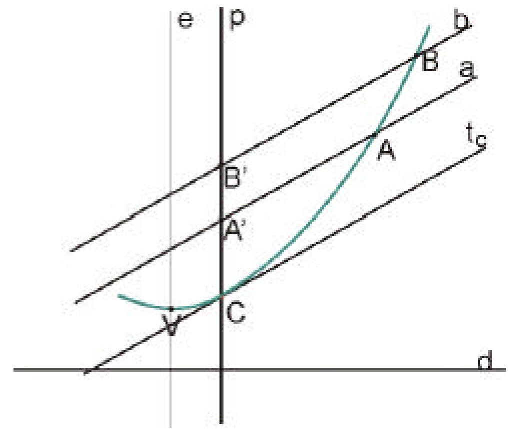
$m_{A'H}$ es paralela media del trapecio HMAA’ $\Rightarrow$ K punto medio del segmento AM.

$$\left.\begin{array}{l} K \text{ punto medio de } AM \\ m_{A'H} \ // \ MT \end{array}\right\} \Rightarrow m_{A'H} \text{ paralela media de } \overset{\Delta}{AMT} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ D \text{ punto medio de } AT \Rightarrow \ \overline{MT} = 2\overline{KD}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{MT} = 2\overline{KD} \\ \overline{KD} \underset{\substack{\text{segmentos de paralelas} \\ \text{entre paralelas}}}{=} \overline{MC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{MT} = 2\overline{MC} \Rightarrow \boxed{\text{C punto medio de MT}}$$

Propiedad 3
Si desde un punto C de una parábola (P) se traza una recta (p) paralela al eje (e) de la misma, y desde otros dos puntos A y B de la parábola se trazan rectas paralelas a la tangente (t_C) en C que cortan a (p) en A' y B' respectivamente, entonces se cumple que: $\frac{CA'}{CB'}=\frac{(AA')^2}{(BB')^2}$



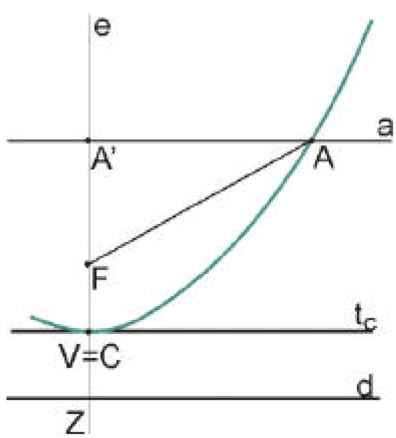
$$\left.\begin{array}{l} C\in(P),\ A\in(P),\ B\in(P), \\ (p)\ //\ e\ ,\ C\in(p) \\ (t_C)\ \text{tangente a } (P) \text{ en } C \\ (a)//(t_C),\ A\in(a) \\ (b)//(t_C),\ B\in(b) \\ (a)\cap(p)=\{A'\},\ (b)\cap(p)=\{B'\} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{CA'}{CB'}=\frac{(AA')^2}{(BB')^2}$$

Demostración:[2]

Sea d la directriz de (P), V su vértice y F su foco.

✘ *Caso 1:* C coincide con V
(en este caso, en que también e = p y t_C // d, bastará probar que $(AA')^2 = 4.VA'.VF$)

✘ *F está entre V y A'*
Sea Z / $d\cap e=\{Z\}$



$\forall A\in(P)$: d(A,d) = d(A,F) entonces ZA' = AF

ZV + VA' = AF $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} \underset{ZV=VF}{\Rightarrow}\quad (VF+VA')^2 = AF^2 \\ \text{En } \overset{\Delta}{AA'F} \text{ por Pitágoras: } AF^2 = AA'^2 + FA'^2 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow VF^2 + 2.VF.VA' + VA'^2 = AA'^2 + FA'^2$

$VF^2 + 2.VF.VA' + VA'^2 = AA'^2 + (VA' - VF)^2$

$VF^2 + 2.VF.VA' + VA'^2 = AA'^2 + VA'^2 - 2.VA'.VF + VF^2$

---

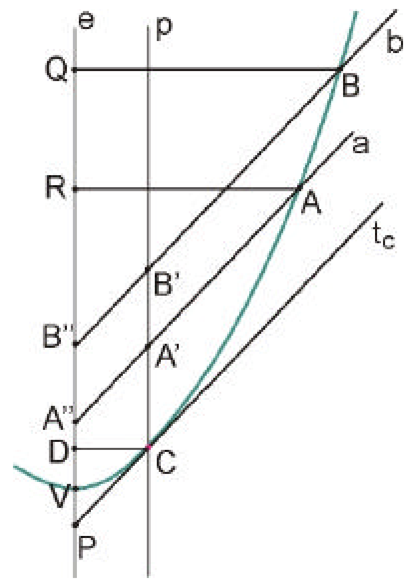
[2] Aunque en el gráfico A y B aparecen en el mismo semiplano respecto de (p), el hecho de que esta recta divida por el punto medio a las paralelas a t_C (propiedad 1) hace que sea indiferente a cuál semiplano pertenecen.

$$\boxed{4.VF.VA' = AA'^2}$$

- *A' está entre V y F*
  La prueba es análoga.

- *Caso 2:* C es cualquier punto de la parábola

Sean $\{A''\} = AA' \cap e$, $\{B''\} = BB' \cap e$, $\{P\} = t_C \cap e$ y R, Q y D las proyecciones sobre (e) de A, B y C respectivamente.



(por la propiedad 2 sabemos que PD = 2.VD)

Por el caso 1 sabemos: (1) $RA^2 = 4.VF.VR$
(2) $DC^2 = 4.VF.VD = 2.VF.PD$

De (2) se deduce que:

$$\frac{DC}{DP} = \frac{2.VF}{DC}$$

y como los triángulos RAA'' y DCP son semejantes:

$$\frac{RA}{RA''} = \frac{DC}{DP}$$

De ambas igualdades se deduce: $RA = \frac{2.VF}{DC}.RA''$

De donde, elevando al cuadrado y usando (1), resulta:

$$4.VF.VR = \frac{4.VF^2}{DC^2}.RA''^2$$

$$DC^2.VR = VF.\ RA''^2$$

Y de nuevo usando (2): $4.VD.VR = RA''^2$ (3)

Recurriendo una vez más a la semejanza de los triángulos RAA'' y DCP:

$$\frac{AA''}{RA''} = \frac{CP}{DP} \underset{\text{prop. 2}}{\Rightarrow} \frac{AA''}{RA''} = \frac{CP}{2VD}$$

y usando que AA'' = AA' + A'A'' resulta:

$$\frac{AA'+CP}{RA''} = \frac{CP}{2.VD}$$

Esto implica que $2.AA'.VD = CP.(RA'' - 2.VD)$

Y elevando al cuadrado: $4.AA'^2.VD^2 = CP^2.(RA''^2 - 4.RA''.VD + 4.VD^2)$
Usando ahora (3): $4.AA'^2.VD^2 = 4.CP^2.VD.(VR - RA'' + VD)$

Y como VD = VP: $AA'^2.VD = CP^2(VA'' + VP)$

$AA'^2.VD = CP^2.A''P$

$AA'^2.VD = CP^2.CA'$

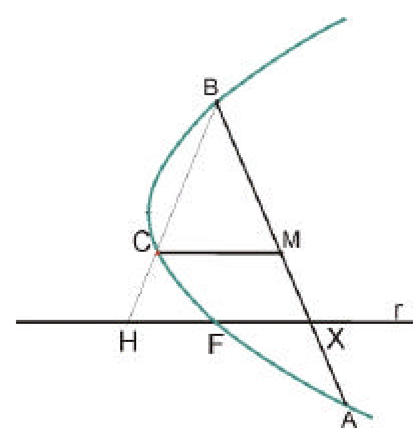
Finalmente: $AA'^2 = \frac{CP^2}{VD}.CA'$

y de manera análoga se prueba que: $BB'^2 = \frac{CP^2}{VD}.CB'$

$$\left.\begin{array}{l} AA'^2 = \frac{CP^2}{VD}.CA' \\ BB'^2 = \frac{CP^2}{VD}.CB' \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{CA'}{CB'} = \frac{(AA')^2}{(BB')^2}}$$

Propiedad 4
Sea AB la cuerda de un segmento de parábola (P), C el vértice de dicho segmento y CM su diámetro[3]. Si una paralela (r) a CM por F $\in$ (P) corta a AB en X y a BC en el punto H, entonces se cumple que: $\frac{MB}{XM} = \frac{HX}{HF}$.

$$\left.\begin{array}{l} C \in (P),\ A \in (P),\ B \in (P), \\ CM \text{ diametrode}(P) \\ (r)\ //CM \\ (r) \cap (P) = \{F\} \\ (r) \cap AM = \{X\} \\ (r) \cap BC = \{H\} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MB}{XM} = \frac{HX}{HF}$$

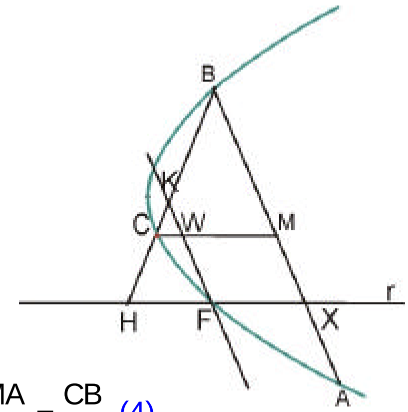


Demostración:

Sea W $\in$ CM / WF // AB por la propiedad 3 resulta que

$$\frac{CM}{CW} = \left(\frac{MA}{WF}\right)^2 \ (1)$$

[3] M es punto medio de la cuerda AB.



