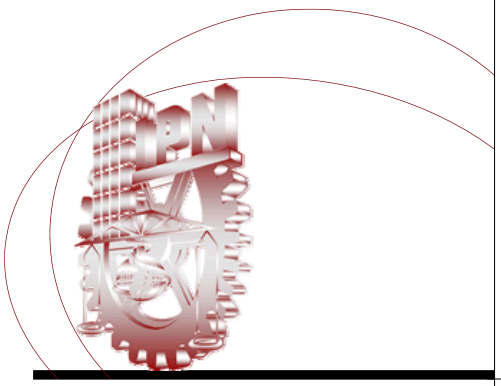


INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACION EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGIA AVANZADA

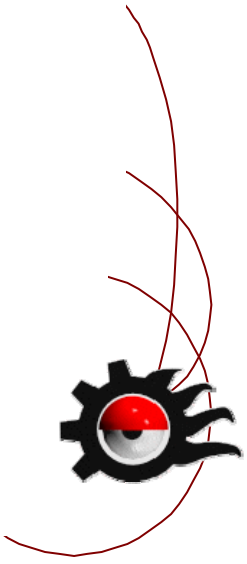
ESTUDIO EPISTEMOLÓGICO DEL TEOREMA DEL ISOMORFISMO DE GRUPOS

Tesis que para obtener el grado de
Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Arturo Mena Lorca

Directora de Tesis:
Dra. Asuman Oktaç
(Investigadora-Cinvestav)

México, D. F., febrero de 2011



SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 10:00 horas del día 23 del mes de noviembre de 2010 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Estudio epistemológico del teorema del isomorfismo de grupos"

Presentada por el(la) alumno(a):

Mena	Lorca	Arturo
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

A	0	6	0	5	3	8

aspirante al grado de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Asuman Oktaç

Dra. María Trigueros Gaisman

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Francisco Cordero Osorio

Dr. Apolo Castañeda Alonso

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

CICATA IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 23 del mes noviembre del año 2010, el (la) que suscribe Arturo Mena Lorca alumno (a) del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro A060538, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de la Dra. Asuman Oktaç y cede los derechos del trabajo intitulado "Estudio epistemológico del teorema del isomorfismo de grupos", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección arturo.mena@ucv.cl. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Arturo Mena Lorca

Proemio 1
El teorema y su *hábitat* 1
La componente histórica 3
Aspecto cognitivo y didáctico 4
La cuestión epistemológica 5
La Tesis 8
Conceptualización y lenguaje 9
La construcción de un esquema 11
Plan de la obra 12
Estructura del escrito 13
Las relaciones 14
Presentación 14
Relaciones y gráficos 15
Comentario acerca de las relaciones de equivalencia 21
Las relaciones de equivalencia 27
El teorema y su hábitat 30
Caso de otras categorías con estructura 41
Aproximación categórica 43
Antecedentes epistemológicos 47
Álgebra casuística y presimbólica 49
Álgebra simbólica y generalizante 53
La irrupción de los grupos 56
Subgrupos normales y cocientes 59
El algebra categórica 63
Las relaciones 65
Epistemologías genética e historia 65
La teoría APOE 76
Antecedentes 76
La teoría APOE 78
Ciclo de investigación 82
Otros aspectos de interés 85
Aspectos didáctico y cognitivo 88
La enseñanza en Chile 91
La enseñanza del algebra abstracta 99
APOE en teoría de grupos 104
Comentario 111
Enfoque alternativo 115
Teoremas de morfismos para conjuntos: aspecto matemático 116
Descomposición genética 121
Relaciones de equivalencia y particiones 125
Teorema de isomorfismos para conjuntos 134
Teorema de isomorfismos para grupos 140
Scholium 150
La práctica de las relaciones 151
Relaciones como práctica social 155
Epilogo 167
Un estudio epistemológico 167
Las varias facetas 168

Un enfoque distinto 169
Práctica de las relaciones de equivalencia 170
Referencias 173

Proemio

En el currículo universitario habitual de matemáticas hay materias que, según el parecer de alumnos, enseñantes e investigadores, presentan dificultades acusadas para el estudio. El caso del concepto de límite y variados aspectos del álgebra lineal son ejemplos que se dan con frecuencia.

Según examinaremos más adelante, hay evidencias que muestran que, por su parte, el estudio de las estructuras algebraicas representa un nivel de complejidad por encima de las restantes materias: la abstracción de los tópicos, la frecuencia mayor de las demostraciones, la propia dirección del estudio –que se propone desde un comienzo investigar propiedades comunes a objetos matemáticos variados– son argumentos que se podrían exhibir para explicar la cuestión.

Al interior del álgebra abstracta y por razones que detallaremos, los conceptos de subgrupo normal y grupo cociente representan, un obstáculo –sensu lato– de mayor relevancia. Por su parte, el concepto de isomorfismo resulta engañoso, por cuanto contigua a la cercanía de la noción ingenua de la idea de isomorfismo que se suele observar en los alumnos está el escaso buen éxito que se percibe en su desarrollo de casos específicos.

Nosotros nos proponemos estudiar el teorema del isomorfismo de grupos, que requiere de esas tres últimas nociones:

Sean G, G' *grupos,* $f : G \to G'$ *un (homo)morfismo de grupos de núcleo* $\mathcal{N}(f)$ *e imagen* $\mathrm{Im}(f)$, *entonces el grupo cociente* $G/\mathcal{N}(f)$ *es isomorfo a* $\mathrm{Im}(f)$:

$$G/\mathcal{N}(f) \simeq \mathrm{Im}(f)$$

Nuestro estudio propondrá una descomposición genética del teorema.

Ahora bien y según explicitaremos más adelante, el teorema tiene una versión análoga en ausencia de estructura algebraica alguna, y comenzaremos por descomponer el de grupos en dos fases sucesivas –i. e., sin y con estructura–, de modo de clarificar el análisis de los aspectos cognitivos implícitos y el estudio del propio teorema por parte de los alumnos.

Dadas estas y otras características de nuestro objeto de estudio, la exposición deberá con frecuencia mantener simultáneamente presentes los aspectos tanto cognitivos como propiamente matemáticos, lo cual, a su vez, demandará de la presencia de simbología y fraseología matemática en medio de las explicaciones de carácter cognitivo.

En este capítulo damos una visión panorámica de nuestro trabajo, agregamos algunos criterios que le han orientado y hacemos, además, algunas indicaciones de carácter general.

Por razones que se indicarán más adelante, salvo en las referencias históricas, usaremos la expresión *morfismo* en lugar de *homomorfismo*. Además y como este es el teorema central de nuestro estudio, si no hay peligro de confusión, nos referiremos a él simplemente como *el teorema,* y ocasionalmente, también con la abreviatura TIG.

Dado que este capítulo es puramente introductorio y descriptivo, relegamos la mayoría de las citas bibliográficas pertinentes a las secciones en los cuales tratamos cada tema.

El teorema y su *hábitat*

Al interior de la Teoría de Grupos, el teorema del isomorfismo es uno entre una decena de teoremas de morfismo que nos ayudan a conocer la estructura de los objetos matemáticos que llamamos grupos.

Los elementos matemáticos fundamentales para la construcción del teorema son, por supuesto, las nociones de grupo y de subgrupo normal, de grupo cociente, de

homomorfismo y de biyección.

Por otra parte, dado que un grupo cualquiera tiene un conjunto subyacente formado por sus elementos, se necesita también de alguna teoría de conjuntos.

En adición a lo anterior, para tratar el tema se requieren además conceptos de proposiciones, de implicación, de funciones proposicionales, de cuantificadores, de axiomas, de conjuntos y la noción genérica de satisfacer una propiedad.

Relevancia

EL TIG es, naturalmente, un resultado fundamental para la teoría de grupos, pues permite, entre otras cosas, identificar y construir grupos a través de particiones específicas de grupos dados.

Por lo demás, los grupos cocientes no solo son relevantes al interior de la propia teoría de grupos, sino también en otras teorías cuyos objetos matemáticos tienen grupos subyacentes, tales como anillos, espacios vectoriales, grupos topológicos, etc. Las construcciones habituales de los Números Reales y de los Números Complejos, e. g., se basan en esa noción.

A lo anterior es conveniente sumar cierta presencia de los grupos cocientes aun al exterior de la Matemática. Por ejemplo, los grupos cíclicos finitos tienen importancia en otras disciplinas y aun en la vida diaria –si bien no implicamos que su uso requiera de un conocimiento de su aspecto formal, teórico–.

Ahora bien, la noción más general de cociente como partición –sin estructura algebraica asociada– es ubicua en la Matemática. Los números racionales son un ejemplo familiar de conjunto así construido, y, mucho antes, la definición de Brahmagupta en 628 de números enteros –hecha en ausencia de una noción precisa de partición– responde también a ese concepto. Según veremos, esta noción más lata es también más cercana a la estructura del TIG que lo que podría parecer a una primera mirada.

Aun más, si volvemos nuevamente nuestra mirada al exterior de la matemática, encontraremos que la construcción y utilización de cocientes es una tarea que se hace diariamente, cualquiera sea la actividad que se realice.

Aspecto matemático

Desde una perspectiva puramente matemática, hay dos cuestiones centrales para el estudio del TIG, cuales son la estructura del grupo cociente $G/\mathcal{N}(f)$ y la definición de un homomorfismo que sale de $G/\mathcal{N}(f)$. Desde esas dos cuestiones capitales proponemos re-pensar el teorema, de manera de llevarlo a un ámbito más general.

El grupo cociente

En primer lugar, dado un grupo G de neutro e y un subgrupo normal N de G, hay que obtener un *grupo cociente* G/N, esto es, el grupo formado por la partición asociada a una relación de equivalencia determinada que el subgrupo N define en G.

Por razones que se traerán a colación durante el desarrollo de este trabajo, la operación del grupo G/N se obtiene tomando clases cualesquiera $\overline{a}, \overline{b} \in G$ y definiendo $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{ab}$.

Aceptada esa definición, los estudiantes de pregrado pueden recorrer sin dificultad ostensible –y aun con cierta rapidez– la demostración de que G/N es un grupo, pues, matemáticamente hablando, ella no requiere de mayor invención: omitiendo cuantificadores, se tiene

$\left(\overline{a}\,\overline{b}\right)\overline{c} = (\overline{ab})\overline{c} = \overline{(ab)c} = \overline{a(bc)} = \overline{a}\,\overline{bc} = \overline{a}\left(\overline{b}\,\overline{c}\right)$;

$\overline{a}\,\overline{e} = \overline{ae} = \overline{a}$; $\overline{a}\,\overline{a^{-1}} = \overline{aa^{-1}} = \overline{e}$

La definición del morfismo

En los diversos teoremas de morfismo para grupos (aparte de consideraciones ad hoc, según el teorema en cuestión), dado un morfismo de grupos f que sale de G, se debe definir un morfismo $\overline{f}$ que sale de un cociente G/N de G, lo que se hace mediante la fórmula $\overline{f}(\overline{a}) = f(a)$. Ahora bien, esta definición tiene dos características evidentes, y que

trataremos en detalle más adelante:

a. es una definición natural, en el sentido de que, fijado el propósito que genera el morfismo $\overline{f}$, aquella fórmula es la elección que uno debería hacer para conseguirlo;

b. desde una perspectiva puramente matemática, el aspecto algebraico de preservación de las operaciones, nuevamente no requiere de mayor invención:

si se trata de un grupo multiplicativo, se tiene, para $\overline{a}, \overline{b}$ cualesquier,

$\overline{f}\left(\overline{a}\,\overline{b}\right) = \overline{f}(\overline{ab}) = f(ab) = f(a)f(b) = \overline{f}(\overline{a})\overline{f}\left(\overline{b}\right)$.

Caso de otras estructuras

Ahora bien, es muy interesante considerar qué pasaría al respecto en el caso de otras teorías que tengan grupos subyacentes, esto es, cuyos objetos matemáticos se construyan a partir de grupos: anillos, dominios de ideales principales, cuerpos, espacios vectoriales, grupos topológicos, etc. Uno puede anticipar lo que ocurre: para esos casos, habrá teoremas análogos, parte de cuya demostración estará ya hecha.

Para el caso de anillos, por ejemplo, habría que escribir los argumentos de arriba en forma aditiva, y luego, para su estructura multiplicativa, esas mismas cadenas formales (cuando válidas), sin modificación alguna, constituirían la demostración que allí se requiere.

Todo esto parece muy natural y lo es –al menos desde un punto de vista matemático–.

Disponibilidad del concepto

Tratándose de un tema de álgebra abstracta, de acuerdo a estudios previos –particularmente, de carácter cognitivo– cabe esperar que el aprendizaje del TIG presente dificultades. De hecho, cualquier profesor del área puede confirmar que trabajar con cocientes es uno de los aspectos menos logrados por los estudiantes.

Si se examina nuevamente los cálculos de arriba, se puede observar otro aspecto confirmable tanto por los académicos que imparten estas materias como por los estudiantes cuyos currículos las contemplan: construir lo que el marco teórico que hemos elegido denomina *concepciones procesos* de los desarrollos arriba señalados no ofrece mayor dificultad, y el escollo principal, tanto desde una perspectiva puramente matemática como desde un punto de vista cognitivo, radica, en realidad, (y naturalmente, diríamos) en la comprensión de lo que es el objeto matemático cociente y de lo que comporta trabajar con él.

La relevancia de lo anterior radica en que la cuestión central al respecto es, precisamente, lograr una construcción apropiada del objeto matemático *cociente*, de manera que él esté disponible para su uso en las ocasiones en que se lo requerirá para los distintos propósitos que justifican su inclusión en el currículo. Hay constancia, sin embargo y como decíamos, desde varias fuentes, de que no podemos contar con ese recurso.

Es necesario, por tanto, generar alguna propuesta al respecto.

La componente histórica

Parte de lo que hemos llamado, en el texto, el *hábitat* del TIG es, naturalmente, su historia y la de los conceptos y resultados que le acompañan y/o le sitúan. Hemos separado en este escrito, sin embargo, esta componente, dada su relevancia para nuestro estudio.

La dificultad epistemológica

En relación con las dificultades que los estudiantes experimentan para aprehender los conceptos que aquí nos interesan, las que la propia comunidad matemática encontró para desarrollar y aun para aceptar esa conceptuación es bastante elocuente.

Por de pronto, el propio concepto de grupo, que estuvo ante los ojos de los antiguos griegos, fue elucidado tardíamente, según veremos más adelante (Cf. 4.1.3).

Ahora bien, los escollos que tuvo que superar el trabajo de Evaristo Galois en el siglo XIX, que dio un vuelco a la teoría de ecuaciones algebraicas (Cf. Galois, 1832) al introducir subgrupos normales y grupos cocientes, sugiere la dificultad que entraña

adentrarse en el asunto. Sus memorias no pudieron abrirse paso para ser publicadas por la Academia de Ciencias francesa, a pesar de que no se las juzgó desprovistas de interés, y hubo que esperar 30 años tras la muerte de su creador para que fueran publicadas y explicadas de manera detallada por Camille Jordan. Aun esa explicación no pudo ser entendida por los grandes matemáticos Félix Klein y Sophus Lie reunidos; Klein confiesa de esa versión expandida de Jordan: *nos parecía un libro con siete sellos*, (Cf. van der Waerden, 1985, p. 118). Que lo hayan conseguido brillantemente representó un gran paso para la Matemática: la unificación que hizo Klein de la Geometría –separada en dos partes disjuntas por siglos– y los grupos y álgebras que fundó Lie, todavía hoy son objeto de investigaciones y de congresos ad hoc. Cf. también Hawkins, 1984)–.

La dificultad 'didáctica'

Como es natural, una vez que la comunidad matemática hubo desarrollado la teoría de grupos con mayor claridad, los caminos se volvieron más claros –esto es, para los entendidos–. Por ejemplo, el llamado teorema de Cayley de que el orden de un subgrupo divide al orden del grupo ambiente, trabajosamente obtenido en la obra de Jordan, hoy se puede obtener en un par de líneas. (Basta observar que las clases de equivalencia en el grupo definidas por el subgrupo tienen todas igual número cardinal).

Lo anterior muestra, a su vez, la dificultad 'didáctica' que encontramos en el aprendizaje de la teoría de grupos y, en particular, del teorema: la enseñanza habitual, fácilmente pesquisable en los textos que se utilizan para el efecto, sigue un esquema lógico bien definido, delineado ya a comienzos del siglo XX; se trata de un diseño bien articulado y aun elegante, provisto de caminos, matemáticamente hablando, expeditos, pero los objetos con los que se trabaja se han alejado bastante de los motivos que los originaron y (con ello, en parte) de la percepción inicial de quienes los estudian.

Aspectos cognitivo y didáctico

La falta de comprensión

Las anteriores se cuentan siempre entre las razones por las cuales alumnos que han aprobado una asignatura de estructuras algebraicas manifiesten espontáneamente que trabajar con grupos cocientes y teoremas de morfismos fue la parte más difícil de la asignatura, que la práctica confirme que no saben trabajar con ellos y que, encuestados acerca del TIG, suelan no poder reproducir sino aspectos disconexos de él. Nuevamente, los profesores que imparten esta materia uniformemente suscriben ese estado de cosas.

Ahora bien, los estudios realizados por algunos investigadores den el tema –y, en particular, por quienes se reúnen en el grupo *RUMEC* (Research in Undergraduate Mathematics Education Community, fundado por Ed Dubinsky), de interés para nuestro trabajo– acerca de la teoría de grupos, incluyendo subgrupos normales y grupos cocientes, han mostrado con claridad las dificultades que se enfrentan, a las cuales pasaremos revista más adelante.

En nuestra experiencia, respecto del TIG, posiblemente la mayor de esas dificultades consiste en la definición de una función desde un grupo cociente, que comentábamos; de hecho, es esta la cuestión fundamental del teorema y los otros aspectos son, por comparación, más sencillos. Como es fácil adivinar por lo que veníamos diciendo, un alumno que no tiene conciencia de la necesidad de la buena definición de la función definida desde el cociente saltará sin más a probar que 'ella' es un morfismo, sin reparar en que esos cálculos, sin una buena definición, están desprovistos de sentido (y, eventualmente, sin entender por qué y/o para qué hace esos cálculos).

En cualquier caso, la propuesta específica de RUMEC sobre el asunto se hace sobre la manera en que habitualmente los textos de matemáticas lo tratan; debido a ello, encuentra las dificultades habituales para encapsular el *objeto cociente* desde *acciones* sobre coclases,

cosa que, tal como ese equipo reporta, no siempre se consigue.

El marco teórico

Lo anterior no obstante, nos parece que los resultados más precisos acerca de la enseñanza del álgebra abstracta en general y de la teoría de grupos en particular son, precisamente, los obtenidos por RUMEC.

El marco teórico que hemos elegido es, precisamente, la Teoría APOE (acciones, procesos, objetos, esquemas), desarrollada por Ed Dubinsky y el grupo RUMEC, y que ha propuesto, para ciertos conceptos de la teoría de grupos, *descomposiciones genéticas* explícitas y otros análisis –que abordan el tema en su aspecto cognitivo– y también estrategias de enseñanza para su aprendizaje. La manera en que reúne los aspectos cognitivos y las propuestas educacionales es, a nuestro parecer, una de las virtudes de la forma de trabajar de RUMEC.

Sin embargo y según se explicita a continuación, nos apartaremos en alguna medida importante del tratamiento habitual de la literatura (la de RUMEC incluida) sobre la materia.

La cuestión epistemológica

Epistemología, cognición y didáctica

Noción de epistemología

El término *Epistemología* se compone de las raíces *episteme*, ciencia, y *logos*, discurso o estudio de.

En cuanto disciplina, fue parte de la Filosofía de las Ciencias, en cuanto estudio crítico de los principios, hipótesis y resultados de las ciencias, para determinar su origen lógico, su valor y su objetividad.

Posteriormente, su dominio se extendió a disciplinas tales como historia de la ciencia o las ciencias cognitivas.

Epistemología e historia

En términos epistemológicos, la sola relación de los hechos –supuesto que ello se puede hacer– no es suficiente, sobre todo si ese relato procura únicamente mostrar el progreso de la ciencia, pues la evolución histórica de esta a menudo sigue un camino accidentado y sinuoso.

En Matemáticas, en particular, es notoria la construcción de lenguaje ad hoc, intextricablemente unida a ese desarrollo, sin la claridad del cual los intentos primeros de los matemáticos sobre un determinado asunto carecen de la claridad necesaria.

La Epistemología histórica, que se ocupa de la ciencia tal cual funciona, busca coherencia interna a través de los diferentes problemas y conceptos que le dan sentido, de manera que involucra necesariamente un cuestionamiento epistemológico.

El historiador de las ciencias debe tomar las ideas como hechos. El epistemólogo debe tomar los hechos como ideas, insertándolas en un sistema de pensamiento; un hecho mal interpretado por una época sigue siendo un hecho para el historiador; el epistemólogo puede ver en él un obstáculo, o un *contrapensamiento*. (Cf. Bachelard,1938 pp. 17-18).

Epsitemología genética

En el aspecto cognitivo, Piaget agrega la *Epistemología genética,* que consiste en estudiar los conocimientos en función de su construcción real o psicológica, y a considerar todo conocimiento como relativo a un cierto nivel del mecanismo de reconstrucción; ella procura saber la génesis del saber, apoyándose sobre una observación empírica de los niños. (Cf. Beth, Mays & Piaget 1957, p. 19)

La naturaleza de los conceptos

Necesidad de la epistemología

Según explicitaremos más adelante, Dubinsky subscribe que hay una relación cercana entre la naturaleza de los conceptos matemáticos y su desarrollo en la mente de un

individuo. De allí que la teoría APOE se preocupe de encontrar explicaciones de carácter epistemológico y psicológico; en particular, como señala Trigueros (2005), de comenzar desde la reflexión (matemática) acerca de los conceptos, incluso, desde su definición matemática.

