EULER: SU CONCEPTO DE SERIE NUMÉRICA INFINITA Y SU INFLUENCIA EN LA MATEMÁTICA DEL SIGLO XVIII

Alejandro Miguel Rosas Mendoza
CICATA-IPN México
alerosas@ipn.mx
Campo de investigación: Epistemología Nivel: Medio

Resumen. *En este ortículo se discute lo forma en que Euler utiliza las series numéricas y de funciones para resolver problemas de aplicación. Muchos autores afirman que los trobajos de Euler muestran un manejo poco formal de las series y un tipo de razonamiento pragmático en el que el énfasis se pone en el problemo a resalver y no en la formalidad. Algunos autores afirman lo contrario. En el cuerpo de este trabajo se muestran algunas afirmacianes de Euler al respecto y analizamos la forma en que éstas influyen sobre los motemáticos de la época.*

Palabras Clave: serie infinita, expansión, análisis, convergencia

Introducción

Después de la invención del cálculo, la solución de problemas que incluyen la aplicación de series numéricas y de funciones aumentó rápidamente. En esas primeras aplicaciones la convergencia de las series, ya sean numéricas o de funciones, está garantizada.

Sin embargo, lentamente empezaron a aparecer algunas paradojas, en ocasiones algunas series de funciones al ser evaluadas proporcionaban un valor numérico esperado; pero en algunas ocasiones al sustituir un valor diferente se obtenían expresiones incorrectas o imposibles.

Leibniz trató de explicar algunas paradojas que empezaron a surgir con el uso de series, por ejemplo, explicó que $1-1+1-1+1-1+\cdots$ tenía como límite ½ utilizando argumentos probabilísticos.

También utilizó la expresión:

$$1+x+x^2+x^3+x^4\cdots=\frac{1}{1-x}$$

para dar otro argumento a favor del valor de

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$$

y de la serie

$$1+2+4+8+\cdots=\frac{1}{1-2}=-1$$

(Gardiner, 2002, p. 82)

Al mismo tiempo han ido apareciendo algunas series numéricas infinitas a las que se les ha podido asignar un valor al que se le llama suma de la serie. Sin embargo, las series de las que se conoce su suma son tan pocas y tan difíciles de calcular que Jacob Bernoulli alrededor de 1700 falla al intentar calcular el valor de:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

y escribe:

> *"If somebody should succeed in finding what till now withstood our efforts and communicate it to us, we shall be much obliged to him."*
>
> (Gardiner, 2002, p. 248)

Es decir *"Si alguien tuviera éxito en encontrar lo que hasta ahora se ha resistido a nuestros esfuerzos y nos lo comunicara, estaremos en gran deuda con él"*

A pesar de las discusiones que se fueron generando, la aparición de Euler en el panorama científico de la época inicia una nueva era de desarrollo de las series infinitas.

Euler y las series infinitas

El primer trabajo de Euler es un artículo publicado sobre series que data de 1729 (presentado en 1730) *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales* *algebraice dari nequente* (Euler, 1738a) es decir "Sobre progresiones trascendentales, es decir, aquellas cuyos términos generales no pueden ser dados en forma algebraica".

En este trabajo inicia analizando la serie $1+1.2+1.2.3+1.2.3.4+etc$ y la progresión

$$\frac{1.2^n}{1+n}\ \frac{2.^{1-n}3^n}{2+n}\ \frac{3.^{1-n}4^n}{3+n}\ \frac{4.^{1-n}5^n}{4+n}\ etc.$$

y hace cálculos con integrales como en

$$\int x^e dx(1-x)^n = \frac{x^{e+1}}{e+1} - \frac{n.x^{e+2}}{1.(e+2)} + \frac{n.n-1..x^{e+1}}{1.2.(e+3)} - \frac{n.n-1.n-2..x^{e+4}}{1.2.3.(e+4)}\ etc.$$

En 1731 escribió su segundo artículo sobre series titulado *De summatione innumerabilium progresionum* (La suma de una progresión innumerable) en el que hace uso de

$$\int \frac{1-x^n}{1-x}dx$$

para encontrar sumas como

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+etc.$$

y también usa

$$\int -y^{\alpha\ 2}dy\,l(1-y) = \frac{y^{\alpha}}{\alpha} + \frac{y^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)} + \frac{y^{\alpha+2}}{3(\alpha+2)}etc.$$

Euler utiliza *l* para indicar *ln* (logaritmo natural)

para calcular expresiones como

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}etc.$$

y define la constante γ (*Euler* utiliza la letra C y Mascheroni es el primero en usar γ en 1790) como el límite de

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-ln$$

también escribe igualdades como:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}=\frac{y+z}{1}+\frac{y^2+z^2}{4}+\frac{y^3+z^3}{9}+\frac{y^4+z4}{16}+etc.+lylz$$

En 1734 escribió el artículo *De progressionibus harminicis observationes* (Sobre progresiones aritméticas) trabaja con expresiones como

$$\frac{c}{a},\frac{c}{a+b},\frac{c}{a+2b},\frac{c}{a+3b},etc.$$

y realiza sumas de diversos logaritmos, por ejemplo:

$$l2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}etc$$

$$l3=1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{2}{12}etc$$

$$l4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{3}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{3}{12}etc$$

y otras más.

Además calcula el valor de γ con 6 decimales γ=0.577218.

En 1735 escribe uno de los artículos más celebrados, *De summis serierum reciprocarum* (Sobre las sumas de series de recíprocos) en el que establece las sumas:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}etc=\frac{p^2}{6}$$

(En este artículo *Euler* utiliza la letra **p** en lugar de **π**, que más tarde él sería el primero en utilizar)

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+etc=\frac{p^4}{90}$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}+etc=\frac{p^6}{945}$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}+etc=\frac{p^8}{9450}$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{6^{10}}+etc=\frac{p^{10}}{93555}$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\frac{1}{6^{12}}+etc=\frac{691p^{12}}{638512875}$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-etc=\frac{p^3}{32}$$

en la primera expresión aparece la serie que Jacob Bernoulli había fallado en encontrar. En este mismo artículo Euler presenta otras sumas más.