Si llamamos K al corte de WF con BC, por Thales resulta que

$$\frac{CM}{CW}=\frac{CB}{CK} \quad (2)$$

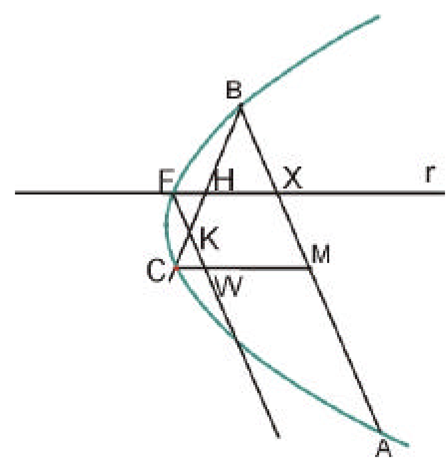
Y como MA = MB y WF = MX resulta que $\frac{MA}{WF}=\frac{MB}{MX}$

CM // XH $\underset{\text{Thales}}{\Rightarrow}$ $\frac{MB}{MX}=\frac{CB}{CH}$ (3)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{MA}{WF}=\frac{MB}{MX}\\ \frac{MB}{MX}=\frac{CB}{CH}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MA}{WF}=\frac{CB}{CH} \quad (4)$$

De (1), (2) y (4) resulta que: $\frac{CB}{CK}=\left(\frac{CB}{CH}\right)^2$

Simplificando obtenemos: $\frac{CH}{CK}=\frac{CB}{CH}$; llamemos m a esta razón y por tanto $\frac{CB\pm CH}{CH\pm CK}=\frac{CB}{CH}=m$



Si C está entre B y H elegimos los signos de + y así
CB + CH =BH y CH + CK = KH

Si H está entre B y C elegimos los signos de – y así
CB – CH = BH y CH – CK = KH

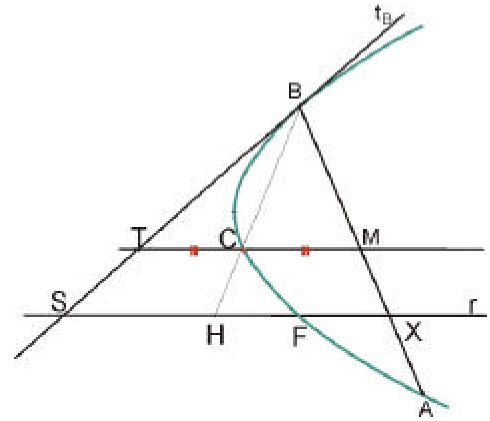
En ambos casos resulta:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{CB}{CH}=\frac{BH}{HK}\\ \text{KF // AB} \underset{\text{Thales}}{\Rightarrow} \frac{BH}{HK}=\frac{XH}{HF}\\ \text{Por (3) } \frac{CB}{CH}=\frac{MB}{MX}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{BM}{MX}=\frac{XH}{HF}}$$

Propiedad 5

Sea AB una cuerda de un segmento de parábola (P), C $\in$ (P) tal que la tangente a la parábola en C es paralela a la cuerda AB y M punto medio de AB. Si una paralela (r) a CM por F $\in$ (P) corta a AB en X y a la tangente (t_B) a (P) por B en el punto S, entonces se cumple que: $\frac{XB}{AX} = \frac{SF}{FX}$.

$$\left.\begin{array}{l} C \in (P),\ A \in (P),\ B \in (P),\ F \in (P) \\ C /\ t_C // AB \\ M \text{ punto medio de } AB \\ (r)//CM,\ F \in (r) \\ (r) \cap AB = \{X\} \\ (t_B) \text{ tangente en } B \\ (t_B) \cap (r) = \{S\} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{XB}{AX} = \frac{SF}{FX}$$



Demostración:

Sea H / BC $\cap$ (r) = {H}

Por propiedad 4 sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{MB}{XM} = \frac{HX}{HF} \rightarrow \frac{MB}{MB - XM} = \frac{HX}{HX - HF} \\ \\ MB = AM \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MB}{AM - XM} = \frac{HX}{FX} \Rightarrow \boxed{\frac{MB}{AX} = \frac{HX}{FX}} \quad (1)$$

CM $\cap$ (t_B) = {T}

$$\left.\begin{array}{l} \text{Por propiedad 2: } TC = CM \Rightarrow SH = HX \\ \\ \text{(1) es equivalente a } \frac{2.MB}{AX} = \frac{2.HX}{FX} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{AX} = \frac{SX}{FX} \text{ es equivalente a}$$

$$\frac{AB - AX}{AX} = \frac{SX - FX}{FX} \Rightarrow \boxed{\frac{XB}{AX} = \frac{SF}{FX}}$$

2. Consideraciones mecánicas

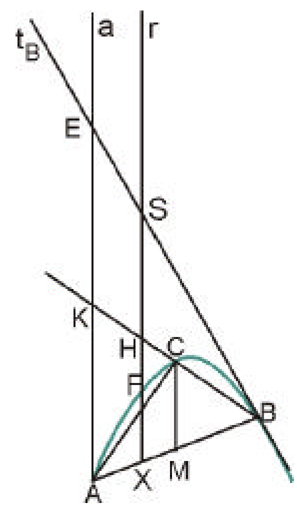
Para determinar la relación que le permite cuadrar un segmento de parábola Arquímedes aplica las leyes de la palanca y la determinación del centro de gravedad de figuras planas que él mismo había descubierto.

Considera el segmento de parábola (P) circunscrito al triángulo ABC (al que notaremos sp(ABC)) siendo C de tal manera que determina con M, punto medio de AB, una recta paralela al eje de la parábola.
Usando el método mecánico establecerá la relación entre el área del sp(ABC) y la del triángulo ABC.

Considera por A la recta (a) paralela al eje de la parábola y la recta (t_B) tangente a la parábola en B.

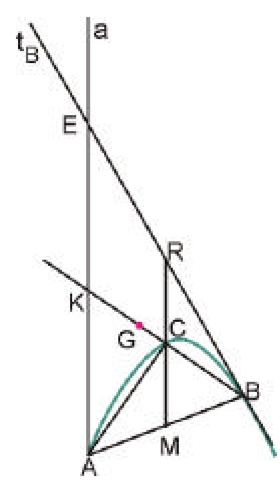
$(a) \cap (t_B) = \{E\}$
$BC \cap (a) = \{K\}$

Considera además la recta (r) paralela al eje de la parábola tal que:
$(r) \cap AB = \{X\}$
$(r) \cap (P) = \{F\}$
$(r) \cap BC = \{H\}$
$(r) \cap BE = \{S\}$



Por la Propiedad 2 de Arquímedes en su tratado *Cuadratura de la parábola* (Heath, 1953), la cual figura demostrada anteriormente en este Anexo, se sabe que si AB es una cuerda de (P), M su punto medio, C un punto de (P) tal que CM es paralela al eje de la parábola y R el corte de CM con la tangente a (P) por B entonces CM = RC.

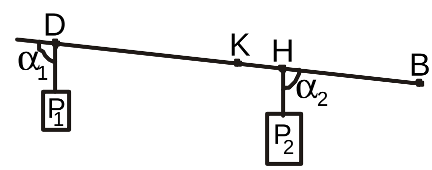
Como C es punto medio del segmento RM, se deduce que K es punto medio del segmento AE y que H es punto medio de XS.



Arquímedes parte de que al moverse X sobre el segmento AB, los segmentos FX barren el segmento de parábola limitado por la cuerda AB y que los segmentos SX hacen lo propio con el triángulo ABE. Considera el punto G, baricentro del triángulo ABE (que ya sabemos que está alineado con K y B) y el punto D, simétrico de B respecto de K. La elección que hace del punto D es para considerar al segmento BD como una palanca de punto de apoyo K.

Usando el método mecánico, tal como describiremos a continuación, Arquímedes encuentra que con dicha palanca apoyada en K se equilibran el triángulo ABE (con centro de gravedad G) y una región equivalente al segmento de la parábola sp(ABC) (con centro de gravedad D).

La palanca consiste en una barra rígida que se apoya en un punto K para vencer una fuerza llamada resistencia (P_1) al aplicar otra fuerza denominada potencia (P_2).
Por la ley de la palanca el sistema estará en equilibrio si se cumple que:



$$KD.P_1.\text{sen}(\alpha_1) = KH.P_2.\text{sen}(\alpha_2)$$

Cuando, como en nuestro caso, α y α_2 son suplementarios (o sea, $\text{sen}(\alpha_1) = \text{sen}(\alpha_2)$) el sistema estará en equilibrio si $KD.P_1 = KH.P_2$

Por la Propiedad 5, también recogida en este Anexo, Arquímedes sabe que:

$$\frac{XB}{AX} = \frac{SF}{FX} \Rightarrow \frac{XB}{AX} + 1 = \frac{SF}{FX} + 1 \Rightarrow \frac{XB + XA}{AX} = \frac{SF + FX}{FX} \Rightarrow \frac{AB}{AX} = \frac{SX}{FX} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AX} = \frac{SX}{FX} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ FX.AB = AX.SX

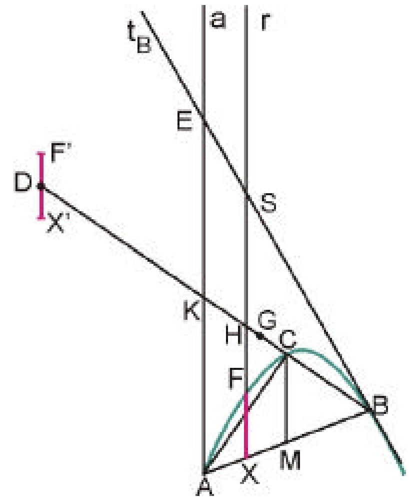
Y como por construcción y por Thales $\frac{AX}{KH} = \frac{AB}{KB}$, resulta que:

FX.KB = KH.SX

Esta igualdad le sugiere a Arquímedes aplicar el principio de la palanca, veamos cómo:

dado que el centro de gravedad de un segmento es su punto medio, que H es punto medio de SX y que DK.FX = KH.SX, si se considera un segmento F'X' de igual longitud y paralelo a FX de tal modo que D es su punto medio, resulta que FX, o sea F'X', equilibra a SX con punto de apoyo K.

Haciendo uso ahora de que el barrido de los segmentos FX (todos ellos con centro de gravedad D, fijo al variar X en AB) genera a la región sp(ABC) y que el barrido de los segmentos SX (cada uno con centro de gravedad H, que recorre la mediana KB al variar X) genera al triángulo ABE, deduce que la región sp(ABC), con centro de gravedad D, equilibra al triángulo ABE, con centro de gravedad G, su baricentro.



Para llegar a esta conclusión utiliza los siguientes lemas que describe, en una carta a Eratóstenes consignada en su tratado *El Método*, de la siguiente manera:

- “Si los centros de gravedad de tantas magnitudes como se quiera se encuentran sobre una misma recta, el centro de gravedad de la magnitud, suma de las magnitudes consideradas, estará también considerada[4] sobre la misma recta.”[5]

- “El centro de gravedad de un triángulo es el punto en que se cortan las rectas que unen los vértices del triángulo con los puntos medios de los lados.”

Se cumple entonces que:

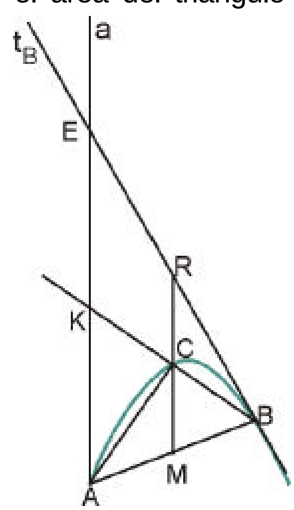
$$DK.á(sp(ABC)) = KG.á(\overset{\Delta}{ABE})$$

y como además $DK \underset{\text{por construcción}}{=} KB$ y $KG \underset{\text{prop. baricentro}}{=} \frac{1}{3}KB$ resulta que:

$$\boxed{á(sp(ABC))=1/3.á(\overset{\Delta}{ABE})} \quad (1)$$

Faltaría probar que el área del triángulo ABE es cuatro veces el área del triángulo ABC.