Por su parte, Jean Luc Dorier afirma que el análisis didáctico debe tomar muy en cuenta la evolución y constitución histórica del saber matemático en la esfera sabia y sus relaciones con la constitución del texto del saber enseñado; en ese contexto, la epistemología es un término mediador, que conecta el trabajo histórico y el trabajo didáctico (Dorier 2000, pp. 9-10). Enfatiza Dorier: *Todo análisis didáctico debe englobar un aspecto de naturaleza epistemológica.* Ibíd., p 17).

Nuestra perspectica

Compartimos decididamente la visión descrita. En particular, cuando tratemos los aspectos históricos, no nos limitaremos a una cronografía de hechos, sino que agregaremos consideraciones de carácter epistemológico.

En cualquier caso, tenemos, además, la convicción de la conveniencia superlativa de hurgar seriamente en la naturaleza teórica de los objetos matemáticos bajoestudio. Al respecto, la propia teoría APOE se ocupa de iniciar una descomposición genética determinada desde la experiencia de sus proponentes, experiencia que se nutre necesariamente (al menos en parte) de su conocimiento de la disciplina matemática.

(Además, en otro trabajo nos hemos ocupado, por ejemplo, de cómo es que una aproximación de carácter psicológico puede tener la virtud de reflejar, en su propio enfoque, la naturaleza de los objetos matemáticos. Mena, 2007).

La necesidad de las evidencias

De todas maneras, si la atención se restringiere a esa experiencia de la disciplina, tal procedimiento sería, desde un punto de vista cognitivo, necesariamente peligroso, cuestión esta acerca de la cual hay amplia y maciza evidencia histórica –como por ejemplo, la del fracaso global de las estrategias escolares en Matemáticas diseñadas en la década de 1960–.

Esta es una de las cuestiones centrales que la Didáctica de la Matemática o Matemática Educativa ha venido proponiendo a la comunidad internacional desde hace décadas.

Según veremos, el enfoque de RUMEC, mediante su ciclo ACE, impide que la atención, en los diseños instruccionales, se enfoque solamente en los aspectos matemáticos.

(En cualquier caso, nuestra aproximación al tema –basada justamente en la reflexión que hacemos acerca de la naturaleza matemática de nuestro objeto– se separa un tanto de la perspectiva adoptada por RUMEC).

Nuestro enfoque

Así, hemos optado por adentrarnos seriamente en la naturaleza matemática del teorema del isomorfismo para grupos, junto con ocuparnos de hacer una revisión crítica de las evidencias respecto de los aprendizajes propuestas por los investigadores –muy en especial, los del grupo RUMEC– y agregar las que hemos podido reunir por nuestra parte, de manera de no cometer tal grueso error de carácter epistemológico.

La corrección de los argumentos

De todas maneras, es de nuestro mayor interés el que, más allá de la sola corrección de los argumentos matemáticos que debemos proporcionar, la perspectiva teórica matemática que utilicemos sea suficientemente amplia y comprensiva.

Ello se debe, por una parte, a que pensamos que la aproximación que empleamos para nuestro estudio específico puede prolongarse al caso de la teoría que le sigue en la enseñanza del álgebra abstracta, asunto este que nos parece conveniente y aun necesario –pero no el único–.

La evolucion del álgebra

Nos importa que los conceptos matemáticos que tratamos estén presentados de manera

sensible a los desarrollos ulteriores en la teoría matemática *per se*. Los motivos de esta preocupación quedarán claros cuando analicemos, en particular, la evolución de los textos de álgebra abstracta y la de los programas de esa materia en nuestro país, Chile.

Por la razón anterior, la perspectiva teórica matemática que tomamos tiene como referencia de fondo la Teoría de categorías. De allí que nuestro tratamiento incluya –no en el estudio cognitivo, sino en las consideraciones matemáticas– enunciados que no siempre se contemplan en los tratados elementales. La razón de esto último es que es en ese ámbito donde se encuentran las miradas más precisas y comprensivas, y en las cuales nuestro tema adquiere su auténtica relevancia.

Objetos y propiedades

Como ilustración de esto último, consideremos los subgrupos normales y los grupos cocientes. La enseñanza elemental (que es lo que nos ocupa directamente aquí) enfatiza, por una parte, la propiedad de que un subgrupo N sea normal en su grupo ambiente G, y, por otra, la construcción del cociente G/N. Una mayor reflexión de carácter algebraico debería llevar a que se requiere de los subgrupos normales precisamente para que los cocientes sobre ellos sean, a su vez, grupos; sin embargo, los textos no suelen señalarlo. Ahora bien (y según se explicitará en su momento), desde un punto de vista puramente algebraico, más que la construcción del cociente, lo que importa es la proyección canónica π_N que a cada elemento a de G le asocia su clase $\overline{a}$ en G/N, y, mejor aún, la propiedad universal obtenida a través de π_N de *factorizar* aplicaciones determinadas al interior de la categoría: el cociente se construye justamente para garantir que se cuenta con esa propiedad universal, y cualquiera otra construcción que la garantice puede reemplazarle. De esta manera, la construcción que se hace tiene sólo el carácter de demostración de existencia y es, aparte de ello, enteramente dispensable.

El caso de los números

La perspectiva descrita es la que corresponde a la Matemática contemporánea y tiene análogos más familiares: cuando se construyen laboriosamente los números reales a partir de los racionales (y éstos desde los enteros, etc.), pongamos por caso, se termina contando con objetos muy complicados, sin embargo, cuando se trabaja con ellos, solo se requiere echar mano a las propiedades que se satisfacen –y no a la construcción que se realizó–. La realidad de esta situación se vuelve notoria si se considera que *la* construcción de los números complejos a partir de los naturales (los *métodos genéticos,* diría Hilbert) es, en realidad, una entre una decena de caminos posibles.

Necesidad de propuestas apropiadas

De todas maneras, nuestra preocupación podría tildarse de exagerado purismo; en cualquier caso, es bien claro que ella no debe estar explícitamente presente en nuestro estudio cognitivo, sino que debe ser utilizada solo para situarlo correctamente.

Sin embargo, tenemos dos motivos poderosos adicionales para esa preocupación.

El ámbito específico

Por una parte, es la perspectiva que le subyace la que nos ha permitido diseñar nuestra aproximación al teorema del isomorfismo y una decena de otros con él relacionados y, a la vez, su inmediato traslado a otras teorías (es decir, a otras categorías, con y/o sin estructura).

El ámbito amplio

La otra consideración excede con mucho al tema de este estudio, pero la resumimos aquí a rasgos grandes y bastos. En el Congreso Internacional de Matemáticos de 1904, la comunidad reclamó que los temas que se enseñaba en Matemáticas en los diversos niveles estaban peligrosamente desconectados de los avances de la Matemática (Cf. Fehr, Camp & Kellog, 1971); sin embargo, hubo que esperar hasta 1958 para que comenzara, recién, un movimiento asertivo en esa dirección, y que abarcó la década siguiente.

La larga lista de calamidades que esto conllevó (y que incluye el fracaso escolar de la *Matemática Moderna*) debería alertarnos acerca de la consabida situación de que los textos sigan reiterando matemática en un estilo, una forma y un contenido ya excesivamente añejos.

La insistencia exagerada en Geometría Analítica plana y en el aspecto algebraico de la Trigonometría (por sobre los problemas geométricos que la motivan) son ejemplos notables de ese fenómeno, en los diversos niveles de enseñanza que tratan esos temas; otro es el de que en las escuelas y liceos de Chile –y en varios otros, según nuestra observación– el álgebra que se estudia suele no ir más allá que la que conocían los árabes del siglo X, en una notación del siglo XVII –y no hace caso alguno, todavía, al reclamo de los matemáticos en 1904–).

De tal manera, parece un sano principio cuidar de que las materias bajo estudio didáctico –*sensu lato*– y las propuestas de enseñanza correspondientes se ubiquen al interior de un proyecto más amplio, que las sitúe en un contexto matemáticamente correcto y contemporáneo, desde el cual se pueda apreciar su relevancia actual.

Una visión comprensiva

Universal y... universal

Ya hemos mencionado que haremos una referencia explícita a la *Teoría de Categorías,* tanto para situar el teorema en el ámbito de una variada gama de teorías, como para –en particular– hacer explícito lo que se refiere a los elementos universales.

Por otra parte, haremos también algún recurso al *Álgebra Universal* (Cf., por ejemplo, Burris & Sankappavanar, 1981), que nos ofrece una perspectiva útil para mirar la estructura reticular de las sub-estructuras de una estructura dada –si bien no necesitaremos hacer alusión explícita alguna a aquella–.

Relaciones

Nos es necesario, comenzar por la *Teoría de Relaciones*, lo que requiere de explicación.

En efecto. nuestro enfoque repara en que el teorema del isomorfismo para grupos es, en realidad, una consecuencia de uno de conjuntos.

Ahora bien y como se sabe, dado un universo *U*, hay un morfismo entre el álgebra de funciones proposicionales definidas en *U* y el álgebra de subconjuntos de *U*, que se construye vía el axioma de especificación. Nos interesará también su extensión a funciones proposicionales en dos letras, esto es, a las relaciones (binarias).

A partir de ello, uno puede persistir en convertir, con los debidos resguardos, afirmaciones acerca de subconjuntos o subestructuras en aserciones correspondientes sobre proposiciones –e inversamente, por supuesto–. Es precisamente esa forma de pensar la que nos ha provisto del enfoque que proponemos para nuestro teorema.

Más aún y según veremos de manera explícita, nuestro propio teorema del isomorfismo, en su versión más general, es también la explicación de ciertos fenómenos que ocurren en ese tránsito desde las relaciones a los conjuntos que ellas determinan.

Más determinante que lo anterior es la presencia de las *relaciones de equivalencia*.

Ellas nos permiten dar una expresión más precisa a los cocientes en teoría de grupos y, por tanto, al teorema del isomorfismo para grupos: como veremos, ellas forman parte del enunciado del teorema. Nos facultan, además, para expresar de manera más acabada el conjunto de teoremas de isomorfismos del cual ese forma parte.

Lo más relevante, sin embargo, es que ellas forman parte de la descomposición genética que proponemos.

La tesis

Una aproximación alternativa

Tal como anunciamos antes, proponemos una aproximación diferente a la enseñanza del teorema del isomorfismo, que no se reporta en la literatura existente.

Esta aproximación reconoce y aprovecha que el estudiante tiene ya una noción de cociente (en cuanto partición, sin estructura) en su haber cognitivo, y le da una formalización apropiada, para luego añadir los elementos de estructura algebraica que se requieren.

Ventaja cognitiva

De esa manera, se evita uno de los mayores inconvenientes del enfoque que habitualmente se encuentra, cual es que estudiantes que laboriosamente y sin mayor asidero conceptual realizan *acciones* sobre coclases, deban de inmediato trabajar con ellas como *objetos* (con la dificultad señalada con anterioridad), particularmente, para definir una función desde ese objeto cociente.

La propuesta presenta, entonces, una tangible ventaja cognitiva.

De todas maneras, el anterior no es el único obstáculo que se debe enfrentar, pues debe tenerse además concepciones apropiadas de subgrupo normal y de otros objetos matemáticos concurrentes en el teorema.

Ventaja matemática

Por otra parte, esta perspectiva tiene sólidas raíces en el ámbito puramente matemático.

Como decíamos, el teorema del isomorfismo de grupos y una docena de otros resultados anexos (teoremas, corolarios) que se pueden enunciar y que llamamos en forma genérica *teoremas de morfismo* de grupos, tienen correlatos inmediatos en otras teorías, para cuyas demostraciones, según señalábamos, se cuenta ya con un camino recorrido y la parte restante no requiere de invención.

Ello sugiere, además, que estos teoremas son, por así decirlo, *categóricos*. En efecto, hemos podido demostrar, con una sola excepción (un caso irremediable), que esa docena de resultados se pueden obtener en la categoría de conjuntos, es decir, olvidándose, si se quiere, de la estructura (de grupo, de anillo, de módulo, etc.).

Aislar, por tanto, el aspecto conjuntístico (y, con ello, la buena definición del morfismo en cuestión) parece una medida apropiada.

Descomposición genética

Todo lo anterior nos lleva a proponer una *descomposición genética* del teorema del isomorfismo de grupos, que pasa por la separación del teorema en dos etapas: una que se refiere a su aspecto conjuntístico y otra que se ocupa del aspecto de teoría de grupos propiamente tal.

De acuerdo a la manera habitual de trabajar en APOE, el trabajo se funda, en primer lugar, en el conocimiento que hemos podido adquirir y construir acerca del tema en cuestión, así como en nuestra experiencia impartiendo asignaturas que lo incluyen, tanto de preparación de profesores como de licenciados y magísteres en Matemáticas. Esa reflexión se continuó por la vía de preguntas específicas a otros docentes de ese tipo de asignaturas, y de examen de situaciones propuestas y de entrevistas grabadas en video tanto a alumnos que cursaban alguna de aquellas asignaturas o que ya la habían aprobado, como a docentes universitarios de áreas diversas que estudiaron esta materia en su oportunidad.

La aproximación elegida corresponde, entonces, a la estructura matemática del teorema, pero, además, se apoya en evidencias de instrucción habida en clases y en entrevistas realizadas a estudiantes y académicos.

Conceptuación y Lenguaje

Hay dos tipos de lenguaje que cuidar en nuestro trabajo. Uno es el propiamente matemático; el otro se refiere al marco teórico de análisis. Ambos tipos serán debida y progresivamente introducidos durante el escrito. Ello no obstante, es oportuno y conveniente despejar ahora algunas cuestiones con las cuales nos enfrentaremos de manera inevitable y a la vez permanente. A ello se dedica esta sección.

Declaramos en forma previa que, justamente, la separación que venimos efectuando (y

que tendremos que continuar haciendo) entre los aspectos cognitivos y los puramente matemáticos tiene cierto riesgo, y podría dejar la impresión de que pensamos que ellos se pueden separar en las *construcciones mentales* que el estudiante debe hacer, lo cual sería ilusorio: cada vez, es el *esquema* cognitivo de un objeto matemático lo que se procura construir.

El lenguaje matemático

Conforme a los usos de la teoría matemática general que sustenta nuestro estudio, y también en razón de la coherencia general de los teoremas que nos interesan en este, debemos hacer algunas precisiones lingüísticas.

Morfismos

En primer término (y según se explicitará en su momento), salvo en las secciones de carácter histórico (Capítulo 4, y secciones 6.6.1 y 6.6.2), en lugar de la palabra *homomorfismo* utilizaremos el término *morfismo*. Ello tiene la ventaja de situar el concepto en una perspectiva categórica, que incluye a las funciones habituales como un caso particular, lo que a su vez nos permite poner de relieve que el teorema que nos ocupa y la cohorte que lo acampaña son, *mutatis mutandis*, *'los mismos'* en las distintas teorías, tengan ellas o no estructura. (De todas maneras, utilizaremos el término *función* cuando queramos dejar en claro que no hay estructura que preservar).

Así también, hablaremos de *fuente* (en lugar de conjunto de partida) y blanco (en lugar de conjunto de llegada) de un morfismo (por ejemplo, de una aplicación). Esto tiene la ventaja adicional de obviar la ambigüedad que se encuentra en los textos respecto de los términos *dominio* y *codominio*: cuando se habla de una función desde un conjunto A hacia un conjunto B, se llama *dominio* de la función a veces a A y otras veces a un subconjunto de A, y algo enteramente análogo ocurre con el término *codominio*.

El axioma de especificación

El axioma de especificación permite construir conjuntos (subconjuntos de uno dado) a partir de funciones proposicionales en una o más letras.

Ahora bien, para el estudio matemático, es conveniente mantener con claridad la diferencia entre los objetos lógicos y los conjuntísticos: difícilmente alguien identifica, por ejemplo, una ecuación con su solución. Nuestro estudio, en particular, se apoya en buena medida en un teorema que manifiesta de manera precisa un correlato entre las relaciones de equivalencia y ciertas colecciones de subconjuntos del conjunto sobre el cual aquellas están definidas.

Tendremos, por tanto, cuidado de mantener esta distinción, necesaria en términos matemáticos, pero que, desafortunadamente, no siempre se hace: los textos suelen decir que una relación es un subconjunto de un producto cartesiano, en lugar de una función proposicional en dos letras, lo cual nos parece inapropiado en términos cognitivos: cuando se piensa en la relación de *ser hermano de,* un ejemplo habitual, es muy improbable que alguien trate siquiera de imaginar el conjunto de pares humanos que ella define.

Peor aun, los estudiantes a menudo deben sufrir cierta desorientadora incoherencia que les obstaculiza el aprendizaje en esta materia, pues se les trata de enseñar, *a la vez*, que una función es una *ley*, que una relación es un subconjunto del producto cartesiano y que una función es un caso especial de relación –todo lo cual es ostensiblemente contrario a la claridad y precisión que cabría esperar en cualquier ámbito de la Matemática–.

Homónimos

Debido a la teoría cognitiva en que este trabajo se sustenta, en nuestra presentación, las palabras *acción, proceso, objeto* y *esquema* tienen un significado preciso, distinto del habitual. Además, por motivos puramente matemáticos, los términos *relación* y *equivalencia* adquieren también aquí acepciones precisas (dos, para la palabra *equivalencia*), diferentes de su uso común. (El término *objeto* posee también un significado

matemático preciso).

En su versión corriente, estos términos son bastante frecuentes en el habla y, en verdad, es inevitable que nuestro escrito las utilice tanto en sus acepciones latas como en las estrictas, pues no hay palabras que les sean realmente equivalentes (!).

Creemos, sin embargo, que, en general, el contexto determinará con claridad cuál es el significado que corresponde en un determinado momento. En cualquier caso, cuando estimemos que haya peligro de confusión, usaremos itálicas para distinguir una acepción de otra.

Trivialidades

Desde un punto de vista matemático, hay ciertas nociones que ofrecen, en principio, mayor –o menor– dificultad que otras. Así, por ejemplo, se acostumbra a llamar *trivial* a una demostración o a un argumento que no requieren de mayor invención matemática. Sin embargo, esa noción es engañosa: una demostración puede ser *trivial* porque se ha desarrollado la teoría lo suficiente como para que aquella se realice en un par de pasos, apoyados en un cúmulo de proposiciones previas, las cuales, en relación con esa demostración, sirven como lemas ya demostrados.

Naturalmente, desde una perspectiva cognitiva, la cuestión adquiere mayor complejidad: hay multitud de motivos y/o razones por los cuales lo que puede ser más o menos obvio para una persona no lo sea en absoluto para otra (la consideración anterior incluida). De allí que, en nuestro escrito, en particular, no podamos utilizar las expresiones *sencillo, fácil, complejo*, etc., sin un cuidado manifiesto.

Por lo anterior, cuando usemos esas palabras, lo haremos en relación con nuestra observación como profesores de aula en álgebra abstracta: diremos que algo es *simple*, por ejemplo, si, en nuestra experiencia como docentes, hemos podido percibir que el estudiante trabaja sin encontrar obstáculos que impidan el desarrollo de su trabajo, o que no necesita pedir ayuda para proseguir. Por supuesto, podría ser que los estudiantes hicieran algunos cálculos cuyo sentido o profundidad desconocieran; en tal caso, pondremos cuidado en explicitar que esos cálculos son simples, sin implicar que la situación lo sea para ellos.

Lo que corresponde, en realidad, es explicitar las concepciones –acciones, proceso, objetos, esquemas– que los estudiantes poseen al respecto; aquí nos referimos solo a una expresión descriptiva que usaremos con moderación.

En cualquier caso, *trivial* significará que, habiendo desarrollado la matemática correspondiente, el resultado no requiere de mayor invención. (El teorema de Cayley es trivial; los teoremas de Sylow no lo son).

Formalidad e ingenuidad

En nuestro estudio, en adición a los conceptos matemáticos propiamente tales, que son objetos al interior de teorías abstractas, concurren nociones informales relacionadas con ellos.

Ello se debe a que nociones primarias, anteriores a aquellas que la matemática define –eventualmente recogiendo justamente esas nociones primitivas en su forma abstracta– sirven a su vez como ilustración de aquellos concpetos matemáticos. Estimamos que tales nociones son muy importantes para la *coherencia* de los *esquemas* cuya construcción mental es nuestro objetivo.

Para distinguir unas de otras, nos referiremos a unas como *formales* y a las restantes como *ingenuas*.

La construcción de un esquema

Tal como se explicitará más adelante, la construcción de un *esquema* conceptual de un objeto matemático es un proceso complejo, y es posible que experimente dificultades o, incluso, que, propiamente, no se logre.

Aspecto matemático

Para la construcción de un esquema se requiere, naturalmente, de ciertos conceptos matemáticos relacionados con él.

Cualquiera construcción del esquema de subgrupo normal, pongamos por caso, requiere inevitablemente de los conceptos de grupo y de subgrupo, que son nociones en las cuales se basa.

Aspecto cognitivo

Desde un punto de vista cognitivo, sin embargo, y de acuerdo a nuestro marco teórico, los solos requisitos matemáticos no son suficientes para comprender ni para favorecer esa construcción.

La construcción de un esquema utiliza acciones, procesos y otros objetos, encapsulación, coordinación, tematización, etc. –todos términos que serán debidamente explicitados cuando corresponda–, terminología que revela una conceptuación rigurosa y que precisa de qué manera esos requisitos matemáticos deben estar presentes en la construcción de un esquema determinado.

La coherencia

Ahora bien, esa construcción no se apoya solo en los objetos matemáticos. Por ejemplo, poder utilizar el esquema de un determinado objeto matemático para trabajar en una situación concreta –de otra disciplina, e. g.– es a la vez parte de la *coherencia* del esquema –justamente, la posibilidad de poder determinar cuándo ese objeto viene al caso para su utilización eventual– y una oportunidad para enriquecerlo.