Además establece igualdades como:

$$1-\frac{s^2}{1.2.3}+\frac{s^4}{1.2.3.4.5}-\frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7}+etc=\left(1-\frac{s^2}{p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{4p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{9p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{14p^2}\right)etc.$$

y finalmente establece varias igualdades para p (es decir π):

$$p=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+etc\right)$$

$$p=2\left(\frac{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+etc}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+etc}\right)$$

$$p=4\left(\frac{1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+etc}{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+etc}\right)$$

y otras 4 sumas más.

En 1746 Euler escribió De seriebus divergentibus (Sobre series divergentes) en el cual clasifica las series divergentes en cuatro clases (él las llama especies) de acuerdo a su forma:

I) $1+1+1+1+1+1+etc.$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+etc.$$

II) $1-1+1-1+1-1+etc.$

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+etc.$$

III) $1+2+3+4+5+6+etc.$

$$1+2+4+8+16+32+etc.$$

IV) $1-2+3-4+5-6+etc.$

$$1-2+4-8+16-32+etc.$$

En este artículo Euler dice que las series convergentes están definidas, tienen términos que decrecen continuamente y se desvanecen. Pero sobre las series divergentes dice:

> *De summis huiusmodi serierum divergentium magnus est dissensus inter Mathematicos, dum alii negant, alii affirmont, eas in una summa comprehendi posse.*

que podemos interpretar como "La suma de una serie divergente crea disenso entre los matemáticos, mientras unos la niegan, otros la afirman que la posee (suma final – es inclusión nuestra) "

Es este el único trabajo en el que Euler discute la divergencia de series numéricas infinitas y por el cual Barbeau y Leah (1976) afirman que Euler mantenía la formalidad en el tratamiento de las series, sin embargo, una cita del mismo Euler permite ver que sus visión de demostración podía aceptar la verificación de casos específicos para determinar la veracidad de un caso general, como cita Lakatos (1978) y como podemos ver en la imagen siguiente

> Cum igitur veritas propoſitionis in his omnibus caſibus ſibi conſtet, dubium eſt nullum, quin ea in omnibus omnino ſolidis locum habeat, ſicque propoſitio ſufficienter videtur demonſtrata.

(Euler, 1758, p. 124)

es decir

> *...he de admitir que aún na he sido capaz de idear una prueba estricta del teorema... Sin embargo puesta que su verdad ha sido establecido en tantos casos, no puede haber duda de que vale para cualquier sólido. Así la praposición parece estar satisfactoriamente demostrodo... (Comentario acerca de la demostración de su famoso fórmula V- A+C=2)*
>
> (Lakatos, 1978, p. 23)

Esta forma de trabajar llegó a tener mucha influencia en su época no sólo por la capacidad matemática de Euler, sino porque algunos de los matemáticos contemporáneos más renombrados lo utilizan como punto de referencia, como dice la siguiente frase de Laplace:

> *Read Euler: he is our master in everything.*
>
> *(Leed o Euler: él es nuestro maestro en todo.)*
>
> *(The MocTutor History of Mothemotics Archive)*

Es este seguimiento a las palabras de Euler el que en parte provoca que todos se enfoquen en los resultados y no en el rigor de las demostraciones.

De esta manera durante este período se tiene una febril construcción de métodos para sumar series y para acelerar la convergencia de series.

Conclusiones

En esta breve discusión se pueden observar evidencias que muestran a un Euler hábil en el manejo algebraico de las series infinitas, pero cuya formalidad es muy cuestionada. Por otra parte la fama de Euler generó que el mundo científico de la época lo siguiera en su visión y su forma de trabajar, provocando un manejo poco formal generalizado.

El concepto de serie que parece tener Euler es el de una herramienta que puede utilizar para analizar curvas mecánicas y cuya aplicación es suficiente justificación de las manipulaciones que realiza, pese a no tener una teoría formal que respalde su trabajo. Así, para Euler, obtener un resultado congruente con sus suposiciones le hace innecesario considerar la validez matemática de los pasos y métodos que utiliza al trabajar con las series. Esta es una época caracterizada por el pragmatismo.

Referencias bibliográficas

Barbeau, E. y Leah, P. (1976). Euler's 1760 paper on divergent series. *Historia Mathematica 3*, 141-160.

Euler, L. (1738a). De progressionibus trasncendentibus, sev quarum termini generales algebraice dari nequeunt. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5,* pp. 36-57. (Versión digital obtenida de http://www.eulerarchive.com/ el 16 de junio de 2005)

Euler, L. (1738b). Methodus Generalis Sumandi Progressiones. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6,* pp. 68-97. (Versión digital obtenida de http://www.eulerarchive.com/ el 16 de junio de 2005)

Euler, L. (1744). Variae observationes circa series infinitas. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9*, pp. 160-188. (Versión digital obtenida de http://www.eulerarchive.com/ el 16 de junio de 2005)

Gardiner, A. (2002).*Understanding infinity: The mathematics of infinite processes* [Entendiendo el Infinito: Las matemáticas de los procesos infinitos]. New York: Dover Publications.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Editorial.

Rosas, A. (2007). Transposición Didáctica de las series numéricas infinitas. Una caracterización del Discurso Escolar actual en el nivel superior. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.

The MacTutor History of Mathematics Archive. (sin fecha). Obtenido el 26 de abril de 2006 de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/