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AKB} \approx \overset{\Delta}{MCB} \rightarrow \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{CM}{KA} \\ KA = EK \text{ y } AM = MB \end{array}\right\} \rightarrow CM = \frac{KA}{2} = \frac{EA}{4} \rightarrow$$



$\rightarrow$ la altura del triángulo ABE es el cuádruple de la altura del triángulo ABC y como sus bases son la misma se cumple:

$$\boxed{á(\overset{\Delta}{ABE}) = 4.á(\overset{\Delta}{ABC})} \quad (2)$$

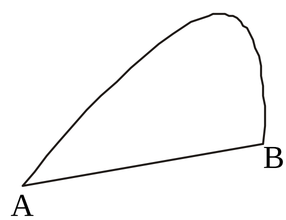
[4] Cuando dice “considerada” deberemos entender que pertenece al segmento.
[5] La palabra recta deberá entenderse como segmento de recta.

De (1) y (2) se deduce: $\boxed{\text{à}(sp(ABC)) = 4/3.\text{à}(\overset{\Delta}{ABC})}$

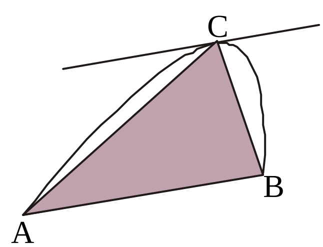
3. Método geométrico

Una vez que logra postular que el área del segmento de parábola es 4/3 el área del triángulo inscrito en el mismo, Arquímedes se avoca a demostrar rigurosamente este resultado en forma geométrica utilizando el método de exhaución y la doble reducción al absurdo[6]. Esta forma de trabajo era usual en él y así lo consigna en una carta a Eratóstenes: "... será posible captar ciertas cuestiones matemáticas por medios mecánicos, lo cual, estoy convencido, será útil también para demostrar los mismos teoremas. Yo mismo, algunas de las cosas que descubrí primero por vía mecánica, las demostré luego geométricamente, ya que la investigación hecha por este método no implica verdadera demostración. Pero es más fácil, una vez adquirido por este método un cierto conocimiento de los problemas, dar luego la demostración, que buscarla sin ningún conocimiento previo". (Torija, 1999).

Para ello considera la región comprendida entre la parábola y una cuerda AB de la misma.

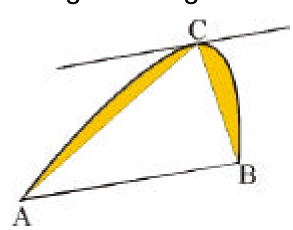


Sea C el punto de la parábola tal que la tangente a la misma es paralela a la cuerda AB.



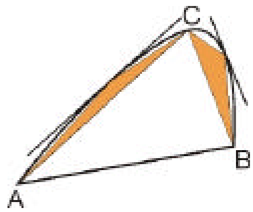
Veamos la demostración.[7]

Su primera aproximación al área es entonces el triángulo ABC y el "error" en esta instancia es la zona sombreada de la siguiente figura.

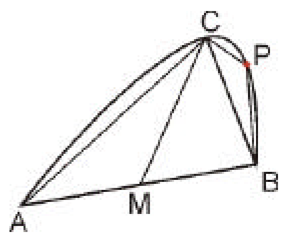


[6] Las propiedades que se utilizan en las siguientes demostraciones figuran en este Anexo.
[7] Esta demostración está basada en la que figura en Stein (1999).

Repite el procedimiento inscribiendo dos triángulos más pequeños sobre los segmentos AC y CB de tal forma que el tercer vértice sea el punto de intersección de la parábola y la tangente a la misma paralela a las cuerdas AC y BC respectivamente.



Continúa con este procedimiento n veces y demuestra que el área de los triángulos agregados en cada etapa es $\frac{1}{4}$ del área adicionada en la etapa anterior.
Basados en las construcciones anteriores se considera M punto medio del segmento AB y P el punto de la parábola cuya tangente es paralela a la cuerda CB.

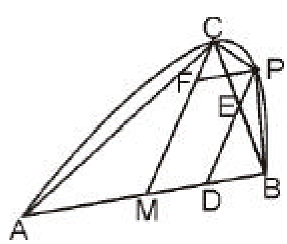


Se demostrará que el área del triángulo BPC es un cuarto del área del triángulo BCM.

Se traza por P la paralela a CM, que corta a AB en D y a CB en E.
E es el punto medio del segmento CB por ser PE el eje del segmento de parábola[8] BPC (Propiedad 1).

$$\left.\begin{array}{l}\text{E punto medio de BC}\\ \text{ED // CM}\end{array}\right\}\underset{\text{paralela media}}{\Rightarrow}\text{D punto medio de MB}$$

Por P traza la paralela a AB que corta a CM en F.



$$\left.\begin{array}{l}BM = 2DM\\ DM = PF\end{array}\right\}\Rightarrow BM = 2PF$$

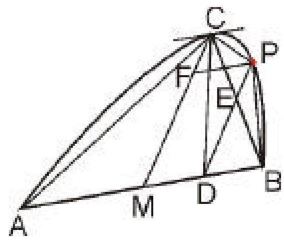
$$\left.\begin{array}{l}BM = 2PF\\ {}^{9}\ \dfrac{CM}{CF} = \dfrac{(BM)^2}{(PF)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{CM}{CF} = 4 \Rightarrow CM = 4CF$$

---

[8] El eje de un segmento de parábola es la recta paralela al eje de la parábola por el punto de intersección de la tangente a la parábola paralela a la cuerda que determina el segmento parabólico. Por la propiedad 1, esta recta contiene a los puntos medios de las cuerdas paralelas a la dada.

$$\left.\begin{array}{r} CM = 4CF \\ PD = 3CF \\ \underset{\substack{\text{paralela}\\ \text{media}}}{ED \;=\;} (1/2)CM = 2CF \end{array}\right\} \Rightarrow PE = PD - ED = 3CF - 2CF = CF \Rightarrow ED = 2PE$$

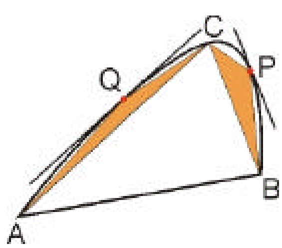
Se traza el segmento CD.



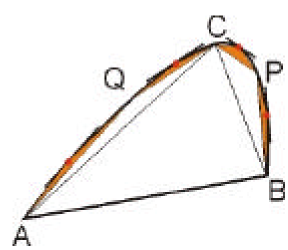
Al ser D punto medio del segmento BM, se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} á\left(\overset{\Delta}{CMB}\right) = 2á\left(\overset{\Delta}{CDB}\right) \\ á\left(\overset{\Delta}{CDB}\right) \underset{\substack{ED=2PE\\ E,D,yPalineados}}{=} 2á\left(\overset{\Delta}{CPB}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow á\left(\overset{\Delta}{CPB}\right) = (1/4)á\left(\overset{\Delta}{CMB}\right)$$

Arquímedes comienza a agotar la región parabólica con triángulos siguiendo el procedimiento anteriormente mencionado.



1



2

De acuerdo a lo demostrado anteriormente el área de los dos triángulos de la figura 1 es ¼ del área del triángulo ABC
Análogamente, el área de los 4 triángulos sombreados de la figura 2 es ¼ del área sombreada en la figura 1.
Se sigue este razonamiento y se agregan ahora ocho triángulos, en condiciones similares a las anteriores, y el área de estos es ¼ del área de los 4 agregados en la etapa anterior.

---

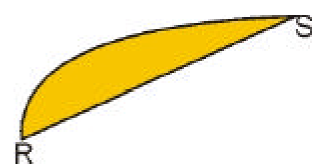
[9] Propiedad 3: Si desde un punto P de una parábola se traza una recta (r) paralela al eje de la misma, y desde otros dos puntos A y B de la parábola se trazan rectas paralelas a la tangente en P que cortan a (r) en A' y B' respectivamente, entonces se cumple que: PA/PA' = $(AA')^2/(BB')^2$.

Tenemos entonces después de n etapas que el área del polígono formado por todos los triángulos que se construyeron es:

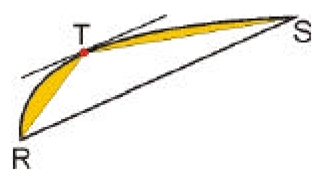
$$\acute{a}(\overset{\Delta}{ABC})+\frac{1}{4}\acute{a}(\overset{\Delta}{ABC})+\frac{1}{4^2}\acute{a}(\overset{\Delta}{ABC})+\ldots+\frac{1}{4^n}\acute{a}(\overset{\Delta}{ABC})=\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right)\acute{a}(\overset{\Delta}{ABC})$$

Arquímedes conocía que la suma de la serie geométrica anterior se aproxima a 4/3[10] a medida que n crece, entonces deduce que el área del segmento de parábola es al menos 4/3 del área del triángulo ABC. El área del polígono se puede aproximar tanto como se quiera al del segmento de parábola, es decir que la diferencia entre el área del segmento de parábola y la del polígono puede hacerse menor que cualquier cantidad prefijada (en lenguaje actual: el área de la región no cubierta por el polígono tiende a 0).

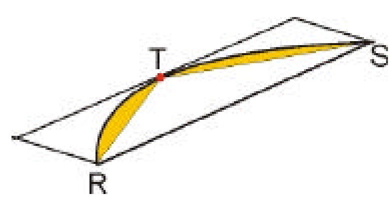
La región no cubierta en cada etapa está formada por pequeños segmentos de parábolas como la que sigue:



En la etapa que sigue se agrega un triángulo RST, siento T el punto de la parábola en la que la tangente es paralela a la cuerda RS. La región no cubierta queda reducida a la región sombreada de la figura siguiente.



Se construye el paralelogramo cuyos lados son RS, la tangente a la parábola en T y los segmentos trazados desde R y S paralelos al eje del segmento de parábola.



Como el área del triángulo RST es la mitad del área del paralelogramo, es más que la mitad del área del segmento de parábola. Entonces el error que se comete en cada etapa es menor que la mitad del error cometido en la etapa anterior. Aplicando la proposición X.1 de los *Elementos de Euclides* que mencionamos anteriormente, el error tiende a cero a medida que se aumenta el número de etapas.

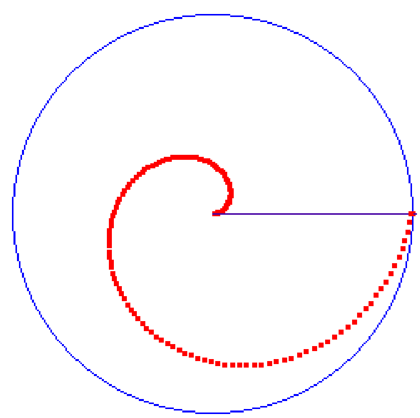
---

[10] Una prueba visual del resultado de esta suma fue presentada en el Capítulo I en el numeral I.3.1.