Postulamos, además, que, en muchos casos, la construcción de un esquema puede apoyarse fuertemente en ese uso en situaciones concretas.

Respecto de nuestro tema, en particular, ocurre que la noción general que la Matemática recoge bajo el concepto de *relación de equivalencia*, es utilizado abundantemente, en una forma no explícita y eventualmente falta de consciencia, en la vida diaria, en otras disciplinas, en la cultura en general –y creemos que el asunto se puede llevar aun más lejos–.

Por estas razones, además de las ilustraciones matemáticas que daremos cuando veamos relaciones de equivalencia, agregaremos otras, al final del escrito, de manera de reunir una profusión de ejemplos que, en su conjunto, manifiesten la naturalidad con que se usan las relaciones de equivalencia y las particiones (dentro y) fuera de la Matemática, y lo conveniente que es aprovechar esa circunstancia para construir los esquemas correspondientes, necesarios, a su vez, en nuestra aproximación al teorema del isomorfismo.

(En su momento, indicaremos cuáles son los resultados de esa teoría que resultan substantivos para la propuesta, de qué tipo de precisión conceptual requerimos y cuáles conceptos han sido incluidos solo como recursos lingüísticos).

Plan de la obra

De acuerdo a las circunstancias señaladas, nuestro estudio debe desarrollarse tanto en el ámbito cognitivo (especialmente, capítulos 5, 6 y 8) como en el matemático (en particular, los capítulos 2, 3 y 7); a ellos agregamos el histórico-epistemológico (Capítulo 4), necesario para situar nuestro estudio, en más de una perspectiva, y el de algunas nociones comunes y que explicitan ciertas raíces de nuestro tema (Capítulo 9), las cuales, a pesar de su relevancia manifiesta para la comprensión del asunto, escasamente se las trae a colación.

El Capítulo 2 está destinado a las relaciones binarias y, en particular, a las relaciones de equivalencia y a las particiones que ellas definen. Advertimos, por una parte, que la presentación que allí hacemos esquiva cierta ambigüedad frecuente en los tratamientos habituales de esta materia, y, por otra, que el "teorema RE/P" que allí se encuentra es fundamental para nuestro estudio.

En el tercer capítulo nos ocupamos de la parte de la teoría de grupos que se requiere para demostrar el teorema del isomorfismo para grupos y de aquella otra más general que nos provee de una perspectiva adecuada para situarlo.

El Capítulo 4 contiene un análisis de carácter histórico-epistemológico, necesario para situar nuestro tema al interior de los estudios del álgebra abstracta, en su génesis y su evolución.

El quinto capítulo da una descripción del marco teórico, la teoría cognitiva APOE, que nos permite analizar las construcciones mentales que los estudiantes pueden hacer para aprehender los objetos matemáticos (y en la cual los conceptos de facilidad o dificultad pueden abordarse desde una óptica más precisa e iluminadora).

El Capítulo 6 trata de aspectos didácticos y cognitivos: qué se conoce acerca de la enseñanza de nuestro teorema y de objetos matemáticos relacionados con él.

El capítulo siguiente explicita nuestra aproximación al teorema de isomorfismo para grupos, e incluye varios teoremas que no se encuentran en la literatura.

El Capítulo 8 está destinado a la *Descomposición Genética* que proponemos, la cual es el centro de esta tesis.

El capítulo 9 contiene datos y breves análisis acerca de situaciones matemáticas y no matemáticas que por sí solas muestran la presencia de las relaciones de equivalencia y de las particiones en diversos ámbitos.

Termina el escrito con un Epílogo y el listado de referencias.

N. **B**.: Quisimos alterar el orden lógico de la exposición, de manera de poder adentrarnos de inmediato en nuestro teorema del isomorfismo de grupos, cual es el objeto que da sentido a la inclusión de los otros temas en el escrito. A la postre, hubimos de renunciar a ese deseo, que, por una parte nos obligaba en demasiadas ocasiones a señalar que la explicación de algún asunto se daría posteriormente y, por otra, nos impedía contar con la perspectiva global a la que hemos aludido. Habida cuenta de lo anterior, el capítulo acerca de relaciones ha sido ubicado antes que nuestro teorema, y, como quiera que hemos debido considerar en aquel información de cierta amplitud, hemos indicado de manera explícita los puntos sobresalientes –procurando favorecer así, de algún modo, una lectura rápida y expedita–.

Estructura del escrito

Como norma general, a lo largo del texto y cada vez que nos ha sido posible, hemos procurado ubicar los temas bajo análisis en una perspectiva que los sitúe tanto en la teoría matemática como en el desarrollo histórico y en su complejidad y génesis cognitivas. Según tendremos oportunidad de explicitar, tal perspectiva no solo ilumina el estudio sino que también permite apreciar la relevancia de esos temas y, por tanto, la pertinencia de su estudio.

Por lo demás los aspectos teórico matemáticos, históricos y epistemológicos no son en absoluto disjuntos:

Por supuesto, ubicar un tema al interior de la teoría matemática no solo le da la consistencia apropiada sino que también explicita su rol y su relevancia.

Por otra parte y según tendremos oportunidad de recordar, se ha encontrado no solo mecanismos comunes en la historia y la psicogénesis de los conceptos matemáticos, sino también que fenómenos similares recurrentes pueden trazarse a través de su desarrollo histórico y de su reconstrucción individual. Ello podría deberse a propiedades inherentes al conocimiento mismo o a la naturaleza de la relación entre sus diferentes niveles; en cualquier caso, sería una razón de que las dificultades que experimenta un individuo que aprende, en las diferentes fases de formación mental de sus propios conceptos y propiedades matemáticas, sean bastante próximas a las que enfrentaron los matemáticos

cuando crearon esos saberes específicos .

Las relaciones

(Insistencia). Si bien el tema de las relaciones es fácilmente accesible en la literatura, la presentación que aquí hacemos nos permite atender a algunas cuestiones necesarias para nuestro estudio:

- por una parte, precisar ciertas nociones que los tratamientos habituales suelen hacer de manera equívoca –lo que tiene consecuencias cognitivas de importancia–;
- por otra, poner de relieve el resultado que denominamos "teorema RE/P", de suma importancia para nuestro estudio, y cuyo enunciado habitual es insuficiente para nuestro análisis (e incongruente con el teorema que nos ocupa);
- además, nos permite introducir algunos conceptos que no siempre están presentes en los textos, pero que nos posibilitan apreciar el teorema del isomorfismo –y otros que le acompañan– en una perspectiva más comprensiva.

Confiamos que la lectura del capítulo pueda hacerse con cierta rapidez, focalizándose en los aspectos más relevantes y deteniéndose en el resto solo en caso necesario.

Presentación

Relaciones

Casi toda la Matemática que conocemos descansa sobre alguna versión de la Teoría de Conjuntos. Ahora bien, dado que debe hacerse casi siempre expresa mención de las relaciones entre los objetos de cada teoría, la Teoría de Relaciones (binarias) está igualmente presente.

Lo anterior no bastaría, claro está, para su inclusión en este estudio; sin embargo, aparte de las razones que dimos en el Proemio, necesitamos hacer una referencia expresa a esta teoría.

Fijaremos la terminología que vamos a utilizar –y que se aparta un tanto de la habitual– y haremos mención de resultados indispensables para nuestro tratamiento, alguno de los cuales vamos a demostrar, por su relevancia –y porque la versión que damos difiere también de la que se encuentra en la literatura–.

Relaciones de equivalencia

Las relaciones de equivalencia son esenciales para nuestro trabajo: es desde allí que nos aproximamos a los grupos cocientes y a nuestro teorema del isomorfismo. (Las relaciones de orden, por su parte, nos ayudan a clarificar algunos aspectos que debemos discutir).

Por ello, exponemos también nociones y resultados acerca de relaciones de equivalencia que utilizaremos en nuestro tratamiento del teorema del isomorfismo de grupos. En particular, nos interesa presentar en detalle el importante teorema que liga relaciones de equivalencia y particiones, cuya relevancia matemática y también cognitiva para nuestro tema será ostensible más adelante en el escrito.

Riqueza del esquema

Ahora bien, pese a la importancia superlativa del tema de relaciones de equivalencia y de particiones en todas las teorías matemáticas que hemos podido conocer, nuestra observación y práctica docente, así como conversaciones que hemos tenido al respecto con académicos de varias instituciones y, en fin, el análisis de los textos usuales para cursos que incluyen aspectos del álgebra abstracta, nos han hecho ver que se les presta poca importancia en la enseñanza. Esto es muy lamentable, pues se desaprovecha una herramienta bastante útil, y su dominio, además –según evidencia el trabajo que hemos realizado con nuestros alumnos, en muchas ocasiones– aporta, como cabría esperar, mayor comprensión a los objetos bajo estudio.

Debido a ello, consideramos muy necesario disponer de esquemas ricos, coherentes, de

relación de equivalencia y de partición.

Por esta razón, incluiremos algunas consideraciones y ejemplos matemáticos que sirven para este objetivo. (En el Capítulo 9 reuniremos información adicional acerca de esos y otros ejemplos, algunos de carácter menos formal pero útiles, según nuestro parecer, para ese propósito).

Con todo esto no pretendemos apartarnos de nuestro objetivo central, sino, por el contrario, situarlo en un hábitat natural y en el cual se lo comprenda mejor y se aprecie su relevancia.

Al respecto, es muy conveniente tener presente la importancia decisiva que históricamente tuvo la aparición del concepto de relación de equivalencia para la concreción de un concepto apropiado de grupo cociente (lo cual será reseñado más adelante).

Plan del capítulo

En la primera sección, fijamos la terminología; lo relevante allí es la distinción, que mantenemos a lo largo de todo el texto, entre el objeto lógico relación y el conjunto que determina en un producto cartesiano, su gráfico.

Las secciones segunda y tercera tratan de relaciones de equivalencia.

El aspecto matemático de estas relaciones está tratado en la tercera sección; allí fijamos la conceptuación y la simbología, y explicitamos el teorema, fundamental en nuestro estudio, que liga las relaciones de equivalencia con las particiones que ellas determinan en los conjuntos en los cuales están definidas: nuestro "teorema RE/P"▼.

Hemos precedido, sin embargo, el tratamiento matemático, por un comentario relativamente extenso que habla de la presencia de las relaciones de equivalencia tanto al interior de la Matemática –en sus diferentes teorías– como en otras disciplinas y aun en la vida diaria. Este comentario, que incluimos por el valor que le atribuimos, será prolongado, de una manera diferente, en el capítulo 9.

Relaciones y gráficos

Relaciones y gráficos

Notation *En esta sección, A denota un subconjunto de un conjunto dado U.*

Vamos a fijar, a continuación, la terminología que utilizaremos en esta materia para nuestro estudio.

Definition *Una relación (binaria) es una función proposicional en dos letras.*

En lugar de anotar $p(x,y)$, por ejemplo, en ocasiones escribiremos, por comodidad, $x\mathcal{R}y$. Incluso, si no hay peligro de confusión, anotamos simplemente $\mathcal{R}$, subentendiendo las letras x,y.

Definition *La función proposicional $p(x,y) \wedge x \in A \wedge y \in B$ se llama relación binaria en $A \times B$, o bien de A a B.*

En tal caso, A se llama el conjunto de partida de $\mathcal{R}$, B el conjunto de llegada de $\mathcal{R}$. Si $A = B$, una relación de A a B se llama simplemente una relación en A.

Según el *axioma de especificación* la función proposicional $x\mathcal{R}y$ determina un subconjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ de $A \times B$ por $(x,y) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$

Definimos, entonces,

Definition *Sea $\mathcal{R}$ una relación en $A \times B$. Entonces, el gráfico de $\mathcal{R}$ es el conjunto* $\mathcal{G}(\mathcal{R},A,B) = \mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in A \times B : x\mathcal{R}y\}$

Inversamente, se tiene la siguiente proposición, de demostración inmediata:

Proposition *Sea $\mathcal{G} \subset A \times B$. Entonces, $\mathcal{G}$ induce (esto es, define) una relación $\mathcal{R}$ en $A \times B$ por $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x,y) \in \mathcal{G}$, cuyo gráfico es precisamente $\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \mathcal{G}$.*

Remark *Sigue de la proposición anterior que darse una relación en $A \times B$ es, aparentemente, equivalente a darse un gráfico en $A \times B$. Por esta razón, algunos autores identifican una relación con su gráfico, y hablan de que una relación es "un subconjunto del producto cartesiano...". No seguimos aquí esa práctica, que nos parece matemáticamente incorrecta, cognitivamente reprochable y, respecto de nuestro tema, inconviente.*

De hecho, es inmediato encontrar ejemplos interesantes que muestran que puede haber $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ no equivalentes y cuyo gráfico sobre un determinado conjunto sea el mismo, de manera análoga a tener, por ejemplo, dos ecuaciones no equivalentes cuya solución en un conjunto (pequeño, pongamos por caso) coincida.

Nos interesa mantener la diferencia entre relaciones y gráficos por múltiples motivos:

1. *podemos mantener una separación entre objetos lógicos y conjuntísticos, lo cual es importante para nuestro tema;*
2. *en realidad, pensar en una relación desde el punto de vista lógico es más natural que concebirla como conjunto de pares ordenados (si uno se pregunta acerca de la relación ser hermano de, por ejemplo, difícilmente se responderá pensando en el conjunto de pares que se forma);*
3. *se dice a menudo que una función es un caso especial de relación, y se agrega luego que una función es una "ley" (que asocia a ciertos elementos ciertos otros, unívovamente determinados). A pesar de que la palabra ley es extraña a la matemática (regla sería más apropiado), ella alude a una situación lógica (se cumple o no se cumple). Las dos ideas anteriores colisionan si se considera que una relación es un subconjunto del producto cartesiano –lo cual añade una carga indebida al neófito–;*
4. *identificar una función proposicional en dos letras $p(x,y)$ definida en A y su gráfico $G_{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in A \times B : p(x,y)\}$ es, equivalente, mutatis mutandis, a identificar una función proposicional en una letra $p(x)$ definida en A y su solución $S_p = \{x \in A : p(x)\}$.*
   Si $A = B = \mathbb{R}$, pongamos por caso, un ejemplo de lo anterior es que identificar la relación $x^2 + y^2 = 1$ con su gráfico es 'equivalente' a identificar la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$ con el conjunto $\{-2,-3\}$, en favor de lo cual puede argumentarse, pero es fácil convenir que ello no ayuda, precisamente, al estudiante. Seguramente, este considera que la ecuación, pongamos por caso, $\frac{13}{30}x^3 + \frac{13}{15}x^2 - \frac{39}{10}x = \frac{39}{5}$ es otra que la anterior, aun cuando tiene la misma solución; así, por lo demás, lo expresará el propio profesor.

Definition *Sea $\mathcal{R}$ una relación en $A \times B$.*

1. *Se llama dominio de $\mathcal{R}$ al conjunto $Dom(\mathcal{R}) = \{x \in A : (\exists y \in B)x\mathcal{R}y\}$*
2. *Se llama codominio de $\mathcal{R}$ al conjunto $Cod(\mathcal{R}) = \{y \in B : (\exists x \in A)x\mathcal{R}y\}$*

Remark *$Cod(\mathcal{R})$ se llama también conjunto imagen de $\mathcal{R}$ y se anota $\mathrm{Im}(\mathcal{R})$, o bien recorrido de $\mathcal{R}$ y se anota $Rec(\mathcal{R})$*

Relación inversa

Definition *Sea $\mathcal{R}$ una relación en $A \times B$. Se llama relación inversa de $\mathcal{R}$ y se anota $\mathcal{R}^{-1}$ a la relación definida en $B \times A$ por $y\mathcal{R}^{-1}x \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$.*

Remark *Se tiene de inmediato que el conjunto de partida de $\mathcal{R}^{-1}$ es el conjunto de llegada de $\mathcal{R}$, y que el conjunto de llegada de $\mathcal{R}^{-1}$ es el conjunto de partida de $\mathcal{R}$. Más aún, se tiene que $Dom(\mathcal{R}^{-1}) = Cod(\mathcal{R})$; $Cod(\mathcal{R}^{-1}) = Dom(\mathcal{R})$.*

Restricción de una Relación

Definition *Sea $\mathcal{R}$ una relación de A a B y sea $A_1 \subset A$. Se llama restricción de $\mathcal{R}$ a A_1 y se nota $\mathcal{R}|_{A_1}$ a la relación definida por $\mathcal{R}(x,y) \wedge x \in A_1 \wedge y \in B$.*

Funciones

Definition *Sea $x\mathcal{R}y$ una relación de A a B. Se dice que $\mathcal{R}$ es una función de A a B si y solo si*

i. $Dom(\mathcal{R}) = A$

ii. $(\forall x \in A)(\forall y' \in B)(\forall y'' \in B)(x\mathcal{R}y' \wedge x\mathcal{R}y'' \Rightarrow y' = y'')$

Notation *Si una relación $\mathcal{R}$ de A a B es función de A a B, se prefiere anotar $f : A \to B; x \mapsto y = f(x)$.*

En tal caso, decimos, además, que A es la fuente de f, y que B es el blanco de f.

Definition *Sean f, g funciones de A a B. Se dice que f y g son iguales y se anota $f = g$ si y sólo si*

i. $Dom(f) = Dom(g)$

ii. $(\forall x \in Dom(f))(f(x) = g(x))$

Remark *Si f es una función de A a B, $B' \subseteq B$ y $Cod(f) \subseteq B$, se suelen identificar la función f y la función $g : A \to B'$ definida por $g(a) = f(a)$, para cada $a \in A$.*

Aspectos generales

Definition *Sean $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ relaciones definidas en $A \times B$.*

1. *Se llama conjunción de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ y se anota $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ a la relación definida en $A \times B$ por $x(\mathcal{R} \wedge \mathcal{S})y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \wedge x\mathcal{S}y$*

2. *Se llama disyunción de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ y se anota $\mathcal{R} \vee \mathcal{S}$ a la relación definida en $A \times B$ por $x(\mathcal{R} \vee \mathcal{S})y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \vee x\mathcal{S}y$.*

Remark *Es claro que se tiene, para cualquier $(x,y) \in A \times B$:*

1. $(x,y) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}\wedge\mathcal{S}} \Leftrightarrow (x,y) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}} \wedge (x,y) \in \mathcal{G}_{\mathcal{S}}$

2. $(x,y) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}\vee\mathcal{S}} \Leftrightarrow (x,y) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}} \vee (x,y) \in \mathcal{G}_{\mathcal{S}}$

Así, se tiene el siguiente

Theorem *Sean $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ relaciones definidas en $A \times B$. Entonces:*

1. $\mathcal{G}_{\mathcal{R}\wedge\mathcal{S}} = \mathcal{G}_{\mathcal{R}} \cap \mathcal{G}_{\mathcal{S}}$

2. $\mathcal{G}_{\mathcal{R}\vee\mathcal{S}} = \mathcal{G}_{\mathcal{R}} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{S}}$

Definition *Sean $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ relaciones definidas en $A \times B$. Se dice que $\mathcal{R}$ es más fina que $\mathcal{S}$ y se anota $\mathcal{R} \preceq \mathcal{S}$ si y solo si $(\forall x \in A)\ (\forall x \in B)(x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{S}y)$.*

En tal caso, se dice también que $\mathcal{S}$ es menos fina que $\mathcal{R}$, y se anota $\mathcal{S} \succeq \mathcal{R}$.

Remark *Se observará entonces que, a su vez, $\preceq$ y $\succeq$ son relaciones (definidas sobre*

conjuntos de relaciones), una inversa de la otra.

Definition *Sea $\mathcal{R}$ una relación definida en A. Se dice que:*

1. *$\mathcal{R}$ es reflexiva ssi $(\forall x \in A)(x\mathcal{R}x)$*
2. *$\mathcal{R}$ es simétrica ssi $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$*
3. *$\mathcal{R}$ es antisimétrica ssi $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y)$*
4. *$\mathcal{R}$ es transitiva ssi $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$*

Definition *Sea $\mathcal{R}$ una relación definida en A. Se dice que:*

1. *$\mathcal{R}$ es una relación de orden en A ssi $\mathcal{R}$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*
2. *$\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A ssi $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva.*

Remark *Si $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A, se suele decir simplemente que $\mathcal{R}$ es un orden en A.*

Por otra parte, se observará que si $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ son relaciones de equivalencia definidas sobre A, entonces $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ también lo es (pero no $\mathcal{R} \vee \mathcal{S}$).

Remark *La relación $\preceq$ parece un orden, incluso un orden filtrante (ver sección siguiente), pero no lo es:*

1. *ella es reflexiva y transitiva;*
2. *se tiene además que $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S} \preceq \mathcal{R} \preceq \mathcal{R} \vee \mathcal{S}, \mathcal{R} \wedge \mathcal{S} \preceq \mathcal{S} \preceq \mathcal{R} \vee \mathcal{S}$*
3. *sin embargo, ella no es antisimétrica: si $\mathcal{R} \preceq \mathcal{S}$ y $\mathcal{S} \preceq \mathcal{R}$, no se tiene $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ (lo que no tiene sentido), sino $\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{S}$.*

Relaciones de orden

Noción de conjunto ordenado

Notation *Si $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A, anotamos $(A;\mathcal{R})$ y decimos que A es un conjunto ordenado (por $\mathcal{R}$).*

Proposition *Si $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A, entonces $\mathcal{R}^{-1}$ es un orden en A.*

Notation *Si no hay peligro de confusión, se acostumbra anotar una relación de orden cualquiera $\mathcal{R}$ con el símbolo $\leq$.*

Notation *La relación inversa de un orden $\leq$ en un conjunto A se suele escribir $\geq$.*

Aprovechando el hecho que un orden es una relación transitiva, se puede representar un conjunto ordenado $(A, \leq)$ mediante un *diagrama de Hasse*. En tal representación, se dibujan los elementos de A conectados por segmentos de recta no horizontales de tal manera que, si se puede ir de un elemento x a otro y siguiendo un camino ascendente de segmentos, se entenderá que $x \leq y$. (Con caminos descendentes se leerá entonces la relación inversa).