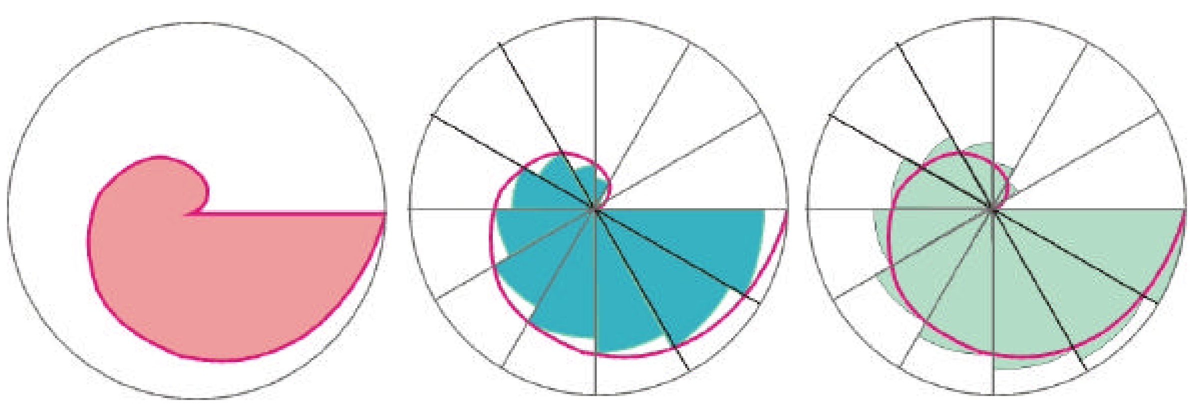
Para finalizar, Arquímedes prueba que el área del segmento de parábola inicial no puede ser mayor ni menor que 4/3 del área del triángulo ABC, por lo que debe ser igual.

4. Otros aportes de Arquímedes

Arquímedes también usó el método de exhaución para determinar el área de la espiral. Según sus palabras: "Imagínese una línea que gira con velocidad angular w constante alrededor de un extremo, manteniéndose siempre en un mismo plano, y un punto que se mueve a lo largo de la línea con velocidad lineal constante: ese punto describirá una espiral". (Torija, 1999).



Pero la forma de aproximar el área en esta ocasión no es la de agotar el área añadiendo cada vez más figuras. Aquí Arquímedes supone al área de la figura contenida entre dos conjuntos de sectores circulares: uno por defecto, utilizando como radio la menor distancia del origen a la espiral, y otro por exceso, esta vez con el radio igual a la mayor distancia.



Divide a la figura en sectores cada vez más pequeños, de forma tal que la diferencia entre el área buscada y la suma de las áreas de los sectores inscritos (análogo con los circunscritos) pueda hacerse menor que cualquier magnitud dada.
Al final de la demostración utiliza nuevamente la doble reducción al absurdo para terminar asegurando que: "el área limitada por la primera vuelta de la espiral y el área inicial es igual a 1/3 del primer círculo".

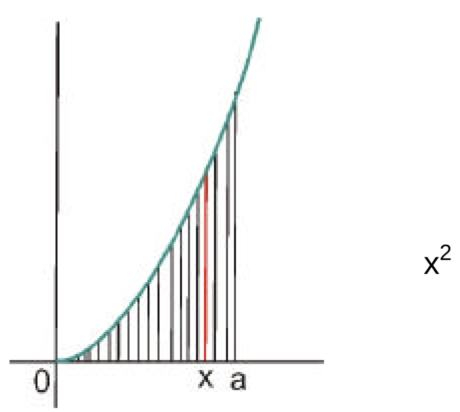
Buonaventura Cavalieri
Siguiendo los pasos de Arquímedes

Cavalieri se ocupa del tema de cálculo de áreas y volúmenes con razonamientos similares a los de Arquímedes, basándose en el concepto de los *"indivisibles"* que aparece por primera vez en su libro *Geometría Indivisibilibus* (1635).
Entre otros, calculó la integral de las potencias x^k para $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 9.

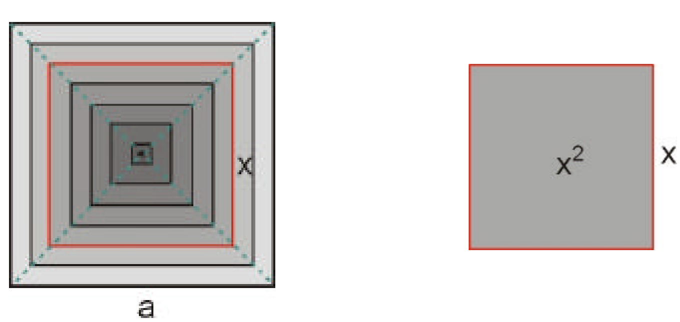
Veamos el caso de $k = 2$, en la que hemos elegido simplificar los razonamientos originales de Cavalieri.

Queremos calcular el área de la parábola de ecuación $y = x^2$ entre 0 y a.
Consideraremos al área de la figura formada por todas las líneas perpendiculares al eje de las abscisas, como se ve en la figura. La longitud de la línea que corresponde a la abscisa x es x^2 y si escribimos el área como la suma de todas sus líneas obtendremos que el área de la parábola es:

$$\boxed{A(P) = \text{omn}\ (x^2) \text{ con } x \text{ variando entre } 0 \text{ y } a.} \quad (1)$$



Tomemos ahora una pirámide de base cuadrada de lado a y altura a. Esta pirámide estará formada por cuadrados paralelos a la base, de arista x, que varia entre 0 y a, y área x^2.



Como el volumen de la pirámide es la suma de todos sus cuadrados obtenemos el volumen de la pirámide sumando las áreas de éstos:

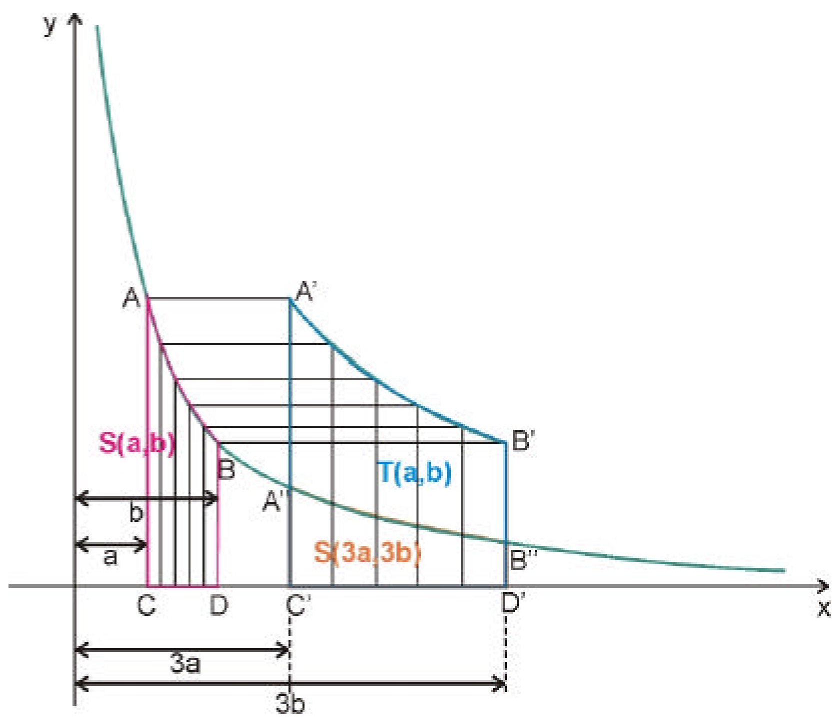
$\boxed{V = \text{omn}\ (x^2) \text{ con x variando entre 0 y a.}}$ (2)

De (1) y (2) obtenemos que el área debajo de la parábola es igual al volumen de la pirámide que es $\frac{a^3}{3}$ resultado que ya era conocido y que él obtiene a su vez con su método, dándole seguridad al mismo. Este resultado en el lenguaje actual sería: $\int_0^a x^2 = \frac{a^3}{3}$.

Grégoire de Saint-Vicent

Hipérbola y logarítmos

Al trabajar con la hipérbola equilátera de ecuación x.y = 1 considera los intervalos [a,b] y [3a,3b] representados en la figura con los segmentos CD y C'D' respectivamente.



Establecida una partición en [a,b], la suma de las áreas de los rectángulos que se determinan (que llamaremos S(a,b)) aproximan el área del trapecio mixtilíneo ACDB (que llamaremos A(a,b)).

Cada partición de [a,b] determina una partición en el intervalo [3a,3b] de la siguiente manera:

Dado un intervalo [a,b] y los puntos $a = p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n = b$ tales que $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$.

Por monotonía de reales sabemos que: $3p_1 < 3p_2 < \ldots < 3p_n$.

Sea $P[a,b] = \{ p_1, p_2, \ldots , p_n \}$ una partición del intervalo [a,b] entonces se cumple que

$P[3a,3b] = \{ 3p_1, 3p_2, \ldots, 3p_n \}$ es una partición de [3a,3b].

Consideremos ahora los puntos:

A' , intersección de las rectas de ecuación $x = 3p_1$ e $y = \dfrac{1}{p_1}$

B' , intersección de las rectas de ecuación $x = 3p_n$ e $y = \dfrac{1}{p_n}$

De acuerdo a lo trabajado por Saint-Vicent y ayudándonos con la figura, podemos observar que la suma de las áreas de los rectángulos que se determinan (S(3a,3b)) aproximan al área del trapecio mixtilíneo A''C'D'B'' (A(3a,3b)).

Consideremos además el trapecio mixtilíneo A'C'D'B' cuya área es aproximada por la suma de los rectángulos que llamaremos T(a,b).

Comparando rectángulo a rectángulo observamos:

- Los rectángulos cuya suma llamamos T(a,b) tienen base el triple de los de S(a,b) y la misma altura, por lo que su área es el triple.
  Base de un rectángulo cualquiera de S(a,b): $p_i - p_{i-1}$
  Base del rectángulo correspondiente en T(a,b): $3p_i - 3p_{i-1} = 3(p_i - p_{i-1})$

- Los rectángulos cuya suma llamamos S(3a,3b) tienen la misma base que los de T(a,b) y su altura es un tercio de la de éstos por lo que su área es un tercio de la de T(a,b).

  Altura de un rectángulo cualquiera de S(3a,3b): $\dfrac{1}{3p_i} - \dfrac{1}{3p_{i-1}} = \dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{1}{p_i} - \dfrac{1}{p_{i-1}}\right)$

  Altura del rectángulo correspondiente en T(a,b): $\dfrac{1}{p_i} - \dfrac{1}{p_{i-1}}$

De estas observaciones se deduce que:

$$\left.\begin{array}{l} S(3a,3b) = \dfrac{1}{3} \,.\, T(a,b) \\[2ex] T(a,b) = 3S(a,b) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad S(3a,3b) = S(a,b)$$

Al considerar una subdivisión infinita de rectángulos con base infinitamente pequeña obtendremos que las áreas A(a,b) y A(3a,3b) son iguales.

Este resultado se puede generalizar para cualquier $k \in R^+$, obteniendo:

$$A(a,b) = A(ka,kb), \ \forall\, k \in R^{+}. \ (1)$$

Muy poco tiempo después, su discípulo **Alfonso Antonio de Sarasa (1618-1667),** analizando la igualdad (1) reconoce que la cuadratura de la hipérbola está estrechamente vinculada con la propiedad del producto de los logaritmos, observando entonces que las áreas hiperbólicas pueden hacer el papel de los logaritmos.

Trabajando nuevamente con la hipérbola de ecuación x.y = 1 y usando la notación definida anteriormente se define:

$$Lx = \begin{cases} A(1,x) & \text{si } x \geq 1 \\ -A(x,1) & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Tomando a, b y c en progresión geométrica tales que 1< a < b < c se tiene que:

$$L(a) + L(c) = A(1,a) + A(1,c) =$$

$$\underset{(1)}{=} A(c,ac) + A(1,c) = A(1,ac) \underset{\text{prog. geom.}}{=} A(1,b^2) =$$

$$= A(1,b) + A(b,b^2) \underset{(1)}{=} A(1,b) + A(1,b) = 2.\ A(1,b) = 2.L(b)$$

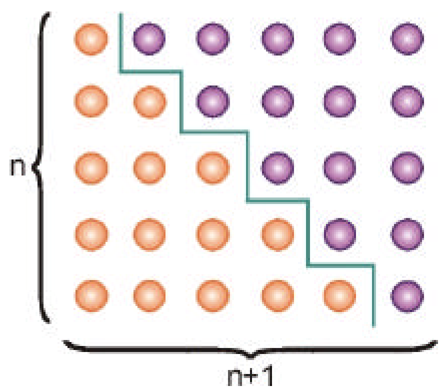
Obtenemos entonces que L(a) + L(c) = 2.L(b), lo que implica que L(a), L(b) y L(c) están en progresión aritmética, deduciendo así el comportamiento logarítmico del área hiperbólica.

Pruebas visuales de sumas de enteros

En este Anexo se presentan algunas pruebas visuales de sumas de enteros que utilizamos en este Anexo para el cálculo de las áreas que figuran en el Capítulo III.

(1) Suma de los primeros n naturales

La siguiente prueba es adjudicada a “Los antiguos Griegos” (En Nelsen, 1993).

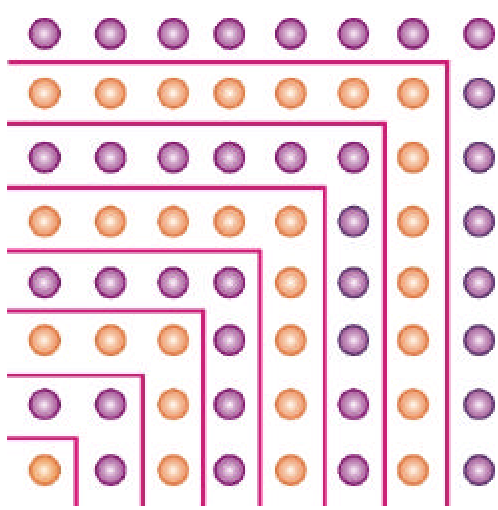


$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

(2) Suma de impares

La siguiente prueba pertenece Nicomaco de Gerasa (aprox. 100 d.C.) (En Nelsen, 1993).

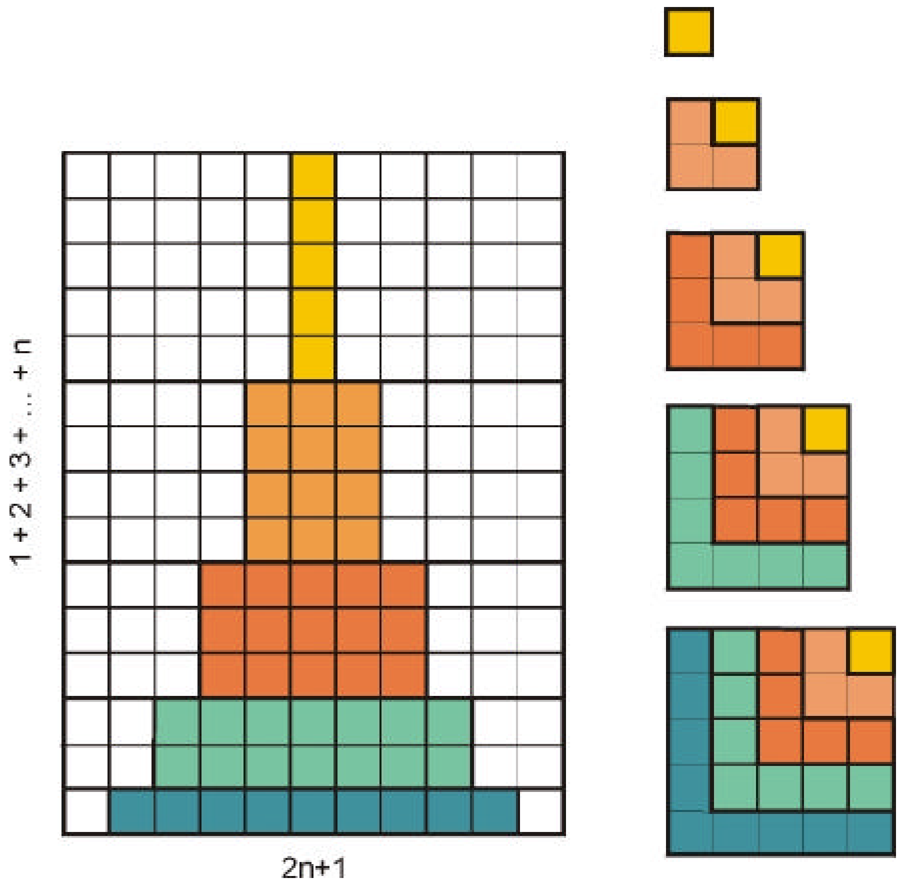


$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} (2i-1) = n^2}$$

(3) Suma de los cuadrados de los primeros n números naturales

La siguiente prueba pertenece Gardner, M. y Kalman, D. (En Nelsen, 1993).



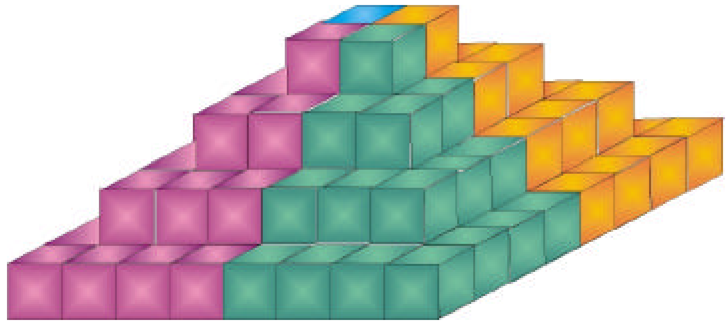
$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = (2n+1)(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

$$3\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = (2n+1)\sum_{i=1}^{i=n} i$$

$$3\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = (2n+1)\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{(2n+1).n.(n+1)}{6}}$$

(4) Suma de los cuadrados de los pares



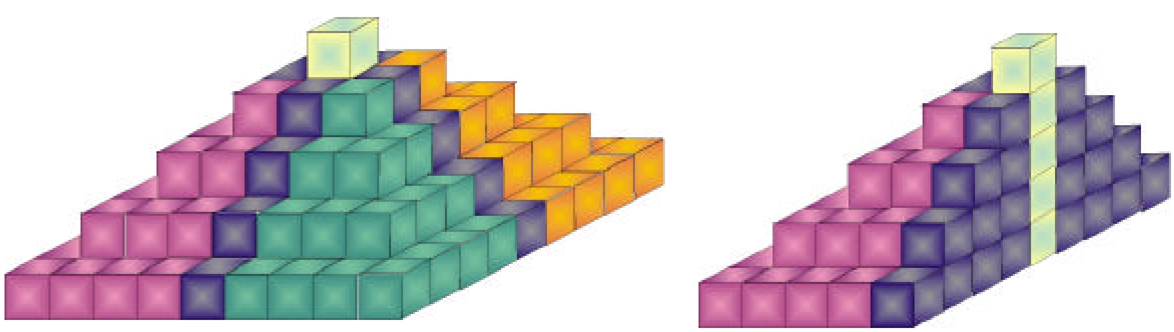
$$2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2=4(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}(2i)^2=4.\sum_{i=1}^{i=n}i^2$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}(2i)^2=4.\sum_{i=1}^{i=n}i^2\underset{por(3)}{=}4.\frac{(2n+1).n.(n+1)}{6}\Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n}(2i)^2=\frac{2.n.(n+1)(2n+1)}{3}}$$

(5) Suma de los cuadrados de los impares



$$1^2+3^2+\ldots+(2n+1)^2=4(1^2+2^2+\ldots+n^2)+4(1+2+\ldots+n)+(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n+1\,sumandos})$$

$$\sum_{i=0}^{i=n}(2i+1)^2=4.\sum_{i=1}^{i=n}i^2+4.\sum_{i=1}^{i=n}i+1.(n+1)$$

$$\sum_{i=0}^{i=n}(2i+1)^2 = 4.\sum_{i=0}^{i=n} i^2 + 4.\sum_{i=0}^{i=n} i + (n+1) \underset{\text{por(1)y(3)}}{=}$$

$$= 4.\frac{(2n+1).n.(n+1)}{6} + 4.\frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) =$$

$$= \frac{2.(2n+1).n.(n+1)}{3} + 2.n.(n + 1) +(n + 1) =$$

$$= \frac{2.(2n+1).n.(n+1) + 6.n.(n+1) + 3(n+1)}{3} =$$

$$= \frac{(n+1)[2.(2n+1)n + 6n + 3]}{3} =$$

$$= \frac{(n+1)[4n^2 + 2n + 6n + 3]}{3} =$$

$$= \frac{(n+1)[4n^2 + 2n + 6n + 3]}{3} =$$

$$= \frac{(n+1)[4n^2 + 8n + 3]}{3}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n}(2i+1)^2 = \frac{(n+1)[4n^2 + 8n + 3]}{3}}$$

Organización del sistema educativo uruguayo

En Uruguay la enseñanza está dividida en tres etapas: Enseñanza Primaria, Enseñanza Media y Enseñanza Superior. Nos centraremos en las dos primeras etapas que son las que han recorrido los estudiantes que entrevistamos para la presente investigación.