En la figura siguiente, está el diagrama de Hasse de una relación $\mathcal{R}$ en $A = \{a, b, c, d\}$ cuyo gráfico es el que se indica abajo.

Example

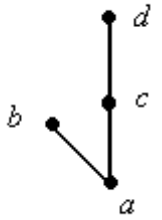


Figura 1. $G_{\mathcal{R}} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(a,d),(c,d)\}$

Tipos de órdenes

Definition *Sea* $(A,\leq)$ *un conjunto ordenado. Se dice que:*

1. $\leq$ *es un orden filtrante a la derecha (en* A*) ssi*
   $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\exists z \in A)(x \leq z \wedge y \leq z)$
2. $\leq$ *es un orden filtrante a la izquierda (en* A*) ssi*
   $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\exists z \in A)(z \leq x \wedge z \leq y)$
3. $\leq$ *es un orden filtrante en* A *o bien, que* $\leq$ *es un retículo en* A*, ssi* $\leq$ *es un orden filtrante a la derecha y (un orden filtrante) a la izquierda en* A*.*
4. $\leq$ *es un orden total en* A *ssi* $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x \leq y \vee y \leq x)$

Proposition *Si* $\leq$ *es un orden total en* A*, entonces* $\leq$ *es un orden filtrante en* A*.*

Morfismos

Definition *Sean* $(A,\leq_A)$, $(B,\leq_B)$ *conjuntos ordenados, y sea* $f : A \to B$ *una función.*

Se dice que f *es un morfismo de orden ssi*

$(\forall a \in A)(\forall a' \in A)(a \leq a' \Rightarrow f(a) \leq f(a'))$

Remark *Se definen también monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo de orden, de la manera acostumbrada.*

Por otra parte, si se tiene $(\forall a \in A)(\forall a' \in A)(a \leq a' \Rightarrow f(a) \geq f(a'))$*, se dice que se tiene un antimorfismo de orden.*

Cotas

Hay una conceptuación adicional para los órdenes, de mayor relevancia para el caso de los órdenes filtrantes (a izquierda, a derecha) y, en particular (en el caso infinito) para los órdenes totales.

Definition *Sea* $(E,\leq)$ *un conjunto ordenado, y sea* $A \subseteq E$*.*

1. *Se dice que un elemento* s *de* E *es una cota superior de* A *si y solo si* $(\forall a \in A)(a \leq s)$*; si hay una cota superior para* A*, se dice que* A *es acotado superiormente.*
2. *Se dice que un elemento* i *de* E *es una cota inferior de* A *si y solo si* $(\forall a \in A)(i \leq a)$*; si hay una cota inferior para* A*, se dice que* A *es acotado inferiormente.*
3. *Se dice que* A *es acotado si es acotado superiormente y acotado inferiormente*

Definition *Sea* $(E,\leq)$ *un conjunto ordenado, y sea* $A \subseteq E$*.*

1. *Si* A *es acotado inferiormente, se dice que un elemento* i *de* E *es un ínfimo de* A *si y solo si*
   $(\forall a \in A)(i \leq a) \wedge (\forall x \in E)(((\forall a \in A)(x \leq a)) \Rightarrow x \leq i)$

2. *Si A es acotado superiormente, se dice que un elemento s de E es un supremo de A si y solo si*

$$(\forall a \in A)(a \leq s) \wedge (\forall x \in E)(((\forall a \in A)(a \leq x)) \Rightarrow s \leq x)$$

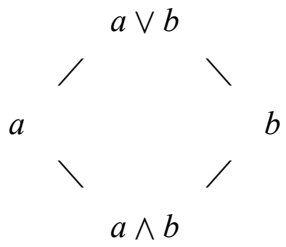
Remark *Es claro que se tiene que, dado un conjunto A, hay a lo sumo un ínfimo de A y un supremo de A, de modo que podemos hablar, en ese caso, de*

1. *el ínfimo de A, y anotar, por ejemplo,* $\inf(A)$, *o, simplemente,* $\inf A$
2. *el supremo de A, y anotar* $\sup(A)$, *o, simplemente,* $\sup A$

Notation *Sea $(E,\leq)$ un conjunto ordenado y sea $A = \{a,b\} \subseteq E$, entonces*

1. *Si $\leq$ es filtrante a derecha, anotamos $a \wedge b$ en lugar de* $\sup\{a,b\}$
2. *Si $\leq$ es filtrante a izquierda, anotamos $a \vee b$ en lugar de* $\inf\{a,b\}$

En el caso anterior, tenemos el siguiente diagrama de Hasse:



Remark *Las notaciones $a \wedge b$ y $a \vee b$ no se prestan a confusión: si es necesario, utilizamos paréntesis para evitar ambigüedades.*

Además, se puede anotar $\sup\{a,b,c\}$ *como $a \vee b \vee c$. (Ello porque se puede demostrar que* $\sup\{\sup\{a,b\},c\} = \sup\{a,\sup\{b,c\}\}$).

Ilustraciones

Example *Sean U un conjunto, $E = \mathbb{P}(U)$ y consideremos la inclusión $\subseteq$ en E. Sean $A,B \in E$. Es inmediato comprobar que:*

1. $(E,\subseteq)$ *es un conjunto ordenado*
2. $\subseteq$ *es un orden filtrante en E*
3. $\inf\{A,B\} = A \wedge B = A \cap B; \sup\{A,B\} = A \vee B = A \cup B$

El siguiente ejemplo es no solamente análogo al anterior, sino que se puede definir con facilidad una función que los conecta formalmente:

Example *Sean ahora $F = \mathbb{N}$, y definamos $a|b$ si y solo si hay $k \in \mathbb{N}$ tal que $ak = b$. Es también inmediato comprobar que:*

1. $(F,|)$ *es un conjunto ordenado*
2. $|$ *es un orden filtrante en E*
3. $\inf\{a,b\} = mcd\{a,b\}; \sup\{a,b\} = mcm\{a,b\}$ *(máximo común divisor y mínimo común múltiplo, respectivamente).*

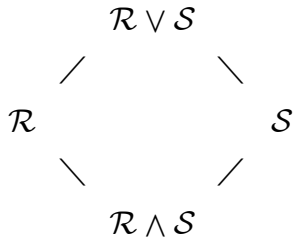
Remark *La evidente analogía entre los dos ejemplos anteriores es algo más que casual:*

Consideremos $E = \{n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$ y los conjuntos ordenados $(E,\subseteq)$ y $(F,|)$. Definamos $f : E \to F$ por $n\mathbb{Z} \mapsto n$. Entonces:

1. *f es una biyección*
2. *$n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \Leftrightarrow m|n$*

Debido a lo anterior, se dice que f es un (anti)isomorfismo de orden.

Remark *Se observará,a demás, que la Observación 24 es análoga a esta, (salvo que, según se verá en la siguiente sección, allí se debe tratar con clases de equivalencia de relaciones):*



Comentario acerca de las relaciones de equivalencia

Según el teorema RE/P, que se verá en la siguiente sección, una relación de equivalencia definida en un conjunto A induce una *partición* en A, e inversamente.

El comentario que sigue hará uso riterado de ese hecho, así como de algunas nociones bien conocidas que allí se detallan con precisión.

Presencia de las relaciones de equivalencia

Importancia para el teorema

Según hemos venido insistiendo, cuando se estudia nuestro teorema central, la dificultad radica principalmente en el trabajo con cocientes. Tal como también hemos indicado, hay en ello una dificultad intrínseca, de la cual hemos sugerido una raíz de carácter histórico –que veremos en mayor detalle más adelante–.

No obstante la dificultad señalada, nos proponemos aquí poner de relieve la naturalidad y la cualidad de ubicuas de las relaciones de equivalencia, y de las particiones o cocientes, tanto en la propia Matemática como en la vida diaria.

Con ello, queremos inisitir en que aquella dificultad disminuiría si acaso se aprovechare esta importante circunstancia para el aprendizaje de nuestro teorema. Desafortunadamente, los textos habituales de álgebra abstracta, pese a que la mirada contemporánea del tema de suyo les lleva a tratar los temas con la mayor generalidad, desaprovechan la posibilidad de apoyarse en la idea de relación de equivalencia. Incluso, se da el caso de que se lo considere una elegancia inútil o una suerte de sofisticación, como lo muestra la única mención (sin colofón alguno) que se encuentra en uno de ellos, por lo demás, importante en la enseñanza en Chile: *...El lector más conocedor reconocerá que la propiedad de ser isomorfo es una relación de equivalencia en una colección de grupos*. (Fraleigh, 1973, p. 57).

Diferentes ámbitos

Haremos, entonces, un comentario un tanto general, cuyo objetivo directo, atinente a nuestro estudio, es el de mostrar que una noción apropiada de relaciones de equivalencia puede utilizarse mejor en beneficio del trabajo con cocientes. De todas maneras, el asunto desborda a nuestro tema, pues los ejemplos que daremos para substanciar lo anterior muestran que no se trata solamente de que el álgebra abstracta desaproveche la evidente cercanía de las relaciones de equivalencia al estudiante, sino que, en general, es una noción que se desperdicia a lo largo y ancho de los estudios.

Estrictamente hablando, tales elementos podrían remitirse a la sola Matemática; sin embargo y según mostraremos a continuación, es muy relevante considerar la cuestión desde una perspectiva más comprensiva, que incluye el uso que se da a esos conceptos, aun de manera independiente a la presencia eventual de definiciones formales.

Así, y de manera un tanto inopinada, estaremos hablando, nos parece, de la *práctica*

social de las relaciones de equivalencia y de las particiones. Ahora bien, tal noción es ajena al marco teórico en el que trabajamos y podría, por tanto, considerarse una digresión indebida; sin embargo, podemos también expresar lo anterior diciendo que hablaremos en términos amplios de elementos que pueden utilizarse para una construcción suficientemente rica, coherente, de los *esquemas* de relación de equivalencia y de partición.

En el Capítulo 9 desarrollaremos con mayor detalle estas últimas ideas .

Formalidad e informalidad

A continuación, pasaremos revista a una variedad de relaciones de equivalencia tomadas un tanto al azar y que muestran podemos seguir indefinidamente encontrándolas, en cualquiera dirección en que miremos –y, reiteramos una vez más, que no se las aprovecha debidamente en la enseñanza–.

Repararemos primero en algunas tomadas de la Matemática, lo que nos permitirá ilustrar nuestro aserto de que ellas están siempre presentes en las diversas áreas de esta disciplina.

Incluiremos a continuación otras que se refieren a la utilización de relaciones de equivalencia matemáticas en situaciones extramatemáticas; ello nos permite recordar cómo ellas están presentes en cada disciplina, y, en general, en la cultura.

Finalmente, daremos ilustraciones de la vida diaria: relaciones de equivalencia y particiones espontáneamente fabricadas y utilizadas, aun en ausencia de definiciones formales al respecto.

(Haremos además algún excurso eventual acerca de relaciones de órdenes, para aclarar ciertos puntos de interés para nuestro tema central).

No tenemos que decir que no pretendemos que los ejemplos que proponemos sean importantes en sí, ni que constituya cada uno un asunto que concierne al estudio que se hace, ni mucho menos que pretendamos tener competencia en los temas extramatemáticos que rozamos.

Una característica desafortunada que la mayoría de estos ejemplos comparte es lo que anunciábamos: que ellos son desaprovechados en la enseñanza, cosa que ocasionalmente señalaremos al pasar. En cualquier caso, la experiencia indica que los estudiantes pueden trabajar con ellos, y, aun, lo hacen con interés y muchas veces en forma expedita.

El ámbito matemático

Hay varios tipos de relaciones de equivalencia que se utilizan con frecuencia en los estudios universitarios (y aun de enseñanza secundaria) habituales de Matemáticas.

Listamos en lo que sigue solo algunos de esos tipos, con el objeto de reunirlos para su consideración en conjunto, de manera de sugerir un panorama comprensivo. Agregaremos a continuación otros que son de uso de quienes se dedican a la Matemática.

Las más permanentes

Recordamos, en primer lugar, relaciones de equivalencia y particiones que se usan de manera permanente.

La igualdad

Lo que genéricamente los estudiantes llaman *igualdad* es, como sabemos, una serie larga de relaciones de equivalencia que llevan ese apelativo: igualdad de conjuntos, de números (diferente según el sistema numérico involucrado), de funciones, de matrices, de sucesiones, de polinomios...

Particiones en $\mathbb{R}$

Por muchos motivos, el alumno acostumbra a particionar el conjunto de los números reales o algún subconjunto de él. Por ejemplo: se lo hace para determinar soluciones de inecuaciones, o para calcular superficies à la Riemann. Además y muy relevante, el modelamiento de fenómenos suele también necesitar de un dominio particionado de la función que modela, según varían las condiciones en los diversos escenarios.

La geometría

La geometría abunda también en ejemplos, de los cuales nos limitaremos a señalar algunos. Lo haremos en forma ordenada, a manera de sugerencia de que un listado que podría ir ganando en profundidad suele, sin embargo, detenerse en los primeros estadios, consistentes en la mención de que determinado objeto es un ejemplo de relación de equivalencia, sin mayor elaboración.

Primeros ejemplos

El paralelismo de rectas en el conjunto de rectas del plano es uno de los ejemplos que se cita más a menudo. Por supuesto, se podría considerar también el paralelismo de rectas en el conjunto de rectas del espacio.

En el conjunto de los triángulos del plano, la congruencia y la semejanza de triángulos (la segunda menos fina que la primera) son también ejemplos de ocurrencia frecuente como ejemplo de relación de equivalencia. Ellos podrían ampliarse a triángulos en el espacio; podría también considerarse, por analogía, los triángulos que tienen una misma área, un mismo perímetro, etc.; además, podría extenderse todo ese tema a polígonos en general. (Ello tiene, a nuestro parecer, interés matemático y también didáctico).

Tal situación se puede expresar usando diferentes relaciones de equivalencia. Por ejemplo, si x,y son triángulos en el plano, y definimos $x\mathcal{R}y$: x tiene la misma área que y; $x\mathcal{S}y$: $x \sim y$: x es semejante a y (es decir, tiene la misma 'forma') $x\mathcal{T}y$: $x \simeq y$: x es congruente a y (tiene la misma forma, las mismas dimensiones), entonces, se tiene $\mathcal{T} \preccurlyeq \mathcal{S}; \mathcal{T} \preccurlyeq \mathcal{R}$

Vectores

El caso del conjunto de los vectores en el plano, aun en la noción ingenua del bachillerato, de "flecha", es también interesante. Se pueden definir varias relaciones de equivalencia sobre ese conjunto, vale decir, dos vectores son equivalentes si (respectivamente): sus longitudes son iguales; sus direcciones son iguales; sus direcciones y sentidos son iguales; sus direcciones, sentidos y longitudes son iguales.

Geometría de la visión

Un ejemplo muy interesante y que manifiesta la utilidad de las relaciones de equivalencia se obtiene como sigue: Consideramos el conjunto $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ y la relación $\mathcal{R}$ definida por

$(x,y,z)\mathcal{R}(x',y',z') \Leftrightarrow (\exists\lambda \in \mathbb{R})(x' = \lambda x \wedge y' = \lambda y \wedge z' = \lambda z)$. Se trata de una relación de equivalencia que induce una partición de interés.

Geometría lineal (Álgebra lineal)

El conjunto S de soluciones de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales de n incógnitas, con coeficientes en un cuerpo K, es un subespacio de un K-espacio vectorial V de dimensión n. Las soluciones de los sistemas no-homogéneos son clases de equivalencia en V/S.

Esta ilustración ejemplo corresponde, por supuesto, al estudio general del espacio vectorial cociente V/U, para un subespacio vectorial U de V (cuyo aspecto de grupo hemos examinado con detalle en el texto; en particular, se aplica para él el teorema del isomorfismo –de espacios vectoriales, en este caso–). Ilustrar esta situación, incluso con ayuda de dibujos, permite no solo comprender mejor el asunto, sino también enunciar proposiciones que de otro modo permanecen, con frecuencia, oscuras. (Por ejemplo, que $v + U = w + U$ si y solo si $w - v \in U$, cuestión que hemos tratado en detalle para nuestros subgrupos normales y cocientes de grupos).

Los grupos

Una cuestión ulterior, que nos limitaremos a enunciar, dice relación con el estudio amplio de la geometría, siguiendo las directrices de Klein, según las cuales una geometría es la acción de un grupo en un conjunto. Para los casos habituales, se trata de que distintos

grupos definen distintas geometrías, la diferencia de cuyas propiedades se puede investigar precisamente en la estructura de esos grupos. Si tomamos, por ejemplo, en sucesión, los grupos proyectivo, afín, lineal, de similitudes, de isometrías, de rotaciones, observaremos que cada uno de ellos provee de una mirada más precisa, es decir, más fina –que hace más distinciones–. (Se puede incluso diferenciar y clasificar los teoremas de la geometría plana escolar según sea el grupo específico que actúa en su caso).

Números y Álgebra

Los sistemas numéricos

Un ejemplo destacado, naturalmente, del uso de relaciones de equivalencia, se da en los sistemas numéricos.

Tomemos el caso de los números racionales: cuando los denominadores no son iguales, se reemplaza cada fracción por alguna en los que los denominadores coincidan: el proceso de suma $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\times5+4\times3}{3\times5}=\frac{10+12}{15}$ corresponde al de reemplazar unas fracciones por otras equivalentes: $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{22}{15}$.

(Simple como es esta observación, a profesores básicos a quienes hemos mostrado esta situación, la alegría que espontáneamente manifiestan por conocer finalmente la razón subyacente al algoritmo, es seguida de inmediato por una sensación de pesar y aun de culpa por no haber sabido explicar esa razón a sus alumnos, durante años).

La construcción de esos sistemas

Es fácil convenir en que ha habido, en varios países, no solo de Latinoamérica, un excesivo celo, en la enseñanza elemental, por la construcción de los sistemas numéricos –por ejemplo, de los enteros– por encima del conocimiento inmediato de las operaciones (cuestión esta reprochable también desde un punto de vista puramente algebraico).

Lo anterior no obstante, algunos estudiantes de bachillerato necesitan construir (de alguna manera) los sistemas numéricos.

Por ejemplo, el campo $\mathbb{R}$ de los números reales es el cociente del anillo conmutativo con unidad $\mathfrak{C}$ de las sucesiones de Cauchy de números racionales, sobre el ideal maximal $\mathfrak{I}$ de las sucesiones convergentes a cero, es decir, $\mathbb{R}=\mathfrak{C}/\mathfrak{I}$.

A su vez, el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos es el cociente del anillo $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ sobre el ideal maximal $\langle x^2+1\rangle$, esto es, $\mathbb{C}=\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$.

A pesar de la forma casi explícita en que el teorema del isomorfismo de grupos aparece en esos dos enunciados, el esquema de grupo cociente subyacente, sin embargo, suele no estar disponible, como recurso conceptual y operativo, en estas ocasiones.

Teoría de números

En $\mathbb{Z}$, un ejemplo bien conocido y necesario es el de las *congruencias* $\mathcal{R}_n$ (*módulo n,* donde *n* es un número natural fijo) definidas por

$x\mathcal{R}_n y \Leftrightarrow x\equiv y(\mathrm{mod}\,n) \Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z})(y-x=kn)$.

Ellas son también una ilustración de cómo es que, disponiendo de un conjunto cociente ad hoc, no se le saca provecho: por ejemplo, cuando se resuelven congruencias (en su acepción de ecuación), se lo hace usando expresiones de la divisibilidad, sin recurrir a la estructura de anillo o incluso de cuerpo de los cocientes de $\mathbb{Z}$. (Por ejemplo, tanto el enunicado como la demostración del llamado teorema pequeño de Fermat, $a^{p-1}\equiv 1\,\mathrm{mod}(p)$ ignoran con frecuencia que es un resultado inmediato de la teoría de grupos; en realidad, una consecuencia directa del teorema de Lagrange relativo a que el orden de un elemento de un grupo (y de un subgrupo) es factor del orden del grupo ambiente, en este caso, el grupo multiplicativo del cuerpo $\mathbb{Z}_p$).

La teoría matemática

Si extendemos un poco nuestro universo muestral, podemos observar que un matemático deberá usar muchas otras relaciones de equivalencia, a propósito de una gran

variedad de teorías (por ejemplo, en acciones de grupos, en funciones integrables, en sistemas de ecuaciones...). Señalamos solo las más familiares:

Entre las primeras en aparecer, se cuentan las nociones de número cardinal y ordinal.

En una teoría matemática cualquiera, las relaciones de equivalencia aparecen a poco andar: se declara expresamente cuándo los objetos básicos son iguales (como ser, funciones iguales, matrices iguales, etc.). Por otra parte, se declara cuáles funciones son especialmente relevantes para la teoría en cuestión, y se los llama morfismos (por ejemplo, aplicaciones lineales entre espacios vectoriales); cuando tales morfismos son biyectivos se los declara isomorfismos, ellos permiten llamar equivalentes a dos estructuras matemáticas (por ejemplo, grupos isomorfos, espacios vectoriales isomorfos, etc.). De hecho, en términos generales se podría afirmar que una teoría comienza realmente cuando se establece cuáles serán los morfismos, entendidos estos como aquellas *flechas* que respetan la *estructura* que se está estudiando. (Se notará que este ejemplo contiene al de cardinales y ordinales).

Ahora bien, en teorías particulares, hay otras relaciones de equivalencia que son relevantes: equivalencia en el infinito ya sea de sucesiones o de funciones reales de variable real, isometrías, similitudes (como mencionamos antes), son algunas de esas relaciones particulares.