La Enseñanza Primaria abarca seis años y las edades de los alumnos van desde los 6 años hasta los 12 años aproximadamente. La Enseñanza Media está separada en Técnico-Profesional (Universidad del Trabajo de Uruguay) y Secundaria. La Enseñanza Secundaria también abarca seis años repartidos en Ciclo Básico Único (CBU), correspondientes al 7º, 8º y 9º años de escolarización, con estudiantes cuyas edades oscilan entre los 13-14 años y los 15-16 años; y los siguientes tres años corresponden al Bachillerato Diversificado (BD).

Tanto la Enseñanza Primaria como la Enseñanza Media se rigen por un plan único a nivel nacional, siendo obligatorios los primeros nueve años de escolarización.

El Bachillerato Diversificado está organizado de la siguiente forma:

- El primer año es común a todas las orientaciones y se dedican a la Matemática 4 horas semanales. En toda la Enseñanza Media, lo que llamamos “horas” de clase son módulos de 35 o 40 minutos.

- El segundo año está organizado en tres orientaciones: Humanística, Biológica, Científica. Las dos primeras con un curso de Matemática de una carga horaria semanal de 5 “horas”; la Orientación Científica con un curso de Geometría Euclidiana de 6 “horas” semanales y un curso de Álgebra de 6 “horas” semanales.

- Para cada una de las tres Orientaciones de segundo año, en el tercer curso se abre la posibilidad a diferentes opciones, según el siguiente cuadro:

1º BD	2º B.D. Orientación	3º B.D. Opción
Común	Humanístico	Derecho
		Economía
	Biológico	Agronomía
		Medicina
	Científico	Arquitectura
		Ingeniería

En las diferentes opciones los cursos de matemática y sus respectivas cargas horarias son:

- Derecho: no tiene Matemática.

- Economía tiene dos cursos de Matemática: un curso de 5 “horas” semanales de Geometría Analítica y un curso de 5 “horas” semanales de Estudio de Funciones.
- Medicina y Agronomía: un curso de Matemática 5 “horas” semanales en donde se tratan algunos temas de Geometría Analítica Plana, Estudio de Funciones e Integrales.
- Arquitectura: un curso de 6 “horas” semanales de Estudio de Funciones, Geometría Analítica Plana y Geometría Descriptiva
- Ingeniería: un curso de 6 “horas” semanales de Estudio de Funciones y Series, un curso de 6 “horas” semanales de Geometría Analítica y Proyectiva; un curso de 5 “horas” semanales de Geometría Descriptiva.

La carga horaria de todos los cursos de segundo y tercer año de B.D. se dividen en dos “horas” de práctico y las restantes son dedicadas al curso teórico.

Como se puede apreciar, de acuerdo a las opciones que se le presentan a los estudiantes para el último año de Bachillerato, éste está concebido como una antesala para próximos estudios universitarios y básicamente la concepción y estructura de los programas se han mantenido casi incambiados desde el año 1941. En el plan de estudio de 1941 se establece una separación en la enseñanza de la matemática dividiendo a la asignatura en varias materias, no existiendo conexión entre ellas en la mayoría de los casos. Es así que los estudiantes tienen un acercamiento a la asignatura en forma compartimentada recibiendo cursos de Álgebra, Análisis y Geometría no pudiendo muchas veces apreciar las interconexiones naturales entre ellas.

La división de cada “Matemática” en teórico y práctico hace que muchos de los estudiantes perciban a la asignatura como dos cursos diferentes: en las horas de clase dedicadas al teórico se presenta el tema generalmente por parte del docente mientras que en las horas de práctico se intenta que el estudiante aplique lo enseñado en el teórico mediante la resolución de problemas inherentes al tema.

En los cursos del B.D. los profesores trabajan bajo el supuesto de que hay que llegar al examen habiendo dado ciertos temas con determinado nivel de profundidad, lo que implica no sólo el dominio de la mecánica de resolución de ejercicios sino fundamentalmente la comprensión de los temas.
Debido a razones de tiempo, aspiraciones programáticas, organización, número de estudiantes por grupo, etc., muy frecuentemente no se logra el objetivo que se propuso el docente y los estudiantes no manejan la mecánica de los ejercicios y problemas que se les va a proponer en el examen, lo que lleva al fracaso de gran cantidad de los estudiantes en esta instancia para ellos decisiva.

1. Programas de Matemática del Bachillerato Diversificado

A continuación presentamos los programas de las diferentes orientaciones y opciones que ofrece el B.D. de Uruguay con los que han trabajado los estudiantes encuestados para la presente investigación.
Todos ellos son avalados por la Inspección de Matemática del Consejo de Educación Secundaria de la Administración Nacional de Educación Pública.

Los programas correspondientes a primer y segundo año de B.D. son comunes a todos los estudiantes encuestados y para el tercer año presentamos los programas de las dos opciones a las que pertenecen: Arquitectura e Ingeniería.
También adjuntamos el programa del tercer año correspondiente a la opción Medicina–Agronomía en donde figura el tema que nos ocupa.

✘ *Programa: 1er. año Bachillerato Diversificado*

Contenidos

✘ **Sucesiones** (10 hs.)
Ejemplos. Sucesiones determinadas por: término general, recurrencia, otra forma. Crecimiento. Decrecimiento. Monotonía. Convergencia. Error, acotación del mismo. Progresiones: sucesiones aritméticas y sucesiones geométricas.

✘ **Funciones polinómicas. Ecuaciones** (24 hs.)
Estudio de funciones $f: x \to ax + b$, $f: x \to ax^2 + bx + c$. Gráfica. Ceros (obtención gráfica y cálculo analítico de los mismos). Signos. Crecimiento. Decrecimiento. Extremos. Problemas de 1ro. y 2do. grado. Sistemas lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas. Aplicaciones.

✘ **Funciones racionales** (10 hs.)
Estudio de la función $f: x \to \dfrac{ax + b}{cx + d}$. Gráfica. Dominio. Ceros. Signo. Ecuaciones racionales.

✘ **Función exponencial** (6 hs.)
Gráfica. Signo. Crecimiento . Decrecimiento.

✘ **Función logarítmica** (8 hs.)
Gráfica. Variación y signo. Funciones biyectivas y sus inversas. Cálculo logarítmico.

✘ **Funciones angulares** (12 hs.)
Seno. Coseno. Tangente. Gráfica. Ceros. Signos. Periodicidad. Teoremas del seno y coseno. Cálculo de distancias y de áreas.

✘ **Actividades geométricas** (18 hs. + 14 hs.)
Revisión de construcciones con regla y compás: perpendiculares, paralelas, mediatriz, bisectriz, arco capaz, simetrías. Aplicaciones a problemas sobre construcción de triángulos y lugares geométricos. (18 hs.)
Incidencia. Ortogonalidad y paralelismo en el espacio. Los poliedros desarrollados y secciones planas, distancias, ángulos y sus representaciones planas. Areas y volúmenes. (14 hs.)

Bibliografía

Mikrakys 4°	Gallo, Haniottis, Muñiz, Silvera
Matemática	Colección Tapia
Matemática	Colección Rey Pastor y Pereira
Lugares Geométricos. Métodos	Inspección de Matemática
Matemática 4°	Colección Tapia
Matemática 4º	Lois y González Cabillón

✘ *Programa: 2do. año Bachillerato Diversificado Orientación CIENTÍFICA*
Matemática "A"

(4 horas teóricas y 2 prácticas)

Análisis matemático

- Número natural**.** Operaciones. Desigualdad. Inducción completa (6 horas). División entera. Propiedades. Algoritmo de Euclides. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Teorema de Euclides. Números primos y compuestos. Descomposición en factores primos. (6 horas)

- Arreglos, permutaciones y combinaciones simples y con repetición. Números combinatorios. Propiedades. Inversiones en las permutaciones. (5 horas)

- Número entero. Operaciones. Desigualdad. Número racional. Operaciones. Desigualdad. Potencia de un binomio. Potencia de un polinomio. Noción de probabilidad. Probabilidad total y compuesta. (4 horas)

- Expresiones algebraicas. Clasificación. Equivalencia. Polinomios. Operaciones. Fracciones racionales. División por (x-a) y sus aplicaciones. Descomposición factorial. Identidad de polinomios. Coeficientes indeterminados. División de polinomios ordenados según potencias decrecientes. Algoritmo de Euclides. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Nociones sobre la generalización a varias variables. Raíces enteras y racionales de un polinomio con coeficientes enteros. Relaciones entre coeficientes y raíces de un polinomio. (12 horas)

- Ecuaciones e inecuaciones con una incógnita.- Equivalencia. Transformación. Preparación de ecuaciones. (4 horas)

- Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Sistemas de ecuaciones de primer grado. Equivalencia. Sistemas incompatibles, determinados e indeterminados. Método de reducción. Sistemas de inecuaciones. (7 horas)

- Matrices y determinantes. Adjuntos y menores complementarios. Cálculo de determinantes. Aplicación de los determinantes a la resolución y discusión de los sistemas lineales. Características de una matriz. Regla de Cramer y teorema de Rouché. (10 horas)

- Ecuaciones diofánticas. Soluciones enteras y soluciones naturales. Congruencias. Números congruentes. Operaciones con congruencias. Sistemas de números incongruentes. Congruencia de Fermat. Ecuación Pitagórica. (6 horas)

- Cortaduras y pares de clases contiguas de números racionales. Número real. Desigualdad. Operaciones racionales. Cortaduras de reales. Pares de clases contiguas de reales. Raíz enésima. Potencias de exponente racional y potencias de exponente real. (10 horas)

- Logaritmos. Definición y existencia. Propiedades. Sistemas de logaritmos. Cambio de base. Logaritmos decimales. Uso de tablas. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. (5 horas)

- Número complejo. Sus representaciones. Operaciones. Potencias y raíces. Fórmula de Moivre. Aplicaciones. (7 horas)

- Funciones trigonométricas fundamentales. Uso de tablas. Variación de las funciones circulares. Teorema de los senos y del coseno. Fórmulas de adición de arcos. Transformación de sumas y diferencias en productos. Teorema de las tangentes. Ecuaciones y sistemas trigonométricos. Ejercicios y problemas de aplicación. (8 horas)

- Ecuaciones de segundo grado. Propiedades de las raíces. Discusión. Trinomio de segundo grado. Ecuaciones reductibles a las de segundo grado. Sistemas de segundo grado. (6 horas)

Bibliografía:

Matemática-Bachillerato 1, 2 y 3	Miguel de Guzmán
Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica	Earl Swokowski
Matemática	Trejo y Bosch
Introducción al Análisis Matemático	Osin
Calculus Vol. I	Tom Apóstol
Ejercicios de Análisis Matemático	Fascículos I al V de Inspección Docente
Funciones. Bachillerato 1er.Curso	Vincens Vives
Matemáticas. Factor	2.B.U.P. Vincens Vives
Elementos de Análisis Algebraico	J. Rey Pastor
Problemas de Examen	Inspección de Matemática 1999.

- ***Programa: 2do. año Bachillerato Diversificado Orientación CIENTÍFICA***
Matemática "B"

(4 horas semanales de clases teóricas y 2 horas semanales de clases prácticas)

I.- Geometría euclidiana plana

- **Axiomas de incidencia y orden**

Axiomas de incidencia en el plano. Consecuencias. Axiomas de orden en la recta. Axioma del semiplano. Figuras convexas.

- **El grupo de las isometrías**

Axiomas de determinación. La simetría axial. Consecuencias. Simetría central.
Traslaciones. El grupo de las traslaciones. Rotaciones. Antitraslaciones.
Reducción de una isometría al producto de simetrías axiales.

- **Axioma de continuidad**

Nociones de medida de segmentos. Teorema de Thales.

- **El grupo de las semejanzas**

Homotecias. Definición y propiedades. El grupo de las homotecias y las traslaciones. Semejanzas. Definición y propiedades.
Propiedades métricas derivadas de la semejanza. Teorema de Pitágoras. Lugar de los puntos cuya suma o diferencia de distancias a 2 puntos es constante. Potencia de un punto respecto a una circunferencia. Circunferencia de Apolonio.

II.- Geometría euclidiana del espacio

- **Incidencia y separación en el espacio**

Axiomas de incidencia en el espacio. Consecuencias. Axioma del semiespacio.
Figuras convexas en el espacio. Poliedros eulerianos.

- **El grupo de las isometrías**

Axioma de determinación. Ejemplos. Simetría especular. Simetría central. Perpendicularidad. Traslación y paralelismo.

- **Propiedades métricas de poliedros**

Prismas y pirámides. Los poliedros regulares convexos. Cálculo de sus elementos en función de la arista.

Nota: El programa no incluye temas tales como áreas y volúmenes. El docente los incluirá en el curso práctico sin el correspondiente desarrollo teórico.

Bibliografía:

Geometría Métrica Tomo I	Puig Adam
Cómo resolver problemas de Geom. Métrica (Geom. Plana. 2ª Parte Geom. del Espacio)	Petracca y Peralta
Geometría: Guías 1, 2 y 3	Casella, Vilaró, Louro, Gillespie
Geometría	Belcredi, Zambra
Lugares Geométricos. Métodos	Inspección de Matemática

- ***Programa: 3er. año Bachillerato Diversificado Orientación CIENTÍFICA Opción Arquitectura***

(4 horas semanales de clases teóricas y 2 horas semanales de clases prácticas)

- Objeto y método de la Geometría Analítica. Eje orientado. Segmento orientado. Abscisa. Principio fundamental de la Geometría Analítica. Teorema de Chasles. Sistemas coordenados. (3 hs.)

- Recta. Ecuaciones (general, explícita y segmentaria). Condiciones de paralelismo y perpendicularidad. Ángulos. Distancias. Áreas. (6 hs.)

- Circunferencia y parábola. Ecuaciones. Problemas relativos. (5 hs.)

- Elipse e hipérbola. Ecuaciones reducidas. Hipérbola equilátera. Ecuación de la hipérbola equilátera referida a las asíntotas. Problemas relativos a estas cónicas. La elipse como proyección de una circunferencia. (6 hs.)

- Funciones. Representación gráfica. Límites. Límites notables. Órdenes. Límites tipo. (12 hs.)

- Funciones derivables. Derivada puntual. Interpretación geométrica. Cálculo de derivadas. Función derivada primera y segunda. Diferenciales. (8 hs.)

- Estudio de funciones. Crecimiento. Decrecimiento. Máximos y mínimos en un punto y en un intervalo. Asíntotas. (4 hs.)

- Teoremas de Rolle y de Lagrange. Consecuencias del teorema de Lagrange. Condiciones suficientes de extremos relativos, condiciones suficientes de crecimiento (decrecimiento) en un intervalo, concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las funciones. Estudio completo de funciones. (12 hs.)

- Objeto y método de la Geometría Descriptiva. Proyecciones del punto y de la recta. Paralelismo entre rectas. (6 hs.)

- Representación del plano. Rectas notables en un plano. Paralelismo entre planos y entre recta y plano. (5 hs.)

- Intersección de planos y de rectas y planos. Aplicaciones. (3 hs.)

- Proyecciones de un ángulo recto. Perpendicularidad entre planos y entre planos y rectas. Aplicaciones. (3 hs.)

- Métodos de abatimiento. Cambio de plano vertical y giro de eje vertical. Problema directo e inverso. Aplicación a verdaderas magnitudes. (9 hs.)

- Poliedros. Representación de prismas y pirámides, cubos, tetraedros y octaedros regulares. Secciones planas. Intersección con una recta. Intersección de dos poliedros. Casos especiales de prismas y pirámides. (7 hs.)

- Cono y cilindro de revolución. Intersección con una recta. Planos tangentes. (5 hs.)

- Secciones planas de conos y cilindros de revolución. Verdadera magnitud de la sección. Proyecciones de una circunferencia. (4 hs.)

- Intersecciones de conos y cilindros de revolución. (4 hs.)

Bibliografía:

Geometría Analítica	Donato Di Pietro
Análisis Matemático (Volumen I)	J. Rey Pastor, J. Pi Calleja y A. Trejo

Geometría Descriptiva	Eduardo W. Coppetti
Geometría Constructiva aplicada a la ciencia	Fritz Hohemberg

Programa: 3er. año Bachillerato Diversificado Orientación CIENTÍFICA Opción Ingeniería. **Matemática "A"**

Número real

Fundamentación axiomática. Nociones de las funciones exponencial y logaritmo. Nociones sobre la topología usual de los reales: Conjuntos abiertos, cerrados, entornos, puntos de acumulación.

Sucesiones

Límite de sucesiones. Sucesiones monótonas y sus límites. Pares de sucesiones monótonas convergentes. Número e. Operaciones con sucesiones y cálculo de sus límites. Equivalencias. Orden de infinitésimos e infinitos. Ejemplos.

Funciones

Gráfico. Ejemplos. Función compuesta. Función inversa. Límite de una función. Operaciones con funciones y cálculo de sus límites. Límite de la función compuesta.

Funciones continuas

Definición de continuidad en un punto. Ejemplos de funciones continuas y discontinuas. Operaciones con funciones continuas. Continuidad de la función compuesta.

Funciones derivables

Definición de derivada en un punto. Interpretación geométrica. Definición de tangente . Ejemplos de funciones continuas derivables y no derivables. Función derivada. Operaciones con funciones derivables; reglas de derivación. Derivabilidad de la función compuesta.

Funciones continuas en intervalos

Teoremas de Bolzano, Darboux y Weierstrass. Aplicaciones.

Funciones derivables en intervalos

Función creciente en un punto. Extremos relativos. Vinculación con la derivada en un punto. Teoremas de Rolle y de Lagrange. Aplicaciones. Crecimiento en un intervalo. Criterios de extremos. Teoremas de Cauchy y de L'Hôpital. Aplicaciones al cálculo de límites.

Funciones inversas

Existencia, monotonía, continuidad y derivabilidad de las funciones inversas. Aplicaciones. Funciones trigonométricas inversas.

Estudio de funciones

Crecimiento y extremos. Concavidad e inflexiones. Asíntotas. Representación gráfica. Métodos de separación y aproximación de raíces.

- **Series numéricas**

Ejemplos. Convergencia. Series de términos positivos. Criterios de comparación. Criterios de D'Alembert y de Cauchy. Clasificación de la serie armónica generalizada. Series alternadas. Convergencia absoluta. Serie de Euler. Aplicaciones.

- **Aproximación de funciones por polinomios**

Fórmula de Taylor con resto de Lagrange. Aproximación local de una función por un polinomio. Aplicación al cálculo de límites. Series de potencias. Intervalo de correspondencia. Ejemplos. Series de Taylor . Aproximación de una función por un polinomio en un intervalo. Condiciones suficientes. Ejemplos.

Bibliografía:

Matemática de 6°	Balparda y Lois
Calculus	Apóstol
Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica	Swokowski
Calculus	Spivak
Matemática II C.U.V.	Miguel de Guzmán
Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático	Demidovich
Elementos de cálculo diferencial e Integral Tomo I y II	Sadosky
Cálculo Diferencial e Integral	Frank Ayres

- ***Programa: 3er. año Bachillerato Diversificado Orientación CIENTÍFICA Opción Ingeniería.*** **Matemática "B"**

Contenidos

- Sistema de coordenadas en una recta. Chasles. Relación simple. Sistema de coordenadas en un plano. Ecuación de la recta y problemas relativos. Haces de rectas. Inecuación del semiplano.

- Distancia entre puntos. Angulo de rectas. Rectas perpendiculares. Ecuación normal de la recta. Distancia de un punto a una recta. Aplicaciones. Transformación de coordenadas.

- Circunferencia. Ecuación. Problemas relativos. Potencia de un punto respecto de una circunferencia. Eje radical. Haces de circunferencias.

- Cónicas. Definición métrica y problemas relativos. Ecuaciones reducidas. Hipérbola equilátera. Ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas. Ecuación bilineal. Discusión de la ecuación de 2º grado. Consecuencias elementales.

- Métodos analíticos para determinación de lugares geométricos. Método de los parámetros. Familia de curvas dependientes de un parámetro. Haces de cónicas. Familias de rectas dependientes de un parámetro cuadrático. Envolvente.

- Espacio proyectivo. Relaciones de incidencia. Dualidad. Teorema de los triángulos homológicos. Aplicaciones.

- Grupos armónicos. Carácter proyectivo de los grupos armónicos. Ejemplos métricos de grupos armónicos.

- Proyectividades entre formas de primera especie. Definición y ejemplos. Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva. Perspectividades. Construcción de proyectividades. Ejemplos métricos de proyectividades. Relación de Steiner. Puntuales semejantes.

- Grupos proyectivos de cuatro elementos. Involución. Criterio fundamental. Propiedades de los elementos unidos. Ejemplos métricos de involuciones.

- Cónicas. Teoremas de Steiner, Pascal, Brianchon y Desargues. Aplicaciones. Polo de una involución. Par común a dos involuciones.

- Polaridad respecto de una cónica. Teorema de Seydewiz-Staudt. Involución de elementos conjugados.

- Propiedades métrico-proyectivas de las cónicas. Centro, diámetros, ejes, focos y directrices. Construcciones de cónicas.