Tales relaciones de equivalencia manifiestan de manera explícita las identificaciones (y, su ausencia, las distinciones) que hace el *ojo* de un matemático en una determinada área.

Matemáticas y vida cotidiana

Es interesante notar que los ejemplos anteriores suelen tener aplicaciones bastante inmediatas a la vida cotidiana, los cuales se suelen, también, desperdiciar: pese a que a menudo se busca poner las nociones matemáticas en contexto, ciertamente hay aún un largo camino por recorrer.

Vectores

Las diferentes definiciones de vectores pueden servir u obedecer a distintos propósitos: la noción de vector, determinada por las igualdades que mencionamos arriba, se torna más exigente dependiendo del uso que se tiene en mente: la última de ellas, la habitual (dos vectores son iguales si tienen dirección, sentido y magnitud respectivamente iguales), sirve muy bien para el estudio de velocidades, por ejemplo, en una carrera; sin embargo, si se va a estudiar fuerzas sobre cuerpos, podría hacerse necesario agregar la necesidad de que haya el mismo punto de aplicación –garantizando así el mismo efecto sobre el cuerpo en cuestión–.

Geometría de la visión

La relación $\mathcal{R}$ que definimos para lo que llamamos arriba *geometría de la visión* identifica dos puntos que están en una misma dirección desde el $(0,0,0)$, punto que podemos pensar como el ojo que observa. En cada dirección, la visión ya sea escoge un único punto de visión o bien se desplaza hasta el infinito. (Un plano vertical contiene un elemento de cada clase y, si se lo recorta a un tamaño apropiado se lo puede considerar la superficie de una fotografía).

Congruencias

Las congruencias de números naturales o enteros tienen una relación inmediata con muchos fenómenos de la vida diaria. No se trata solo de que el famoso *teorema chino de los restos* se haya originado en un análisis de las festividades en el extremo oriente, pongamos por caso, sino de que, en forma más inmediata, hay muchos otros fenómenos cotidianos que siguen ese patrón: las estaciones del año, los meses y las semanas, las escalas musicales (pentáfona, módulo 5; diatónica, modulo 7; cromática, módulo 12 –árabe un módulo mayor–), juegos de diversa naturaleza, etc. Particularmente interesante es el caso de los puntos cardinales, cuya definición se refina sucesivamente hasta llegar a la llamada *rosa de*

los vientos, que algunas ocupaciones requieren.

Topología

Agregamos a continuación un ejemplo bien conocido y no presentado antes, que pertenece a la topología y que es una sugerencia adicional de la amplitud del concepto de relación de equivalencia, si bien, en sí, es solo un caso más.

Tomamos una hoja de papel rectangular; llamamos A, B (hacia la derecha) a los vértices inferiores; análogamente, C, D a los superiores. Indicamos a continuación algunas relaciones de equivalencia y los cocientes que resultan: si se identifica convenientemente (puntos de los) bordes $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ resulta un cilindro abierto; si en el cociente anterior se identifica además el borde superior con uno cualquiera de sus puntos, resulta un cono; y si, por el contrario, se identifica a la vez el borde $\overline{AC}$ con el borde $\overline{BD}$ y el borde $\overline{AB}$ con el borde $\overline{CD}$ resulta un *toro*, es decir, un *neumático*.

El diario vivir

Presencia de las relaciones de equivalencia

La Matemática es una disciplina formal, como sabemos, y se puede postular que podría desarrollarse sin hacer referencia alguna a lo que por lo general convenimos en llamar *la realidad* –de hecho, matemáticos tales como Hardy lo han hecho de manera bastante explícita y rigurosa–. Tal punto de vista filosófico, por supuesto, es anterior a la Matemática, y no es indispensable compartirlo.

En el caso de las relaciones de equivalencia, en forma adicional a la larga cantidad de objetos matemáticos que satisfacen las propiedades correspondientes, hay una legión de objetos no propiamente pertenecientes a la matemática, y aun remotos a ella, que pueden sin embargo, ser denominados con la misma expresión.

De hecho, ocurre con frecuencia que esos objetos –esas abstracciones, si se prefiere llamarlas así– se utilizan en variados ámbitos, de manera inconsciente, y a menudo en ausencia de definiciones explícitas y aun de conjuntos de referencia bien delimitados.

Pasaremos revista a continuación a algunos de eses ejemplos y a otros relacionados con ellos.

Nuestra intención aquí es mostrar que las relaciones de equivalencia son tan determinantes que es difícil realizar alguna tarea o siquiera pensar en algún asunto sin recurrir a una relación de equivalencia y a una partición más o menos implícita; en otras palabras, exhibir que, sin las relaciones de equivalencia, la civilización se desplomaría.

Aceptado lo anterior transitoriamente en beneficio del argumento, es fácil colegir que la importancia de las relaciones de equivalencia está muy subestimada, a pesar de que nos acompañen en todo lo que hacemos y de su fecundidad como concepto, que aporta claridad al pensamiento y al discurso.

Desde nuestra perspectiva, el gran desperdicio que lo anterior produce impide, además, utilizarlo de la manera que cabría esperar, para casos específicos tales como el del teorema del isomorfismo para grupos.

Los ejemplos

Nos limitaremos a un enunciado somero de algunos ejemplos.

La vida cotidiana

En la vida personal de cualquiera, tomar desayuno, vestirse, tomar un bus de recorrido, escuchar música, ver un combate de boxeo, son actividades que involucran recurrir a relaciones de equivalencia más o menos evidentes. Esas relaciones de equivalencia serán más o menos finas de acuerdo a cierta característica de quien las ocupa: hay quienes hacen más distinciones en la ropa; un tenista verá en un partido aspectos que un no iniciado no percibirá; un diletante no dirá simplemente *música clásica* –y un aficionado al *rap* reclamará que se lo confunda con el *funk* (y las propias categorías serán reemplazadas luego por otras)–. Las convenciones sociales son también un ejemplo claro de lo anterior;

incluso, usan nuestra terminología.

Las disciplinas

La Economía (comenzando, si se quiere, por el trueque, e incluyendo la producción en serie), la Biología (y su notorio afán de clasificación), la Psicología (y las distinciones cada vez más precisas que hace acerca de estados psíquicos), la Química (que identifica o no los isótopos, según convenga), etc., sugieren que cada disciplina científica o tecnológica necesita definir sus propias relaciones de equivalencia. La política, seccionada en partidos y similares, también es una muestra de que cada tipo de actividad requiere las suyas –y de que no siempre se utiliza la misma–.

La interdisciplina

En un ámbito interdisciplinario, las relaciones de equivalencia que se utilizan, y que dependen un tanto del oficio del interlocutor, abren un tema para la comprensión y el actuar. Por ejemplo, frente a un proyecto arquitectónico, ingenieros y ecologistas suelen definir equivalencias y órdenes distintos entre ellos y también respecto de los del arquitecto a cargo). Son notorios, además, tanto la importancia de buscar particiones comunes como el hecho de que, al parecer, cada quien quiere imponer la suya.

El lenguaje

El ejemplo del lenguaje es particularmente interesante. Por una parte, su uso más o menos refinado denota, evidentemente, un mayor o menor conocimiento de él. Adicionalmente, distintos pueblos disponen de una cantidad de palabras variables para expresar algunas sensaciones (o sentimientos), lo que abre la pregunta de si acaso las propias percepciones tienen grados de finura correespondiente. Aún más determinate, cada substantivo y cada adjetivo determinan particiones en un conjunto referencial ad hoc, lo que manifiesta claramente la dependencia del pensamiento respecto de las relaciones de equivalencia –y, por supuesto, de los correspondientes grados de finura relativa, según los usuarios–.

La evolución

Un estudio directo e inmediato nos muestra cómo es que la evolución ha dotado a los seres humanos con un tacto que adquiere grados mayores o menores de finura de acuerdo al sector corporal involucrado (mayor en los dedos, menor en la espalda, e. g.).

Las relaciones de equivalencia

Conceptos básicos

Definition *Una partición en un conjunto A es una colección $\mathcal{P}_A = \mathcal{P}$ de subconjuntos de A tal que:*

1. $\bigcup_{E\in\mathcal{P}} E = A$
2. $(\forall E \in \mathcal{P})(\forall F \in \mathcal{P})(E \cap F \neq \varnothing \Rightarrow E = F)$

Remark *La definición expresa que cada elemento de A pertenece a uno y solo uno de los elementos de $\mathcal{P}$:*

1. *dado que $\bigcup_{E\in\mathcal{P}} E$ es, necesariamente, subconjunto de A, la primera condición expresa que todo elemento de A está en alguno de los elementos de $\mathcal{P}$ (es decir, en alguno de los subconjuntos de A que constituyen $\mathcal{P}$), y*
2. *la segunda condición explicita que dos elementos de $\mathcal{P}$ no pueden tener elementos en común.*

Una partición es, por tanto y simplemente, una ’división’ de A en pedazos; cada trozo es un elemento de $\mathcal{P}$.

Si $\mathcal{P}$ es una partición de A, se suele considerar $\mathcal{P}$ como una familia de subconjuntos de A y cambiar levemente la notación, lo que resulta a veces útil en la práctica. En tal caso, (probando lo que corresponde), la definición queda como sigue:

Definition *Una partición en un conjunto A es una familia $\mathcal{P} = \{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de A tal que:*

1. $\bigcup_{i\in I} A_i = A$
2. $(\forall i \in I)(\forall j \in I)(A_i \cap A_j \neq \varnothing \Rightarrow A_i = A_j)$

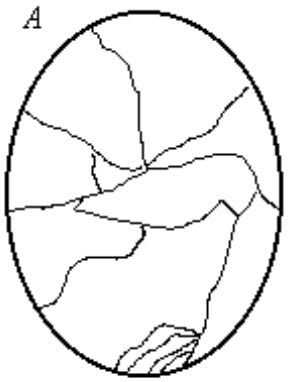


Figura 2. Partición $\mathcal{P}$ de A

Finura relativa y particiones

Presentamos aquí un resultado que nos permite enunciar con propiedad el importante teorema que liga a las relaciones de equivalencia con las particiones que ellas determinan. De momento, esa es la única finalidad con la cual se lo incluye en este capítulo.

Sean A un conjunto, $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}$ un conjunto de relaciones definidas sobre A.
Consideremos, (a su vez), en $\mathfrak{R}$, las siguientes relaciones, que hemos ya mencionado:

Definition *Sean $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathfrak{R}$. Definimos*

1. $\mathcal{R} \approx \mathcal{S} \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x\mathcal{S}y)$
2. $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S} \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{S}y)$

Remark *Como de costumbre, las relaciones en $\mathfrak{R}$ se traducen en relaciones en el conjunto $\mathfrak{G}$ de gráficos que $\mathfrak{R}$ determina:*

1. $\mathcal{R} \approx \mathcal{S} \Leftrightarrow G_{\mathcal{R}} = G_{\mathcal{S}}$
2. $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S} \Leftrightarrow G_{\mathcal{R}} \subset G_{\mathcal{S}}$

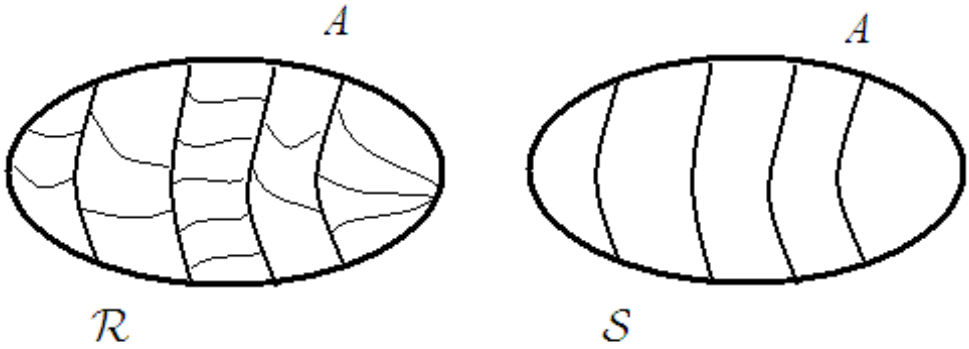


Figura 3. $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$ en A

Ahora bien, es inmediato que, en $\mathfrak{R}$,

$\approx$ es reflexiva, simétrica y transitiva, y que

$\preccurlyeq$ es reflexiva y transitiva, pero no antisimétrica.

Tomamos entonces el *cociente* $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}/\approx$ de $\mathfrak{R}$ sobre la relación $\approx$, esto es, cada elemento de $\mathfrak{R}$ es el conjunto de las relaciones de equivalencia que son equivalentes sobre A. Podemos entonces definir una relación sobre $\mathfrak{R}$, que seguimos denotando $\preccurlyeq$,

$\mathbf{R} \preccurlyeq \mathbf{S} \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{S}y)$, donde $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ son representantes de las clases $\mathbf{R}, \mathbf{S}$, respectivamente. Es inmediato que $\preccurlyeq$ está bien definida en $\mathfrak{R}$, y que, en realidad, $\preccurlyeq$ es un orden en $\mathfrak{R}$

Resumimos a continuación este resultado, para referencia posterior:

Proposition *Con las notaciones anteriores:*

1. $\approx$ *es una relación de equivalencia en* $\mathfrak{R}$
2. $\preccurlyeq$ *es un orden en* $\mathfrak{R}$

Necesitamos aún una definición de mayor finitud, para el caso de las particiones:

Definition *Sean A un conjunto, y sean* $\mathcal{P} = \{A_i\}_{i\in I}$ *y* $\mathcal{Q} = \{B_j\}_{j\in J}$ *particiones de A. Se dice que* $\mathcal{P}$ *es más fina que* $\mathcal{Q}$ *y se anota* $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$ *si y sólo si*

$(\forall i \in I)(\exists j \in J)(A_i \subseteq B_j)$

Remark *Es inmediato que, en la definición alternativa (2.3.1, definición 43), se tiene* $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$ *si y solo si* $(\forall E \in \mathcal{P})\left(\exists F \in \mathcal{Q}\right)(E \subseteq F)$

El teorema RE/P

El resultado principal de este Capítulo es el siguiente

Theorem *(Teorema RE/P). Sean A un conjunto,* $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_A$ *el conjunto de las relaciones de equivalencia definidas en A, y* $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_A$ *el conjunto de las particiones definidas en A. Entonces:*

a. *Toda relación de equivalencia* $\mathcal{R}$ *en A induce una partición* $\mathcal{P}_\mathcal{R}$ *en A.*

b. *Toda partición* $\mathcal{P}$ *en A define una relación de equivalencia* $\mathcal{R}_\mathcal{P}$ *en A*

c. *La correspondencia* $\psi : \mathfrak{R} \to \mathfrak{P}$ *definida por* $\mathcal{R} \mapsto \mathcal{P}_\mathcal{R}$ *es una función*

d. ψ *define una biyección* $\overline{\psi}$ *entre el conjunto* $\mathfrak{R}/\approx$ *de las clases de equivalencia de relaciones de equivalencia definidas en A, según la relación de equivalencia lógica.*

e. ψ *es un morfismo de orden*

f. $\overline{\psi}$ *es también un morfismo de orden.*

Proof Se tiene:

a. Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A, para cada $a \in A$, sea $\overline{a}_\mathcal{R} = \{x \in A : a\mathcal{R}x\}$, y consideremos la colección $\mathcal{P}_\mathcal{R} = \{\overline{a}_\mathcal{R} : a \in A\}$. Se tiene que $\mathcal{P}_\mathcal{R}$ es una partición de A :

i. La primera condición es inmediata: cada elemento a de A pertenece a la clase $\overline{a}_\mathcal{R}$.

ii. Ahora bien, para demostrar la segunda condición, supongamos primero que hay $x \in \overline{a}_\mathcal{R} \cap \overline{b}_\mathcal{R}$. Se tiene: $x\mathcal{R}a \wedge x\mathcal{R}b$; luego, $a\mathcal{R}x \wedge x\mathcal{R}b$, de manera que, si z es un elemento cualquiera de $\overline{a}_\mathcal{R}$, se tiene $z\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}x$; luego, $z\mathcal{R}x$; por lo tanto, de $z\mathcal{R}x \wedge x\mathcal{R}b$ sigue $z\mathcal{R}b$; es decir, $z \in \overline{b}_\mathcal{R}$; así, se tiene que $\overline{a}_\mathcal{R} \subset \overline{b}_\mathcal{R}$. Similarmente se prueba que $\overline{b}_\mathcal{R} \subset \overline{a}_\mathcal{R}$

b. Dada una partición $\mathcal{P}$ en A, basta definir en A la relación $a\mathcal{R}_\mathcal{P}b \Leftrightarrow (\exists E \in \mathcal{P})(a \in E \wedge b \in E)$, es decir, a y b son equivalentes si y

solo si pertenecen a un mismo elemento de la partición. Es inmediato que $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ es una relación de equivalencia.

c. Es inmediata: dada $\mathcal{R}$, para cada $a \in A$ el conjunto $\overline{a}_{\mathcal{R}}$ existe y es único, de manera que $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ es también una partición únicamente definida.

d. Que ψ es epiyectiva es inmediato por b.; sin embargo, ψ no es inyectiva, pues puede haber dos relaciones $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ que sean equivalentes en A y definan por tanto la misma partición. El pasaje al cociente $\mathfrak{R}/\approx$ da la inyectividad para la aplicación $\overline{\psi}$, la cual es evidentemente epiyectiva.

e. ψ es un morfismo de orden: En efecto, si $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$ entonces, para $a, x \in A$ cualesquier, se tiene que si $a\mathcal{R}x$ entonces $a\mathcal{S}x$, de modo que $\overline{a}_{\mathcal{R}} \subseteq \overline{a}_{\mathcal{S}}$

f. Es análoga a la anterior, cuidando de los representantes elegidos en las clases.

N. B.: Es conveniente observar que, dado un conjunto A determinado, la relación de equivalencia definida en b. puede ser reemplazada por otra que sea equivalente con ella en A.

Explicitamos ahora alguna terminología muy relevante para nuestro teorema central.

Definition *Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A, la partición que $\mathcal{R}$ define en A se llama cociente de A sobre $\mathcal{R}$ y se anota $A/\mathcal{R}$. Si $a \in A$, el elemento de $A/\mathcal{R}$ al que a pertenece se llama clase de equivalencia de a y se anota $\overline{a}_{\mathcal{R}}$, o bien, si no hay peligro de confusión, simplemente $\overline{a}$.*

Así (reiteramos para uso futuro), $\overline{a} = \overline{a}_{\mathcal{R}} = \{x \in A : a\mathcal{R}x\}$

Remark *Por consiguiente, se tiene $A/\mathcal{R} = \{\overline{a}_{\mathcal{R}} : a \in A\}$*

Probando lo necesario, se tiene además la siguiente

Remark *Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A, la correspondencia $\pi_{\mathcal{R}} = \pi : A \to A/\mathcal{R}$ definida por $\pi_{\mathcal{R}}(a) = \overline{a}_{\mathcal{R}}$ es una epiyección.*

Definition *La correspondencia $\pi_{\mathcal{R}}$ de arriba se llama proyección canónica o epiyección canónica de A en $A/\mathcal{R}$*

Remark *Es muy relevante para nuestro trabajo que la proposición anterior nos permite estudiar las relaciones de equivalencia ya sea en cuanto funciones proposicionales o bien desde la perspectiva de las particiones que ellas definen (lo que resulta aún más interesante cuando hay más de una en juego).*

El teorema y su hábitat

Examinamos aquí en detalle la matemática del teorema del isomorfismo para grupos, así como su contexto teórico.

Nos referimos primero algunos aspectos de la teoría de grupos, relevante para nuestro tema, y situamos allí el teorema.

Luego vemos otras teorías en las cuales nuestro teorema y los que le acompañan tienen análogos naturales y de cuya demostración ya tendríamos bastante avanzado.

En tercer lugar, hacemos una breve descripción del TIG en la amplia teoría de categorías, de manera de poder expresar bien su naturaleza abstracta en cuanto *elemento universal* en las distintas teorías en las cuales hay análogos suyos.

Caso de los grupos

Introducción

En esta sección, presentamos en detalle el teorema del isomorfismo para grupos y los

restantes teoremas que le acompañan (para los cuales usaremos, *mutatis mutandis*, las denominaciones tradicionales), si bien omitiremos alguna demostración que resulte, en principio, demasiado sencilla: nuestra preocupación aquí no es, directamente, la enseñanza, sino la veracidad –en el sentido de la demostración– del teorema y el contexto matemático en el cual se ubica.

Comenzaremos examinando la estructura de orden que forman los subgrupos de un grupo dado, de manera que nuestros teoremas se puedan situar correctamente.

Luego, repasaremos las funciones que interesan en la teoría de grupos, esto es, sus morfismos.

Veremos a continuación los subgrupos normales: qué son, cuáles son sus propiedades, para qué se los define; teniéndolos a nuestra disposición, podremos hablar de particiones de grupos que son, a su vez, grupos, esto es, de los grupos cocientes.

Con tal puesta en escena, demostraremos nuestro resultado central: el teorema del isomorfismo para grupos.

Por otra parte y en atención a que una correcta lectura de este teorema requiere de situarlo en el concierto de los importantes teoremas de morfismos para grupos, detallamos a continuación los más relevantes entre estos; procurando hacerlo de una manera más eficiente que la habitual, tanto en lo puramente matemático como (es nuestra –un tanto arriesgada– apuesta a futuro) en lo cognitivo, basando su tratamiento en un teorema de suficiente generalidad, la buena definición de cuyo morfismo desata el nudo de las restantes demostraciones.

Asumimos como conocidos los conceptos de grupo y de subgrupo, en sus diferentes expresiones equivalentes.