Bibliografía:

Matemática II	Miguel de Guzmán
Álgebra Lineal	Colección Schaum Seymour Lipschutz
Geometría Analítica	Charles H. Lehmann
Geometría Analítica	Colección Schaum Joseph Kindel
Geometría Analítica	Di Pietro

- ***Programa: 3er. año Bachillerato Diversificado Orientación CIENTÍFICA Opción Ingeniería.*** **Matemática "C"**

CONTENIDOS
(3 horas de clases teóricas y 2 horas de prácticas semanales)

- Objeto y método de la Geometría Descriptiva. Proyecciones del punto y de la recta. Paralelismo entre rectas. (9 hs.)

- Repartición del plano. Rectas notables de un plano. Paralelismo entre planos y entre recta y plano. (6 hs.)

- Intersecciones de planos y de rectas y planos. Aplicaciones. (5 hs.)

- Proyección de un ángulo recto. Perpendicularidad entre planos y entre plano y recta. Aplicaciones. (4 hs.)

- Método de los cambios de planos, de los giros y de los abatimientos. Problema directo e inverso. Aplicaciones a verdaderas magnitudes. (18 hs.)

- Triedros. Conos de revolución. Aplicaciones. (3 hs.)

- Poliedros. Representación de prismas, pirámides y poliedros regulares. Secciones planas. Intersecciones con una recta. (8 hs.)

- Intersección de dos poliedros. Casos especiales de prismas y pirámides. (6 hs.)

- Superficies cónicas y cilíndricas. Intersecciones con una recta. Planos tangentes. Conos y cilindros de revolución. Aplicaciones. (6 hs.)

- Secciones planas de las superficies cónicas y cilíndricas. Casos especiales. Verdadera magnitud de la sección. Proyecciones de una circunferencia. (6 hs.)

- Intersecciones de superficies cónicas y cilíndricas. Casos especiales. (6 hs.)

Bibliografía:

Geometría Descriptiva — Eduardo Copetti

- ***Programa: 3er. año Bachillerato Diversificado Orientación BIOLÓGICA Opción Medicina – Agronomía***

- **Número real**

Axiomas de cuerpo ordenado. Propiedades. Valor absoluto. Definición y propiedades.
Axioma de completitud. Aplicaciones. Número e. Las funciones exponencial y logaritmo. Nociones y propiedades.

- **Elementos de Geometría Analítica Plana**

Sistema cartesiano ortogonal en el plano. Distancia entre dos puntos. Ecuación de la recta. Paralelismo y perpendicularidad. Ecuaciones de la circunferencia y de la parábola.

- **Funciones**

Gráfico. Ejemplos. Función compuesta. Función inversa. Límite de una función. Operaciones con funciones y cálculo de sus límites. Equivalencias. Órdenes de infinitésimos e infinitos. Ejemplos. Límites tipo.

- **Funciones continuas**

Definición de continuidad en un punto. Ejemplos de funciones continuas y discontinuas.
Operaciones con funciones continuas. Continuidad de la función compuesta.

- **Funciones derivables**

Definición de derivada en un punto. Interpretación geométrica. Definición de tangente. Ejemplos de funciones continuas derivables y no derivables. Función derivada.
Operaciones con funciones derivables. Reglas de derivación. Derivabilidad de la función compuesta.

- **Funciones continuas en intervalos**

Teoremas de Bolzano, Darboux y Weierstrass. Aplicaciones.

- **Funciones derivables en intervalos**

Función creciente en un punto. Extremos relativos. Vinculación con la derivada en un punto. Teoremas de Rolle y de Lagrange. Aplicaciones. Crecimiento en un intervalo. Criterios de extremos.

- **Estudio de funciones**

Crecimiento y extremos. Concavidad e inflexiones. Asíntotas. Representación gráfica.

- **Integrales**

Definición de Integral Definida. Aplicación a funciones monótonas y continuas. Enunciado de las propiedades de aditividad y linealidad. Teorema del valor medio. Regla de Barrow. Aplicaciones.

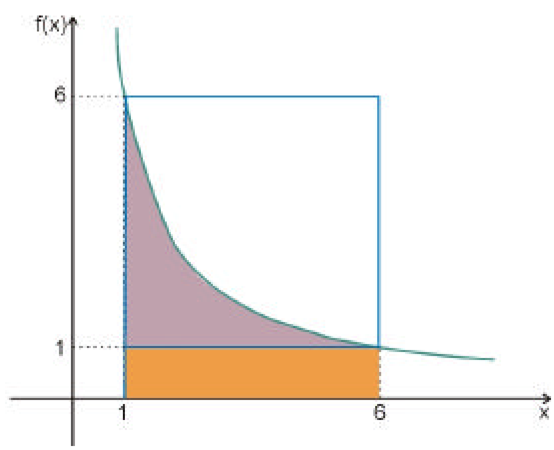
Algunos caminos empíricos para el cálculo de áreas

En general y para el caso particular de la determinación o aproximación de áreas es de destacar que existen otros caminos empíricos que se pueden recorrer en clase.

Un ejemplo de esto puede ser la realización de actividades en donde se puede recortar figuras de cartón, o cualquier otro material cuya superficie sea de densidad uniforme, y pesarlas, entonces sabiendo cuanto pesa un centímetro cuadrado de ese material se puede inferir el área de cualquier figura.

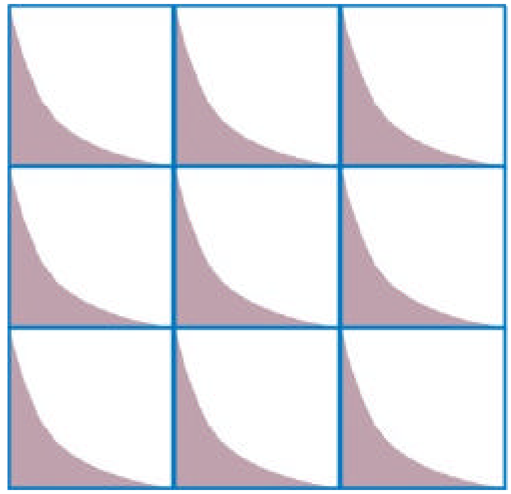
En el Capítulo I analizamos cómo se puede realizar en clase la actividad de aproximación del área de una región de contorno irregular utilizando el Método Montecarlo con el uso de un software adecuado.
Veamos ahora cómo hacerlo sin necesidad de un software de simulación. Necesitamos entonces que los estudiantes realicen la tarea de “elección al azar” de los puntos y de conteo.
Para ello retomemos el ejemplo analizado en el mencionado capítulo, es decir, tomemos la función $f\colon R^{*} \to R \,/\, f(x) = \dfrac{6}{x}$, que es una de las presentadas a nuestros estudiantes en la parte experimental, y consideremos la región determinada por su gráfica, el eje de las abscisas y las rectas de ecuación x = 1 y x = 6.

Dividiremos la región en dos partes como puede apreciarse en la figura.



El área del rectángulo naranja la podemos determinar sin ninguna dificultad, así que centraremos nuestra atención en la región pintada de color lila.

Para realizar la actividad podemos entregar a los estudiantes una plancha como la que aparece a continuación y con una piedrita muy pequeña o una bolita de papel diminuta ellos pueden ir haciendo los tiros y contando las veces que aciertan en la región a la que se le está buscando el área y el número total de tiradas que realizan.



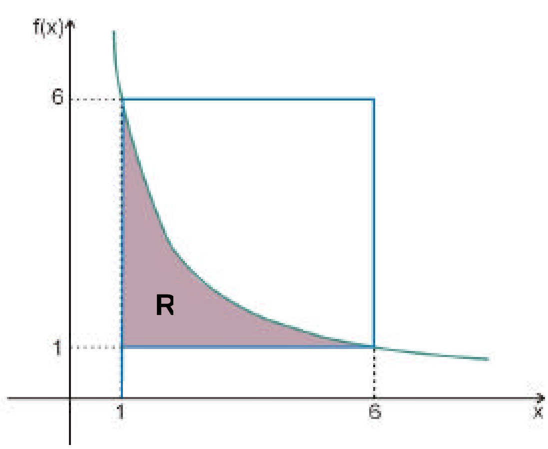
La idea de repetir la figura varias veces es para minimizar el problema de que la piedrita caiga fuera del cuadrado ya que si así sucediera puede que la atención se desvíe del problema planteado.

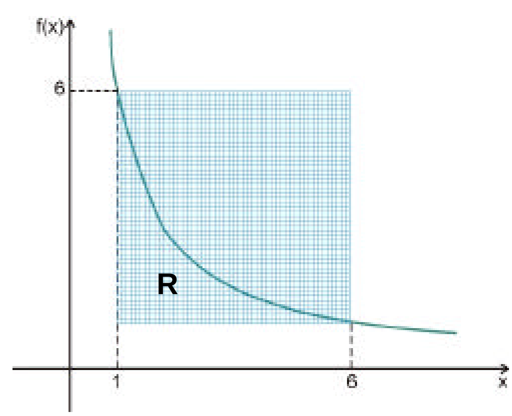
Cuando la actividad anterior fue propuesta a un grupo de estudiantes de 14–15 años, una estudiante sugirió realizar el dibujo en papel cuadriculado o milimetrado y contar el número de intersecciones de las líneas azules del papel asimilándolas como *puntos* en lugar de realizar la simulación.
En nuestro caso trabajamos en una hoja milimetrada con la gráfica hecha sobre un cuadrado de 5x5.

Si llevamos a cabo lo propuesto por la estudiante, debemos utilizar la siguiente proporción:

$$\frac{n}{R} = \frac{N}{C}$$

donde **N** es el número de *puntos* del cuadriculado del cuadrado, **n** el número de puntos del cuadriculado bajo la curva, **C** el área del cuadrado y **R** el área de la región bajo la curva.





Haciendo el conteo de puntos correspondientes a cada región obtenemos:

$$\frac{607}{R} = \frac{2500}{25}$$

Realizando cálculos obtenemos el valor 6,07 para R. Si a esto le sumamos el área del rectángulo naranja obtenemos la siguiente aproximación del área buscada: 11,07.

Estimemos el error absoluto cometido al aproximar por este método el área de la región R.

Error absoluto E_a: si *A* es el número que queremos aproximar y *a* una aproximación decimal de *A* entonces el error absoluto es $|A - a|$

El área de la región bajo la curva, calculada utilizando el Método Monte Carlo es:

$$Á_{MC} = 11{,}07$$

El área real de la región en cuestión es: 6.L(6).

$E_a = |6.L(6) - 11{,}07|$

Sabemos que:

$$1{,}7916 < L(6) < 1{,}7918$$

$$10{,}7496 < 6.L(6) < 10{,}7508$$

$$-10{,}7496 > -6.L(6) > -10{,}7508$$

$$0{,}3204 > 11{,}07 - 6.L(6) > 0{,}3192 \quad (1)$$

$$E_a = |6.L(6) - 11{,}07| = 11{,}07 - 6.L(6) \underset{\text{por } (1)}{<} 0{,}3204 = 3.204 \text{x} 10^{-1}$$

RELACIÓN DE CUADROS, TABLAS Y GRÁFICAS.