Notation *En lo que sigue y salvo aviso en contrario, G, G' son grupos multiplicativos de neutros e, e', respectivamente.*

Generadores

Proposition *Sea $\mathcal{H}$ una colección de subgrupos de G. Entonces, $\cap\mathcal{H} \leq G$*

Definition *Sean $X \subseteq G, \mathcal{H}_X = \{H : H \leq G, H \supseteq X\}$. Entonces*

1. *$\cap\mathcal{H}_X$ se llama subgrupo generado por X (en G), y se denota $\langle X\rangle$.*
2. *En tal caso, se dice que X es un conjunto generador de $\langle X\rangle$.*

Remark *Es claro que $\langle X\rangle$ es el menor subgrupo de G que contiene a X, en el sentido de que $(H \leq G) \wedge (H \supseteq X) \Rightarrow \langle X\rangle \leq H$.*

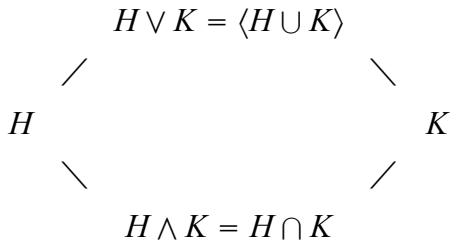
Proposition *Con las notaciones anteriores:*

1. *$\leq$ es una relación de orden parcial en E;*
2. *más aún, $\leq$ es un orden filtrante en E*

Proof Se tiene:

1. Es inmediato.
2. Sean H, K en E. Entonces:
   - **a**. $H \cap K \leq G$ y, entonces $\inf\{H, K\} = H \wedge K = H \cap K$ (esto es, es el candidato natural, y está en E).
   - **b**. Ahora bien y como se sabe, si $H, K \leq G$, no necesariamente se tiene que $H \cup K \leq G$. Sin embargo, podemos tomar el grupo $\langle H \cup K\rangle$, generado por $H \cup K$. Es claro, también, que $\langle H \cup K\rangle = \max\{H, K\} = H \vee K$.

Se tiene entonces el siguiente *diagrama de Hasse* de subgrupos de G:



Por supuesto, si G es abeliano, es claro que $H \vee K = HK$ –si bien la condición no es necesaria–.

Morfismos

Para fijar ideas y referencia inmediata, escribimos aquí algunos resultados y terminología que necesitaremos.

Definition *Sea $f : G \to G'$ una aplicación. Se dice que f es un morfismo (de grupos) si y solo si, para $a, b \in G$ cualesquiera, se tiene $f(ab) = f(a)f(b)$.*

Notation *Anotamos $\mathfrak{mor}(G, G')$ al conjunto de los morfismos de G en G'.*

El conjunto $\mathfrak{mor}(G, G')$ es siempre no vacío: pertenece a él, al menos, el morfismo trivial $f : G \to G', a \mapsto e'$

Proposition *Sea $f : G \to G'$ un morfismo, sean $H \leq G; H' \leq G'$. Entonces*

1. *$f(H) \leq G'$; En particular $f(G) = \mathrm{Im}(f) \leq G'$*
2. *$f^{-1}(H') \leq G$; En particular, $f^{-1}(\{e'\}) \leq G$*

Definition *Sea $f : G \to G'$ un morfismo. Entonces, $\mathcal{N}(f) =: f^{-1}(\{e'\})$ se llama núcleo (o kernel) de f.*

Definition *Sea $f : G \to G'$ un morfismo.*

1. *Se dice que f es un endomorfismo si y solo si $G = G'$; monomorfismo o inmersión si y solo si f es inyectiva; epimorfismo o proyección si y solo si f es epiyectiva; isomorfismo si y solo si f es biyectiva, y automorfismo si $G = G'$ y f es biyectiva.*
2. *Si hay un isomorfismo de G a G', se dice que G es isomorfo a G' y se anota $G \simeq G'$*

Proposition *Dado un conjunto de grupos $\mathcal{G}$, la relación "$\simeq$" es una relación de equivalencia en $\mathcal{G}$.*

Proof En efecto: la identidad es un isomorfismo; por otra parte, si f es un isomorfismo, entonces su inversa f^{-1} es un isomorfismo; y, si f, g son isomorfismos, entonces $g \circ f$ es un isomorfismo.

En la siguiente proposición, se ha escrito la segunda parte solo por simetría.

Proposition *Sea $f : G \to G'$ un morfismo. Entonces,*

1. *f es monomorfismo si y solo si $\mathcal{N}(f) = \{e\}$*
2. *f es epimorfismo si y solo si $\mathrm{Im} f = G'$.*

Proof Demostramos solo la primera afirmación. Sean $a, b \in G$

$\Rightarrow$: Suponemos $a \in \mathcal{N}(f)$; entonces, $f(a) = e'$; luego, $f(a) = f(e)$ y por tanto $a = e$

$\Leftarrow$: Suponemos $f(a) = f(b)$; entonces, $f(a)(f(b))^{-1} = e'$, esto es, $f(ab^{-1}) = e'$; o sea, $ab^{-1} \in \mathcal{N}(f)$

luego, $ab^{-1} = e$, esto es, $a = b$

Proposition *Si G'' es un grupo, se tiene*

1. *Si* $f \in \mathrm{mor}(G, G')$, $g \in \mathrm{mor}(G', G'')$, *entonces* $g \circ f \in \mathrm{mor}(G, G'')$

2. *Si* $f : G \to G'$ *es un isomorfismo, entonces* f^{-1} *es un isomorfismo.*

Definition *El automorfismo* $\iota_a : G \to G$ *definido por* $x \mapsto axa^{-1}$ *se llama automorfismo interior inducido por* a*, o conjugación;* axa^{-1} *se llama un conjugado de* x.

Relación de equivalencia inducida por un subgrupo

Asumimos aquí como un hecho conocido que, si G es un conjunto y $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en G, $\mathcal{R}$ define una partición $G/\mathcal{R}$ en G, cuyos elementos se escriben $\overline{a}_{\mathcal{R}} = \overline{a} = \{x \in G : a\mathcal{R}x\}$; es decir, $G/\mathcal{R} = \{\overline{a} : \overline{a} \in G\}$. Aceptamos, además, que la aplicación $\pi_{\mathcal{R}} : G \to G/\mathcal{R}$ definida por $a \mapsto \overline{a}_{\mathcal{R}}$ es una epiyección, llamada *proyección natural* o *epiyección canónica* (o alguna otra combinación razonable).

Nuestro propósito es ahora el reiterar la situación anterior para la teoría de grupos. Con mayor precisión: queremos comenzar con un grupo G y definir una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en G de modo que $G/\mathcal{R}$ sea también un grupo, y que la proyección $\pi_{\mathcal{R}}$ sea un morfismo de grupos.

No será, entonces, en modo alguno una sorpresa el hecho de que sea necesario que $\mathcal{R}$ esté definida a partir de un subgrupo de G. En cualquier caso, esta condición no será suficiente y deberemos agregar otra si queremos obtener el resultado que buscamos –y, que, en último término, aún no hemos enunciado–.

Caso de un subgrupo cualquiera

Sea $H \leq G$

Dos relaciones

H induce (al menos) dos relaciones en G :

una *relación derecha* $\mathcal{R}_{H,d} = \mathcal{R}_d$, definida por $a\mathcal{R}_d b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$, y también

una *relación izquierda* $\mathcal{R}_{H,i} = \mathcal{R}_i$, definida por $a\mathcal{R}_i b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$

Son equivalencias

Es fácil ver que ambas son relaciones de equivalencia.

Para el caso de la relación derecha $\mathcal{R}_d$, se tiene:

Sean $a, b, c \in G$ cualesquiera. Entonces:

$a\mathcal{R}_d a \Leftrightarrow aa^{-1} = e \in H$;

$a\mathcal{R}_d b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \Rightarrow (ab^{-1})^{-1} \in H \Leftrightarrow ba^{-1} \in H \Leftrightarrow b\mathcal{R}_d a$, y

$a\mathcal{R}_d b \wedge b\mathcal{R}_d c \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \wedge bc^{-1} \in H \Rightarrow (ab^{-1})(bc^{-1}) \in H \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ac^{-1} \in H \Rightarrow a\mathcal{R}_d c$

Algo enteramente análogo ocurre con $\mathcal{R}_i$

Las clases

Las clases de equivalencia son:

$\overline{a}_{\mathcal{R}_d} = \overline{a}_d = \{x \in G : x\mathcal{R}_d a\} = \{x \in G : xa^{-1} = h \in H\} =$

$= \{x \in G : x = ha, h \in H\} = \{ha : h \in H\} = H\{a\} =: Ha$;

las llamamos *coclases derechas* (o, mejor, *coclases a la derecha*);

Similarmente, las *coclases izquierdas* (o *coclases a la izquierda*) son $\overline{a}_{\mathcal{R}_i} =: aH$

El cociente

Por tanto, los *cocientes*, es decir, las particiones correspondientes, son, respectivamente,

$G/\mathcal{R}_d = H\backslash G = \{Ha : a \in G\}$ y

$G/\mathcal{R}_i = G/H = \{aH : a \in G\}$

Proyecciones naturales

Las siguientes aplicaciones son epiyecciones:

$\pi_d : G \to H\backslash G; a \mapsto \overline{a}_{H_d} = Ha$;

$\pi_i : G \to G/H; a \mapsto \overline{a}_{H_i} = aH$.

Clases de un mismo cardinal

Se observará que, por oposición a otras particiones que se podría hacer sobre el

conjunto G, las definidas por sus subgrupos tienen una característica especial, por cuanto es inmediato ver que todas las clases tienen un mismo cardinal:

En efecto, para $a, b \in G$ cualesquier, las correspondencias

$aH \ni ah \mapsto (ba^{-1})ah \in bH$ y

$aH \ni ah \mapsto (ah)h^{-1} \mapsto h((ah)h^{-1}) \in Ha$

son, naturalmente, biyecciones.

Subgrupos normales

Presentación

Definition *Sea $N \leq G$. Se dice que N es un subgrupo normal (o invariante, o distinguido) de G y se anota $N \trianglelefteq G$ si y solo si* $(\forall a \in G)(aN = Na)$

La proposición siguiente y la observación que la continúa contienen formas equivalentes de expresar la definición, para uso futuro. Su demostración es inmediata.

Proposition *Sea $N \leq G$. Entonces, son equivalentes:*

1. $N \trianglelefteq G$
2. $(\forall a \in G)\ (a^{-1}Na = N)$
3. $(\forall a \in G)\ (a^{-1}Na \subseteq N)$
4. $(\forall n \in N)(\forall a \in G)(a^{-1}na \in N)$

Conviene tener presente que:

– la propiedad 2. de la proposición puede también expresarse diciendo que N es invariante (o estable) bajo conjugación, es decir, que N es invariante bajo los automorfismos interiores;

– de manera análoga, la propiedad 4. indica que, si $n \in N$, entonces todos los conjugados de n están en N; este enunciado es el que comúnmente se utiliza para demostrar que un subgrupo es normal;

– por supuesto, puede cambiarse $a^{-1}na$ por ana^{-1}, etc..

Primeras propiedades

Comenzamos declarando algunas propiedades muy elementales y de demostración inmediata.

Proposition *Sean $N \trianglelefteq G, a \in G$. Entonces $aN = N$ si y solo si $a \in N$.*

Proposition *Sea $f : G \to G'$ un morfismo. Entonces*

1. *Si $N \trianglelefteq G$, entonces $f(G) = \mathrm{Im}(f) \trianglelefteq f(G)$*
2. *Si $N' \trianglelefteq G'$, entonces $f^{-1}(N') \trianglelefteq G$; en particular, $\mathcal{N}(f) \trianglelefteq G$*

Proposition *Sean $H \leq G, N \trianglelefteq G$ entonces*

1. $HN \leq G$
2. $HN = H \vee N = \sup\{H, N\}$
3. $N \trianglelefteq HN$
4. *si $H \trianglelefteq G$, entonces $HN \trianglelefteq G$*

Proposition *Si $\{N_i\}_{i \in I}$ es una familia de subgrupos de G tal que, para cada $i \in I, N_i \trianglelefteq G$, entonces $\bigcap_{i \in I} N_i \trianglelefteq G$*

Remark *Si $\mathfrak{N}$ es el conjunto de los subgrupos normales de G, entonces la relación $\trianglelefteq$ en $\mathfrak{N}$ es una relación reflexiva y antisimétrica, pero no transitiva.*

Cocientes

Nos proponemos averiguar qué condiciones debe cumplir H para que $G/\mathcal{R}_d$ y $G/\mathcal{R}_i$ sean, efectivamente, grupos (y que las correspondientes proyecciones sean morfismos). Se

trata, en realidad, de una sola condición –por lo demás y como se verá, ella relaciona (o conecta, si prefiere) ambas relaciones, $\mathcal{R}_d$ y $\mathcal{R}_i$–.

Tal condición es que H sea un subgrupo normal de G; aun más, la razón principal que hemos tenido para introducir subgrupos normales es, precisamente, obtener los resultados que nos preocupan aquí..

Para enfatizar, llamaremos N a nuestro subgrupo, pero seguiremos anotando $\mathcal{R}_d$ por $\mathcal{R}_{N,d}$ y $\mathcal{R}_i$ por $\mathcal{R}_{N,i}$

El subgrupo es normal

Sea, entonces, $N \trianglelefteq G$.

Las relaciones son las mismas

Hemos definido en G : $a\mathcal{R}_d b \Leftrightarrow ab^{-1} \in N; a\mathcal{R}_i b \Leftrightarrow a^{-1}b \in N$.

Las clases para $\mathcal{R}_d$ son $\overline{a}_d = Na$, y las clases para $\mathcal{R}_i$ son $\overline{a}_i = aN$.

Además, que $N \trianglelefteq G$ significa precisamente que, para cada $a \in G$, $aN = Na$.

Es claro entonces que la relación $\mathcal{R}_d$ es "la misma" que $\mathcal{R}_i$, o, más propiamente, $\mathcal{R}_{N,d}$ y $\mathcal{R}_{N,i}$ son equivalentes.

Las clases

En lugar de $a\mathcal{R}_d b$ o $a\mathcal{R}_i b$, vamos a anotar $a\mathcal{R}_N b$, o, simplemente, $a \sim b$.

Entonces, una clase para $\mathcal{R}_N$ es

$\overline{a}_N = \overline{a} = aN = Na$.

El cociente

El cociente es ahora

$G/N = G/\mathcal{R}_N = \{aN : a \in G\} = \{\overline{a} : a \in G\}$.

Compatibilidad

Ahora bien, si $a, a', b, b' \in G$ y $a \sim a', b \sim b'$, entonces se tiene sucesivamente:

$a(a')^{-1} \in N, b(b')^{-1} \in N$, digamos $a(a')^{-1} = n_1, b(b')^{-1} = n_2$,

de modo que

$(ab)(a'b')^{-1} = ab(b')^{-1}(a')^{-1} = an_2(a')^{-1} = (n_2)'a(a')^{-1} = (n_2)'n_1 \in N$,

así, $ab \sim a'b'$; es decir,

$(a \sim a' \wedge b \sim b' \Rightarrow ab \sim a'b')$.

En otras palabras, $\left(\overline{a} = \overline{a'} \wedge \overline{b} = \overline{b'} \Rightarrow \overline{ab} = \overline{a'b'}\right)$

Operación en el cociente

Lo anterior permite definir bien una operación en G/N :

$\overline{a}\,\overline{b} = \overline{ab}$, es decir, $(aN)(bN) = (ab)N$, o aun $aNbN = abN$:

en efecto y como acaba de expresarse,

si se tiene $\overline{a} = \overline{a'}$ y $\overline{b} = \overline{b'}$ entonces $\overline{ab} = \overline{a'b'}$;

en otras palabras, la operación en G/N está bien definida pues no depende del representante elegido en cada clase.

El hecho de que nuestra relación de equivalencia $\mathcal{R}_N$ permita definir una operación en el cociente G/N se expresa diciendo que $\mathcal{R}_N$ *es compatible con la operación de* G.

Otro argumento

Podríamos haber intentado un argumento más directo:

Sabemos que, para cada $a \in G$, se tiene $aN = Na$, y definimos

$(aN)(bN) =: (ab)N = abN$

Para probar que la operación está bien definida, tomamos $aN = a'N$ y $bN = b'N$, y queremos ver que $abN = a'b'N$, pero no podemos hacer $(a'N)(b'N) = (aN)(bN) = (ab)N$, (*petitio principii*); un argumento que parece mejor es hacer uso reiterado de la asociatividad y de la propiedad de N como subgrupo normal. Exagerando ligeramente con los paréntesis:

$(a'b')N = a'(b'N) = a'(Nb') = (a'N)b' = (aN)b' = a(Nb') = a(b'N) = a(bN) = (ab)$

El cociente es un grupo

Ahora es fácil probar que G/N es un grupo.

Se observará que la única cuestión delicada es probar que la operación en G/N está bien definida, y lo demás es un ejercicio de rutina:

Tenemos, entonces, ya una operación bien definida en G

Ahora bien, sean a, b, c cualesquiera en G. Entonces:

$\overline{a}\left(\overline{b}\,\overline{c}\right) = \overline{a}\,\overline{bc} = \overline{a(bc)} = \overline{(ab)c} = \overline{ab}\,\overline{c} = \left(\overline{a}\,\overline{b}\right)\overline{c}$;

$\overline{a}\,\overline{e} = \overline{ae} = \overline{a}$, de modo que $\overline{e}$ es el neutro de G/N;

$\overline{a}\,\overline{a^{-1}} = \overline{aa^{-1}} = \overline{e}$, y por tanto $\overline{a^{-1}}$ es el inverso de $\overline{a}$, es decir, $(\overline{a})^{-1} = \overline{a^{-1}}$.

(Además, es inmediato que, si G es abeliano, entonces G/N es también abeliano).

La proyección es un morfismo

La proyección natural $\pi : G \to G/N$ definida por $a \mapsto \overline{a}$ es un epimorfismo. En efecto, π es, como de costumbre, epiyectiva; y, si a, b son cualesquiera en G, entonces se tiene que $\pi(ab) = \overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b} = \pi(a)\pi(b)$

Cocientes y normalidad

Definition *Sea $N \trianglelefteq G$. Entonces:*

1. *G/N se llama grupo cociente de G sobre N, o de G módulo N*
2. *Si $a\mathcal{R}_N b$ se dice también que a es congruente con b módulo N, y se escribe $a \equiv b (\mathrm{mod}\, N)$*

Normalidad et al.

Esta sección explora la conexión (o relación) entre *relaciones de equivalencia compatibles con la operación* de G, *subgrupos normales* y *morfismos*.

Denotamos $\mathfrak{R}_G$ al conjunto de relaciones de equivalencia definidas sobre G compatibles con la operación de G y $\widehat{\mathfrak{R}_G}$ al cociente de $\mathfrak{R}_G$ sobre la relación de equivalencia definida por $\mathcal{R} \approx \mathcal{S}$ si y solo si $\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{S}$.

Comenzamos ampliando nuestra última proposición.

Relaciones y subgrupos

Proposition *Sea G un grupo.*

1. *(De relaciones a subgrupos normales). Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida en G, sea $a \in G$ y anotemos $\overline{a}_{\mathcal{R}}$ la clase de a según $\mathcal{R}$. Entonces, si $\mathcal{R}$ es compatible con las operaciones de G, se tiene que $N = N_{\mathcal{R}} =: \overline{e}_{\mathcal{R}} \trianglelefteq G$, y, además, $a\mathcal{R}b$ si y solo si $a^{-1}b \in N$ (si y solo si $ab^{-1} \in N$).*
2. *(De subgrupos normales a relaciones). Recíprocamente, si $N \trianglelefteq G$, entonces la relación $\mathcal{R}_N$ definida en G por $a\mathcal{R}_N b$ si y solo si $a^{-1}b \in N$, es compatible con las operaciones de G*
3. *(Correspondencia biunívoca). Más aún, $\mathcal{R} \mapsto N_{\mathcal{R}}$ es una biyección de $\widehat{\mathfrak{R}_G}$ sobre el conjunto de los subgrupos normales de G; su inversa es $N \mapsto \mathcal{R}_N$.*

Proof Se tiene:

1. Si $a, b \in N = N_{\mathcal{R}}$, entonces $a\mathcal{R}e, b\mathcal{R}e$ y por tanto $ab\mathcal{R}ee$, es decir, $ab\mathcal{R}e$ y por tanto $ab \in N$.

   Por la reflexividad de $\mathcal{R}$, se tiene que $e \in N$.

   Ahora bien, dado $a \in N$, se tienen $a\mathcal{R}e$, por tanto $aa^{-1}\mathcal{R}a^{-1}$, de modo que $e\mathcal{R}a^{-1}$, luego $a^{-1}\mathcal{R}e$ y entonces $a^{-1} \in N$.

   Por otra parte, si $a \in N, g \in G$, entonces $a\mathcal{R}e$ y por tanto $g^{-1}a\mathcal{R}g^{-1}e$, luego, $g^{-1}ag\mathcal{R}g^{-1}eg$, es decir, $g^{-1}ag\mathcal{R}e$, de modo que $g^{-1}ag \in N$.
2. Ya lo hicimos
3. Es, en realidad, inmediata, a partir de las dos primeras afirmaciones. (La

función está bien definida).

Subgrupos y morfismos.

Una relación más evidente es la que hay entre morfismos y subgrupos normales. (Usamos el formato de proposición solo para evidenciar la analogía con el caso anterior

Proposition *Sea G un grupo. Entonces,*

1. *(De morfismos a subgrupos normales). Si $f : G \to G'$ es un morfismo, entonces $\mathcal{N}(f) \trianglelefteq G$*
2. *(De subgrupos normales a morfismos). Recíprocamente, si $N \trianglelefteq G$, entonces la aplicación $\pi_N : G \to G/N, a \mapsto \overline{a}_N$ es un morfismo.*
3. *Más aún, $f \mapsto \mathcal{N}(f)$es una biyección del conjunto de morfismos cuya fuente es G sobre el conjunto de los subgrupos normales de G; su inversa es $N \mapsto \pi_N$.*

Comentario

Sea G un grupo, y sean
$\mathfrak{N}_G = \mathfrak{N}$ el conjunto de los subgrupos normales de G;
$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_G$ y $\widehat{\mathfrak{R}} = \widehat{\mathfrak{R}_G}$ según definimos arriba; y
$\mathfrak{H}_G = \mathfrak{H}$ el conjunto de morfismos cuyo dominio es G.
Estos conjuntos están ordenados:
El orden en $\mathfrak{N}$ es el de *ser subgrupo de*: $N \leq N'$
el de $\mathfrak{R}$ "es" el de *ser más fina que*: $R \preccurlyeq S \Leftrightarrow (\forall a \in G)(\forall b \in G)(aRb \Rightarrow aSb)$
el de $\mathfrak{H}$ es el de *dominar a*: $f \preceq g \Leftrightarrow \mathcal{N}(f) \leq \mathcal{N}(g)$

1. (*Correspondencias biunívocas).* Sigue de las proposiciones anteriores que hay biyecciones para cada pareja de conjuntos tomados entre $\mathfrak{N}, \widehat{\mathfrak{R}}$ y $\mathfrak{H}$.
2. (*Preservación del orden).* Por otra parte, es fácil ver que tales correspondencias preservan el orden (es decir, son *crecientes*, o, como también se dice, son morfismos de orden), en el sentido de que: $N \leq N' \iff \pi_N \preceq \pi_{N'}$, etc.
3. (*Un mismo objeto)* Todo lo cual hace creíble la especie (un tanto herética) de que, al fin y al cabo, hablar de relaciones de equivalencia compatibles con la operación de G, morfismos de dominio G y subgrupos normales de G es, al fin y al cabo, referirse a una sola y la misma cosa.

Teorema del isomorfismo

Escribimos ahora en detalle el teorema que es el centro de nuestra preocupación.

Theorem *Sean G, G' grupos, y sea $f : G \to G'$ un morfismo de núcleo $N = \mathcal{N}(f)$ e imagen* $\mathrm{Im}(f)$. *Entonces,* $G/\mathcal{N}(f) \simeq \mathrm{Im}(f)$.

Proof Dado que $\mathcal{N}(f) \trianglelefteq G$, se tiene que $G/\mathcal{N}(f)$ es un grupo. Definimos $\overline{f} : G/\mathcal{N}(f) \to G'$ por $\overline{f}(aN) = f(a)$, es decir, $\overline{f}(\overline{a}) = f(a)$.
Entonces:

- **a**. $\overline{f}$ está bien definida: en efecto, si $a \sim a'$, entonces $a(a')^{-1} \in \mathcal{N}(f)$; por tanto, $e' = f\left(a(a')^{-1}\right) = f(a)f\left((a')^{-1}\right) = f(a)(f(a'))^{-1}$, de manera que se tiene $f(a) = f(a')$ y entonces f no depende de la elección del representante de la clase $\overline{a}$ (o de la clase $\overline{a'}$)
- **b**. $\overline{f}$ es un morfismo: $\overline{f}\left(\overline{a}\,\overline{b}\right) = \overline{f}(\overline{ab}) = f(ab) = f(a)f(b) = \overline{f}(\overline{a})\overline{f}\left(\overline{b}\right)$
- **c**. $\overline{f}$ es inyectiva: si $\overline{f}(\overline{a}) = \overline{f}\left(\overline{b}\right)$, entonces $f(a) = f(b)$, luego, $f(ab^{-1}) = e'$, por tanto, $ab^{-1} \in \mathcal{N}(f)$, de modo que $\overline{a} = \overline{b}$. Alternativamente, $\mathcal{N}\left(\overline{f}\right) = \mathcal{N}(f)$.
- **d**. $\overline{f}$ es un isomorfismo sobre $\mathrm{Im}(f)$: sigue de inmediato de c.

Teorema fundamental del morfismo

Si se examina el teorema anterior, se notará que, desde un punto de vista puramente matemático, lo importante es la buena definición de la función de fuente $G/\mathcal{N}(f)$. Por otra parte y de acuerdo a la experiencia, desde una perspectiva cognitiva, es ese también el punto de mayor dificultad en el aprendizaje; ya lo habíamos anunciado.

De manera análoga, en los restantes teoremas de morfismo para grupos, la buena definición de los morfismos correspondientes es a la vez lo más relevante y lo que ofrece mayor dificultad.

El teorema que presentamos aquí permite despejar esta cuestión, de tal manera que las demostraciones de los otros teoremas tradicionales de morfismos de grupos pueden apoyarse en una función ya bien definida, según veremos a continuación.

El teorema

Theorem *(Teorema fundamental del morfismo, TFM). Sea $N \trianglelefteq G$, y sea $\pi = \pi_N$ el epimorfismo canónico de G en G/N. Entonces, para cada grupo G' y para cada morfismo $f : G \to G'$ tal que $\mathcal{N}(f) \supseteq N$, hay un único morfismo $\overline{f} : G/N \to G'$ tal que $f = \overline{f} \circ \pi$*

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ G & \to & G' \\ \pi_N & \searrow & \uparrow \overline{f} \\ & & G/N \end{array}$$

Proof Sean $a, b \in G$ cualesquiera. Definimos $\overline{f}(aN) = f(a)$. Se tiene entonces que:

$\overline{f}$ está bien definida: si $aN = bN$, entonces $ab^{-1} \in N$; luego, $ab^{-1} \in \mathcal{N}(f)$, de donde $f(ab^{-1}) = e$, es decir, $f(a)f(b^{-1}) = e$; equivalentemente, $f(a) = f(b)$;

$\overline{f}$ es un morfismo: $\overline{f}((aN)(bN)) = \overline{f}(abN) = f(ab) = f(a)f(b) = \overline{f}(aN)\overline{f}(bN)$;

$\overline{f}$ factoriza a f : si $a \in G$, entonces $\left(\overline{f} \circ \pi\right)(a) = \overline{f}\,(\pi(a)) = \overline{f}\,(aN) = f(a)$, esto es, $\overline{f} \circ \pi = f$;

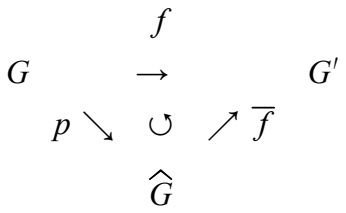
$\overline{f}$ es única: si g es otro morfismo que cumple las condiciones del teorema, se tiene $g\,(aN) = (g \circ \pi)(a) = f(a) = \left(\overline{f} \circ \pi\right)(a) = \overline{f}\,(\pi(a)) = \overline{f}\,(aN)$, de modo que $g = \overline{f}$

Alternativa

Se puede dar una presentación más formal y un resultado más preciso, que será oportuno más adelante:

Definition *Dado $N \trianglelefteq G$, se llama grupo cociente de G por N a todo par $(\widehat{G}, p)$, donde:*

1. *G es un grupo, p es un morfismo de G en $\widehat{G}$*
2. *$N \subseteq \mathcal{N}(p)$*
3. *Para cada grupo G' y para cada morfismo $f : G \to G'$ tal que $N \subseteq \mathcal{N}(f)$, existe un único morfismo $\overline{f} : \widehat{G} \to G'$ tal que $f = \overline{f} \circ p$, esto es, el siguiente diagrama es conmutativo*

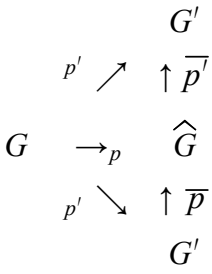


Proposition *Sea $N \trianglelefteq G$. Entonces:*

1. *Existe un grupo cociente $(\widehat{G}, p)$ de G por N*
2. *Si (G', p') es otro grupo cociente de G por N, existe un único isomorfismo $q : \widehat{G} \to G'$ tal que $p' = q \circ p$*

Proof Se tiene:

1. $(G/N, \pi)$ es grupo cociente, donde $\pi : G \to G/N$ es el epimorfismo natural $a \mapsto aN = \overline{a}$. Se define $\overline{f} : G/N \to G'; aN \mapsto f(a)$. Entonces,
   $\overline{f}$ está bien definida: si $aN = bN$, entonces $b^{-1}a \in N$ y por tanto $b^{-1}a \in \mathcal{N}(f)$, luego, $f(b^{-1}a) = e$, por tanto, $f(a) = f(b)$;
   $\overline{f}$ es un morfismo: $\overline{f}(aNbN) = \overline{f}(abN) = f(ab) = f(a)f(b) = \overline{f}(aN)\overline{f}(bN)$
2. Ahora bien, si (G', p') es otro cociente de G por N, tenemos sucesivamente (ver diagrama a continuación):
   $p' = \overline{p'} \circ p; p = \overline{p} \circ p'$;
   luego, $p' = \left(\overline{p'} \circ \overline{p}\right) \circ p' = id_{\widehat{G}} \circ p'$;
   entonces, por la unicidad, se tiene $\overline{p'} \circ \overline{p} = id_{G'}$.
   Análogamente, $\overline{p} \circ \overline{p'} = id_{\widehat{G}}$
   Así, $\overline{p'}$ es el isomorfismo q del enunciado.



Corollary *Si $\left(\widehat{G}, p\right)$ es un grupo cociente de G sobre N, entonces p es un epimorfismo de núcleo N.*

Teoremas de morfismo

Del Teorema fundamental del morfismo sigue la siguiente colección de importantes resultados:

Corollary *Sean $N \trianglelefteq G$, $\pi : G \to G/N$, $f : G \to G'$ y $\overline{f} : G/N \to G'$ de acuerdo al TFM. Entonces:*

1. *(Imagen)* $\mathrm{Im}\left(\overline{f}\right) = \mathrm{Im}(f)$; *y, si f es un epimorfismo, entonces $\overline{f}$ es un epimorfismo*
2. *(Núcleo).* $\mathcal{N}\left(\overline{f}\right) = \mathcal{N}(f)/N$; *y, si* $\mathcal{N}\left(\overline{f}\right) = N$, *entonces $\overline{f}$ es monomorfismo*
3. *Si f es un epimorfismo de núcleo N, entonces $\overline{f}$ es un isomorfismo*

4. *En todo caso, (teorema fundamental de isomorfismo),*

$$G/\mathcal{N}(f) \simeq \mathrm{Im} f$$

Proof Usando la terminología del enunciado:

1. Ambas afirmaciones son inmediatas, ya que π es una epiyección.
2. Se tiene $N \subseteq \mathcal{N}(f)$ y por tanto $N \trianglelefteq \mathcal{N}(f)$. Luego, $\mathcal{N}(f)/N$ es un grupo y $\mathcal{N}(f)/N \leq G/N$
   Ahora bien, $aN \in \mathcal{N}(f) \Leftrightarrow \bar{f}(aN) = e \Leftrightarrow f(a) = e \Leftrightarrow a \in \mathcal{N}(f) \Leftrightarrow aN \in \mathcal{N}(f)/N \Leftrightarrow \mathcal{N}\left(\overline{f}\right) = \mathcal{N}(f)/N$

Corollary *Todo morfismo $f : G \to G'$ puede factorizarse $f = \iota \circ \overline{f} \circ \pi$, donde π es un epimorfismo, $\overline{f}$ es un isomorfismo y ι es un monomorfismo.*

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ G & \to & G' \\ \pi \downarrow & \circlearrowleft & \uparrow \iota \\ G/\mathcal{N}(f) & \to & \mathrm{Im}(f) \\ & \overline{f} & \end{array}$$

Corollary *(Primer teorema del isomorfismo)*

Sean $N_1, N_2 \trianglelefteq G, N_1 \subseteq N_2$; sean $\pi_i : G \to .G/N_i, (i = 1,2)$. Entonces,

1. *Hay un único epimorfismo $\overline{\pi_2} : G/N_1 \to G/N_2$ tal que $\overline{\pi_2} \circ \pi_1 = \pi_2$*

2. *Se tiene*

$$(G/N_1)/(N_2/N_1) \simeq G/N_2$$

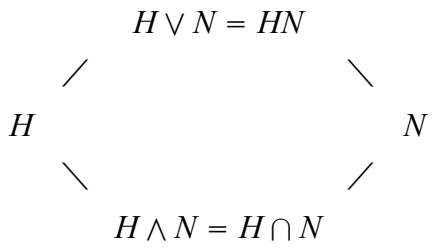
Proof Inmediata, de acuerdo al TFM.
(Alternativa: definir directamente $f : G/N_1 \to G/N_2$ por $f(aN_1) = aN_2$; probar luego que f está bien definida, que es un morfismo epiyectivo y encontrar su núcleo).

Corollary *(Segundo teorema del isomorfismo)*

Sean $H \leq G, N \trianglelefteq G, \pi : G \to G/N$ el epimorfismo canónico. Entonces:

1. $\mathcal{N}(\pi|_{HN}) = N; \mathcal{N}(\pi|_H) = N \cap H$

2. *Además, $HN/N \simeq H/H \cap N$*



Proof Las primeras afirmaciones son inmediatas.
Para 2.tomamos $\pi|_H : H \to HN/N$ y el epimorfismo canónico $p : H \to H/H \cap N$. Es obvio que $N(\pi|_H) = H \cap N$, de modo que, según el teorema fundamental, hay un monomorfismo $\overline{p} : H/H \cap N \to HN/N$, $\overline{p}$ es epiyectivo.

Corollary *(Pasaje al cociente).*

Sean $N \trianglelefteq G; N' \trianglelefteq G', f : G \to G'$ un morfismo tal que $f(N) \subseteq N'$. Entonces, hay un único morfismo $\overline{f} : G/N \to G'/N'$ tal que $\pi' \circ \overline{f} \circ \pi = f$

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ G & \to & G' \\ \pi \downarrow & \circlearrowleft & \uparrow \pi' \\ G/N & \to & G'/N' \\ & \overline{f} & \end{array}$$

Proposition *(Teorema de la correspondencia)*

Sea $f : G \to G'$, epimorfismo y sea $K = \mathcal{N}(f)$. Entonces,

1. *hay una correspondencia biunívoca entre los grupos $H' \leq G'$ y los subgrupos $H \leq G$ tales que $K \subseteq H$, dada por $H = f^{-1}(H')$*
2. *esta biyección es compatible con la inclusión, es decir, $H'_1 \subseteq H'_2$ si y solo si $f^{-1}(H'_1) \subseteq f^{-1}(H'_2)$; en otras palabras, es un isomorfismo de orden.*

Proof Se tiene:

1. La función está, claramente, bien definida.
   Si $H' \trianglelefteq G'$, entonces $H \trianglelefteq G$.
   Sea $K \subseteq H \trianglelefteq G$, entonces, $H' =: f(H) \trianglelefteq G'$. Se tiene entonces: si $a \in f^{-1}(H')$, entonces, $f(a) \in f(H)$, es decir, hay $h \in H$ tal que $f(a) = f(h)$. Luego, $f(ah^{-1}) = f(e) = e'$, entonces, $ah^{-1} \in \mathcal{N}(f)$, de modo que $a \in hK \subseteq H$.
   Por otra parte, si $H \trianglelefteq G$, sea $H' = f(H) \leq G'$. Ahora bien, si $a' \in G'$, sea a tal que $f(a) = a'$; entonces, como $aH = Ha$, se tiene $f(a)f(H) = f(H)f(a)$, es decir, $a'H' = H'a'$. Por lo tanto $H' \trianglelefteq G'$
2. *Pasamos f al cociente*: Sea $\overline{f} : G/H \to G'/H'$ tal que $\overline{f} \circ \pi = \pi' \circ f$; entonces, $\overline{f}$ es necesariamente un epimorfismo y $\mathcal{N}(\overline{f}) = f^{-1}(H')/H' = \{e\}$, etc.

Corollary *Sea $N \trianglelefteq G$ y sea $\pi : G \to G/N$ el epimorfismo canónico. Entonces,*

1. *hay una correspondencia biunívoca entre los subgrupos $\mathfrak{H} \leq G/N$ y los subgrupos $H \leq G$ tales que $N \subseteq H$, dada por $H = f^{-1}(\mathfrak{H})$*
2. *esta biyección es compatible con la inclusión, es decir, $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}_2$ si y solo si $f^{-1}(H'_1) \subseteq f^{-1}(H'_2)$: es también un isomorfismo de orden.*

La demostración es inmediata

Remark *Es también fácil ver que se puede demostrar primero el corolario anterior y luego probar a partir de él la proposición que le precede.*

Caso de otras categorías con estructura

La naturaleza de los teoremas de morfismo para grupos se aprecia con mejor cuando se observa que hay análogos, *mutatis mutandis*, en otras categorías con estructura.

Ello debería alertarnos a que se trata, entonces, de teoremas de mayor alcance que el muestra la sola teoría de grupos.

No entraremos en el detalle de cada enunciado y cada teorema que vimos recién, pero sí podemos explicitar, en términos generales, cuál es la situación.

Caso de los anillos

Sea A un anillo.

Definition *Sea $B \subseteq A, B \neq \emptyset$. Se dice que B es un subanillo de A y se escribe $B \leq A$ si y solo si B, con las operaciones de G restringidas a B, es un anillo; esto es, $(B, +|_{B\times B}, \cdot|_{BxB})$ es un anillo.*

Proposition *Sea $B \subseteq A, B \neq \emptyset$. Entonces $B \leq A$ si y solo si, para a, b cualesquier,*

$$a, b \in B \Rightarrow a - b \in B, \text{ y } a, b \in B \Rightarrow ab \in B.$$

Si A es un anillo y B un subanillo cualquiera de A, se tiene que A es, en particular, un grupo abeliano, de manera que el cociente A/B es un grupo, y abeliano.

Es inmediato, entonces, que, en este caso, se tiene todos los teoremas de morfismo en cuanto grupos: núcleos e imágenes de morfismos de anillos son también subgrupos normales, y, en cada enunciado de uno cualquiera de los teoremas, las condiciones son satisfechas, las funciones están bien definidas, y son morfismos... de grupos.

En la teoría de anillos, naturalmente, interesa que los objetos con los cuales se trabaja sean anillos, y que las funciones consideradas entre ellos sean morfismos de anillos. Sin embargo, hay ejemplos para los cuales el grupo A es un anillo, B es un subanillo, pero A/B no es un anillo. (Es inmediato que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, por ejemplo, no lo es).

De tal manera, se hace necesario, para fabricar los cocientes, no tomar cualquier subanillo de A.

Definition *Sea A un anillo, $\mathfrak{a}$ un subgrupo aditivo de A. Se dice que $\mathfrak{a}$ es un ideal de A y se escribe $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ si y solo si*

$$(\forall a \in A)(\forall x \in A)(a \in \mathfrak{a} \Rightarrow ax \in \mathfrak{a} \wedge xa \in \mathfrak{a})$$

Sigue de inmediato de las definiciones que $\mathfrak{a} \trianglelefteq A \Rightarrow \mathfrak{a} \leq A$.

(Si A tiene una identidad 1 y $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$, entonces $1 \notin \mathfrak{a}$; de lo contrario, es inmediato que $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$. Ahora bien, cuando se trabaja con anillos conmutativos con unidad, se prefiere a veces definir un subanillo B de A incluyendo la condición de que $1 \in B$. En tal caso, no se tendrá $\mathfrak{a} \trianglelefteq A \Rightarrow \mathfrak{a} \leq A$).

Definition *Sean $(A, +, \cdot), (A', +, \cdot)$ anillos, $f : A \to A'$ una aplicación. Se dice que f es un morfismo de anillos si y solo si, para cada $a, b \in A$, se tiene $f(a + b) = f(a) + f(b)$, y $f(ab) = f(a)f(b)$.*

Tal como la simbología sugiere, en la teoría de anillos, los subanillos (resp., ideales) juegan un rol análogo al de los subgrupos (resp., subgrupos normales) en la teoría de grupos.

En efecto, es fácil probar que, si $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$, entonces el grupo $A/\mathfrak{a}$ es, en realidad, un anillo, que la proyección natural de A en $A/\mathfrak{a}$ es un morfismo de anillos; por otra parte, el núcleo de un morfismo de anillos es un ideal... y que los teoremas de morfismo valen para este caso: como decíamos, esos teoremas ya son válidos para la estructura de grupos subyacente, y lo único que hay que verificar es que los morfismos de grupos que ya se tiene presevan la multiplicación, esto es, que para $a, b \in A$, se tenga que $f(ab) = f(a)f(b)$.

Por otra parte, dado que los cuerpos son casos especiales de anillos, los teoremas de morfismo de anillos valen también para ellos. Sin embargo, dado que, si un ideal $\mathfrak{a}$ de A no es nulo, debe tener un elemento invertible, digamos i, se tiene que $i^{-1}i = 1 \in a$, y, por lo tanto, si a es un elemento cualquiera de A, entonces $a = a \cdot 1 \in A$. Así, los ideales de A son solo $\{0\}$ y A, y los teoremas de morfismo carecen de interés para este caso.

Caso de los A-módulos

Para el caso de los A-módulos, la cuestión es, si cabe, más sencilla:

Definition *Sean, A un anillo, M un grupo abeliano.*

1. *Se dice que M es un A-módulo izquierdo si hay una aplicación* $\varphi : A \times M \to M, (a,x) \mapsto ax$ *tal que, si* $a,b \in A; x,y \in M$, *se tiene*
   - **a**. $(a+b)x = ax + bx$
   - **b**. $a(x+y) = ax + ay$
   - **c**. $(ab)x = a(bx)$
2. *Se dice que M es un A-módulo derecho si hay una aplicación* $\psi : A \times M \to M, (a,x) \mapsto xa$ *tal que, si* $a,b \in A; x,y \in M$, *se tiene*
   - **a**. $x(a+b) = xa + xb$
   - **b**. $(x+y)a = xa + ya$
   - **c**. $x(ab) = (xa)b$
3. *Se dice que M es un A-módulo si y solo si M es a la vez un A-módulo derecho y un A-módulo izquierdo.*

Definition *Sean M,N, A-módulos,* $f : M \to N$ *una aplicación. Se dice que f es A-lineal, o bien, que f es un morfismo de A-módulos si y solo si, para cada* $x,y \in M$, *para cada* $a \in A$, *se tiene*

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $f(ax) = af(x)$

La clasificación y las propiedades elementales para aplicaciones A-lineales son análogas a las realizadas para grupos, anillos, etc. En particular $\mathcal{N}(f)$ es un A-submódulo de M; f es inyectiva si y solo si $\mathcal{N}(f) = \{0\}$, etc.

Ahora bien, cuando se plantea cualquiera de los teoremas de morfismo para este caso, se tiene aún estructuras subyacentes de grupos y morfismos de grupos, de manera que, para los A-módulos (derechos, izquierdos, o *a secas*), esos teoremas son verdaderos en cuanto grupos.

Para obtener la estructura de A-módulo del grupo $\overline{M} = M/\mathcal{N}(f)$, si $a \in A$, $\overline{m} \in \overline{M}$, definimos ahora $a\overline{m} = \overline{am}$, operación que está bien definida, y, para probar que $\overline{f}$ es una aplicación A-lineal, tendríamos: en primer lugar, $\overline{f}$ es un morfismo de grupos, y, en segundo término, para a, $\overline{m}$ cualesquier, $\overline{f}(a\overline{m}) = \overline{f}(\overline{am}) = f(am) = af(m) = a\overline{f}(\overline{m})$

Otros casos

Se puede seguir la lista de teorías para las cuales los teoremas de morfismo son ciertos.

Entre los casos que se podría agregar está el de los espacios vectoriales (al fin y al cabo, un caso especial de A-módulos).

Otro es el de los grupos topológicos, para los cuales, en cada caso, hay que preocuparse de la continuidad de los morfismos.

Sin embargo, la lista dada hasta aquí nos parece suficiente para la advertencia que habíamos hecho al comienzo de esta sección: los teoremas del morfismo tienen una generalidad mayor que la que podríamos haber percibido por su sola consideración en la teoría de grupos.

En cualquier caso, esa generalidad será explorada en la sección siguiente.

Aproximación categórica

Queremos ahora establecer, de la forma más general posible, qué tipo de objeto es el cociente de grupos y cuál es su *propiedad universal*, aquella que lo caracteriza.

Para ello, describimos primero y muy brevemente un ambiente sumamente general.

Categorías

Definition *Sea* $\mathfrak{X}$ *una clase de objetos y un par de funciones:*

una que a cada par de objetos (X, Y) *de* $\mathfrak{X}$ *se asocia un conjunto* $\mathfrak{mor}_{\mathfrak{X}}(X, Y)$, *cuyos elementos* $f \in \mathfrak{mor}_{\mathfrak{X}}(X, Y)$ *se llaman morfismos,*

otra que asigna a cada terna de objetos (X, Y, Z) *de* X *una función*

$$\mathfrak{mor}_{\mathfrak{X}}(Y, Z) \times \mathfrak{mor}_{\mathfrak{X}}(X, Y) \to \mathfrak{mor}_{\mathfrak{X}}(X, Z)$$
$$(g, f) \mapsto g \circ f$$

y de manera que se cumple:

a. *(Asociatividad) Si* $h \in \mathfrak{mor}_{\mathfrak{X}}(Z, W), g \in \mathfrak{mor}_{\mathfrak{X}}(Y, Z), f \in \mathfrak{mor}_{\mathfrak{X}}(X, Y)$, *entonces* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

b. *(Identidad) Para cada objeto* Y *de* $\mathfrak{X}$ *hay un morfismo* $id_Y : Y \to Y$ *tal que*
si $f \in \mathfrak{mor}_{\mathfrak{X}}(X, Y)$ *entonces* $id_Y \circ f = f$, *y*
si $g \in \mathfrak{mor}_{\mathfrak{X}}(Y, Z)$ *entonces* $g \circ id_Y = g$

Remark *Se tiene:*

1. *Si* $f \in \mathfrak{mor}_{\mathfrak{X}}(X, Y)$ *se anota también* $f : X \to Y$

2. *La composición de* $g \circ f$ *se llama también compuesta de* g *y* f *(o de* f *seguida de* g, *o bien de* g *precedida de* f*)*

3. *Es claro que, dado un objeto* Y *de* $\mathfrak{X}$, *el morfismo* id_Y *es único y se llama el morfismo identidad de* Y

Definition *Una categoría* $\mathfrak{X}$ *es concreta si hay una función* $\mathfrak{S}$ *que asigna a cada objeto* X *de* $\mathfrak{X}$ *un conjunto* $\mathfrak{S}(X)$ *llamado conjunto subyacente a* X, *y, para cada par de objetos* (X, Y), *los elementos del conjunto* $\mathfrak{mor}_{\mathfrak{X}}(X, Y)$ *son funciones de* $\mathfrak{S}(X)$ *en* $\mathfrak{S}(Y)$.

Example *Las siguientes son categorías concretas, en las cuales la composición es la composición habitual de funciones (o de morfismos en la categoría), y la función* $\mathfrak{S}$ *es trivial:*

1. *La categoría* $\mathfrak{Conj}$ *de todos los conjuntos (esto es, la clase de objetos es la clase de todos los conjuntos);* $\mathfrak{mor}_{\mathfrak{Conj}}(Y, Z) = Y^X$ *es el conjunto de las funciones de* X *a* Y

2. *La categoría* $\mathfrak{Grp}$ *de todos los grupos;* $\mathfrak{mor}_{\mathfrak{Grp}}(G, G')$ *es el conjunto de los morfismos de grupo de* G *a* G'

3. *La categoría* $\mathfrak{An}$ *de todos los anillos;* $\mathfrak{mor}_{\mathfrak{An}}(A, A')$ *es el conjunto de los morfismos de anillo de* A *a* A'

4. *La categoría* $\mathfrak{Mod}_A$ *de todos los* A*-módulos;* $\mathfrak{mor}_{\mathfrak{Mod}_A}(M, M')$ *es el conjunto de los morfismos de* A*-módulo de* M *a* M' *(aplicaciones* A*-lineales)*

5. *La categoría* $\mathfrak{Vect}_K$ *de todos los* K*-espacios vectoriales;* $\mathfrak{mor}_{\mathfrak{Vect}_K}(V, V')$ *es el conjunto de las aplicaciones* K*-lineales de* V *a* V'

Definition *Sea* $\mathfrak{X}$ *una categoría. Se dice que un morfismo* $i : X \to Y$ *es invertible en* $\mathfrak{X}$ *si y solo si hay un morfismo* $i' : Y \to X$ *tal que* $i' \circ i = id_X$ *e* $i \circ i' = id_Y$

$$\begin{array}{ccccc} X & \to^{i} & Y & & \\ {\scriptstyle id_X}\searrow & & \downarrow_{i'} & \searrow & {\scriptstyle id_Y} \\ & & X & \to_{i} & Y \end{array}$$

Remark *Como de costumbre, se puede probar fácilmente que:*

1. *Si* i' *existe, entonces es único, y se escribe* $i' = i^{-1}$

2. *Si la composición $j \circ i$ de dos isomorfismos existe, entonces $j \circ i$ es un isomorfismo, y se tiene $(j \circ i)^{-1} = i^{-1} \circ j^{-1}$*

3. *Para cada objeto X de $\mathfrak{X}$, id_X es un isomorfismo, y se tiene $(id_X)^{-1} = id_X$*

Definition *Dos objetos X, Y de $\mathfrak{X}$ son equivalentes o isomorfos si hay un morfismo invertible $i : X \to Y$*

Remark *La relación definida por X es equivalente con Y es una relación de equivalencia en $\mathfrak{X}$*

Funtores

Definition *Si $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ son categorías, un funtor $\mathfrak{F} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ es un par de funciones,*

1. *una entre objetos, que asocia a cada objeto X de $\mathfrak{X}$ un objeto $\mathfrak{F}(X)$ de $\mathfrak{X}'$*
y una entre morfismos, que asigna a cada morfismo $f \in \mathfrak{mor}_{\mathfrak{X}}(X, Y)$ un morfismo $\mathfrak{F}(f) \in \mathfrak{mor}_{\mathfrak{X}'}(\mathfrak{F}(X), \mathfrak{F}(Y))$,

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \mathfrak{F}(X) \\ f\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mathfrak{F}(f) \\ Y & \to & \mathfrak{F}(Y) \end{array}$$

de modo que se tiene

a. $\mathfrak{F}(id_X) = id_{\mathfrak{F}(X)}$

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \mathfrak{F}(X) \\ id_X\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow id_{\mathfrak{F}(X)} \\ X & \to & \mathfrak{F}(Y) \end{array}$$

b. $\mathfrak{F}(g \circ f) = \mathfrak{F}(g) \circ \mathfrak{F}(f)$ *para cada compuesta $g \circ f$ definida en $\mathfrak{X}$*

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \to & \mathfrak{F}(X) & & \\ & \swarrow & f\downarrow & & \downarrow \mathfrak{F}(f) & \searrow & \\ g\circ f & \downarrow & Y & \to & \mathfrak{F}(Y) & \downarrow & \mathfrak{F}(g\circ f) = \mathfrak{F}(g)\circ\mathfrak{F}(f) \\ & \searrow & g\downarrow & & \downarrow \mathfrak{F}(f) & \swarrow & \\ & & Z & \to & \mathfrak{F}(Z) & & \end{array}$$

Example *Nos interesa señalar los siguientes ejemplos:*

1. *Dada una categoría concreta $\mathfrak{X}$, el funtor subyacente u olvido (de estructura) es $\mathfrak{S} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Conj}$, $X \mapsto \mathfrak{S}(X)$ definido como arriba: se asocia a un grupo, e. g., el conjunto subyacente.*

2. *De manera similar se define varios otros funtores. Por ejemplo:*
$\mathfrak{F} : \mathfrak{An} \to \mathfrak{Grp}$ *que 'olvida' la estructura multiplicativa de un anillo $(A, +, \cdot)$, etc.*

3. *El funtor $\mathfrak{Mor}(X, -)$: $\mathfrak{Conj} \to \mathfrak{Conj}$, que a cada conjunto Y asocia $\mathfrak{mor}(X, Y)$ y a cada función $f : Y \to Z$ la función $\mathfrak{Mor}(X, f) : \mathfrak{mor}(X, Y) \to \mathfrak{mor}(X, Z)$ definida por $g \mapsto g \circ f$*

Definition *Sea $\mathfrak{X}$ una categoría y sea $\mathfrak{F} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Conj}$ un funtor. Entonces, $\mathfrak{H} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Conj}$ es un subfuntor de $\mathfrak{F}$ si y solo si, para cada objeto X de $\mathfrak{X}$, se tiene $\mathfrak{H}(X) \subseteq \mathfrak{F}(X)$, y, para cada par de objetos (X, Y) de $\mathfrak{F}$ y para cada morfismo $f : X \to Y$, $\mathfrak{H}(f)$ es una restricción de f.*

Remark *(Se puede demostrar que, para definir un subfuntor, basta dar la función entre objetos).*

Elementos universales

Ahora estamos en condiciones de explicitar, desde esta perspectiva general de la teoría de categorías, qué tipo de objeto es el cociente que hemos venido estudiando (y que explica la inclusión de nuestras definición 83 y proposición 84, en 3.1.11).

Elemento universal

Definition *Sean $\mathfrak{X}$ una categoría concreta y $\mathfrak{F} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Conj}$ un funtor. Un elemento universal para $\mathfrak{F}$ es un par (u, U) donde U es un objeto de $\mathfrak{X}$ y $u \in \mathfrak{F}(\mathfrak{X})$ de modo que se tiene:*

Para cada objeto X de $\mathfrak{X}$ y para cada $a \in \mathfrak{F}(X)$ hay un único morfismo $f : U \to X$ tal que $\mathfrak{F}(f)(u) = a$

$$\begin{array}{ccc} U & \to & \mathfrak{F}(U) \ni u \\ f\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mathfrak{F}(f) \\ X & \to & \mathfrak{F}(X) \ni a \end{array}$$

Proposition *Dado un funtor $\mathfrak{F} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Conj}$, si hay un elemento universal (u, U) para $\mathfrak{F}$, ese es único, en el sentido de que, si hay otro objeto universal (u', U') para $\mathfrak{F}$, entonces hay un único isomorfismo $f_{U'} : U \to U'$ tal que $\mathfrak{F}(f_{U'})(u) = u'$, cuyo inverso es, naturalmente el único morfismo $f_U : U' \to U$ tal que $\mathfrak{F}(f_U)(u') = u$.*

Proof Inmediata:

Los siguientes diagramas muestran la situación

$$\begin{array}{ccc} U & \to & \mathfrak{F}(U) \ni u \\ f_{U'}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mathfrak{F}(f_{U'}) \\ U' & \to & \mathfrak{F}(U') \ni u' \\ f_U\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mathfrak{F}(f_U) \\ U & \to & \mathfrak{F}(U) \ni u \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} U & \to & \mathfrak{F}(U) \ni u \\ id_U\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mathfrak{F}(id_U) = id_{\mathfrak{F}(U)} \\ U & \to & \mathfrak{F}(U) \ni u \end{array}$$

El caso de los cocientes

Podemos ahora explicitar la naturaleza de los cocientes desde esta perspectiva general. Lo hacemos aquí para el caso de conjuntos.

Example *De acuerdo a lo examinado antes:*

1. *Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en un conjunto A y $\pi_{\mathcal{R}}$ es la proyección canónica de A en $A/\mathcal{R}$, entonces $(\pi_{\mathcal{R}}, A/\mathcal{R})$ es un objeto universal para el subfuntor de $\mathfrak{Mor}(X,-) : \mathfrak{Conj} \to \mathfrak{Conj}$ definido por $\mathfrak{F}_{\mathcal{R}}(Y) = \{f \in \mathfrak{mor}(X,Y) : x\mathcal{R}x' \Rightarrow f(x) = f(y)\}$*
2. *Si G es un grupo y $N \trianglelefteq G$, el objeto universal anterior puede definirse a partir del funtor $\mathfrak{F}_N : \mathfrak{Grp} \to \mathfrak{Grp}$ definido de la forma siguiente: para cada grupo G', $\mathfrak{F}_N(G') = \{f \in \mathfrak{mor}(G,G') : \mathfrak{Mor}(f,-)(N) = e_{G'}\}$. $\mathfrak{F}_N$ es un subfuntor de $\mathfrak{Mor}(G,-)$ y el TFM indica que $(\pi_N, G/N)$, donde $\pi_N : G \to G/N$ es la proyección canónica, es un elemento universal para $\mathfrak{F}_N$.*

Remark *Es importante notar que el hecho de que $(\pi_N, G/N)$ sea un cociente es*

equivalente a decir que hay una biyección $\Phi : \mathfrak{F}_N(G') \to \mathfrak{mor}(G/N, G')$.

La demostración es inmediata:

1. *De acuerdo al TFM, si* $f \in \mathfrak{F}_N(G')$, *entonces hay un único morfismo* $\overline{f} \in \mathfrak{mor}(G/N, G')$ *tal que* $\overline{f} \circ \pi_N = f$; *esto define* $\dot{\Phi}$ *como* $\mathfrak{F}_N(G') \ni f \mapsto \Phi(f) = \overline{f} \in \mathfrak{mor}(G/N, G')$

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ G & \to & G' \\ \pi_N & \searrow \quad \uparrow & \Phi(f) = \overline{f} \\ & G/N & \end{array}$$

2. *La inversa es, evidentemente* $(G/N, G') \ni g \mapsto \Phi^{-1}(g) = g \circ \pi_N \in \mathfrak{F}_N(G')$

$$\begin{array}{ccc} & g \circ \pi_N & \\ G & \to & G' \\ \pi_N & \searrow \quad \uparrow & g \\ & G/N & \end{array}$$

Remark *Se notará que la proposición 86 trata el teorema en otra notación.*

Comentario

La noción de objeto universal es ubicua y define de manera más precisa e integrada a la teoría y muestra mejor el rol que cumple un objeto matemático de mucha relevancia en una teoría.

Cocientes

Genéricamente, los cocientes son elementos universales: esa es su naturaleza y la manifestación de su importancia. Por ello incluimos antes nuestra proposición 84 en 3.1.11 y el ejemplo 114 en 3.3.3, que terminan de explicitar con propiedad que, en particular, respecto del cociente, la construcción no es el aspecto fundamental, sino su funcionamiento.

Extensiones

En el sentido inverso de las flechas (o, si se quiere, para funtores contravariantes) diversas inclusiones, o, más bien, extensiones de morfismos son también universales.

Por ejemplo, la inclusión $j : D \to Q(D)$ de un dominio de integridad D en su cuerpo (conmutativo) de fracciones es un elemento universal para funtor $\mathfrak{G}$ de la categoría de cuerpos (conmutativos) a la de conjuntos, que a cada cuerpo K asigna el conjunto $\mathfrak{G}(F)$ de todos los monomorfismos de anillos $\varphi : D \to K$, y a cada morfismo de cuerpos $f : K \to K'$ la función $\mathfrak{G}(f) : \mathfrak{G}(K) \to \mathfrak{G}(K')$ definida por $\mathfrak{G}(f)(\varphi) = f \circ \varphi$.

Este ejemplo manifiesta bien qué es el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los racionales en relación con el dominio $\mathbb{Z}$ de los enteros, o, mejor, la propiedad universal de la inclusión $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, y muestra, además, la unicidad de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ –esto es, salvo un único isomorfismo–. (Cf. Mac Lane 1967, teorema 13, p. 135).

Antecedentes epistemológicos

En este capítulo, reseñamos aspectos relacionados con la historia de los conceptos que se relacionan directamente con nuestro teorema.

Para ello, será necesario ubicar esa historia al interior de la de los grupos y, por razones

tanto históricas como psicogenéticas, situaremos a su vez esta última en la historia del álgebra. Esto nos permitirá una apreciación más clara de la relevancia de nuestro teorema en la teoría y su desarrollo, y también su lugar en la enseñanza.

Álgebra, grupos, isomorfismo

Plan del capítulo

Para nuestro propósito, comenzaremos con algunas ideas muy generales –y otras de carácter específico– que tienen relación con la evolución de lo que acostumbramos llamar el *álgebra*. La necesidad de proceder así queda de manifiesto de inmediato si se considera que ese término, *álgebra*, tiene, en la práctica, un par de acepciones un tanto disímiles; que, además, el tránsito de una a otra no es enteramente obvio para los estudiantes, y que, más relevante aun, ese tránsito se genera en la aparición de los grupos como objetos y luego como teoría.

Seguiremos con por los grupos. Pensamos que los antecedentes históricos sugieren con claridad las dificultades epistemológicas que hay que enfrentar, especialmente en lo que se refiere a grupos cocientes e isomorfismos.

Añadiremos a continuación una reseña, necesariamente breve, dada su corta historia (y nuestra finalidad al incluirla), a la teoría de categorías.

Luego haremos una mención, también breve, a la historia de la teoría de relaciones de equivalencia, de aparición igualmente reciente en su aspecto formal, pero sumamente relevantes para la formalización de la teoría de grupos en ciernes en la época de la aparición de aquellas –y también para nuestro tema–.

Finalmente, miraremos la relación hecha en las secciones anteriores desde una perspectiva comprensiva, de utilidad para nuestro tema central, enunciada por Piaget y García (1989).

Los antecedentes históricos presentados en este capítulo serán completados en 6.1 y 6.2, a propósito de la (relevante) manera en que los textos de estudio han ido traduciendo los avances en el álgebra abstracta a los matemáticos y a los estudiantes de Matemáticas.

Fuentes utilizadas

En relación con la historia que relataremos brevemente a continuación, hay ciertos elementos en los cuales la generalidad de los historiadores del tema está de acuerdo. Por esa razón, nos ha parecido más apropiado no citar a un autor específico cuando aquello a lo que nos referimos es patrimonio común en el ámbito.

Lo anterior hace conveniente mencionar las autorizadas fuentes que hemos utilizado como recursos bibliográficos –por supuesto, ellas serán explícitamente traídas a colación cuando sea pertinente–:

Bourbaki (1960); Dieudonné (1978); van der Waerden (1985); Kline (1972, 1980); Dhombres (1978); Nový (1973); Boyer (1985); Montucla (1968); Dahan-Dalmenico, Pfeiffer & Dessanti (1986); Grattan-Guinness (ed., 2005); Hoffmann (1961); Phillips (1987); Bruter (2000); Cousquer (1992); Guichard (2000); Chandler & Magnus (1982); Corry (1996, 2001, 2008); Katz (1997); Kleiner (1986); Phillips (ed., 1987); Wussing (1984).

Concepto de álgebra

Para algunos (Cf., por ejemplo, Boyer, 1985), se puede hablar de álgebra cuando los temas y problemas no conciernen solo a objetos concretos (alimentos, e. g.) y no se reducen solo a operaciones de números conocidos. Desde este punto de vista, Egipto y Babilonia habrían tenido álgebra.

Otros autores, sin embargo, (Cf., por ejemplo, Piaget y García, 1989), consideran que el álgebra es una ciencia de computación generalizada, imposible de realizar en ausencia de notación simbólica. Desde esa perspectiva, habría que esperar a François Viète (1540-1603)

para hablar propiamente de *álgebra*.

En cualquier caso y como decíamos, el significado del término que empleamos, *álgebra*, desde que al-Khwarizmi escribiera su tratado *Hisab al-jabr w'al-muqabala*, ha ido cambiando, lo cual es de sumo interés para nuestro estudio.

Álgebra, ecuaciones y números

Una aproximación al Álgebra no puede hacerse sin referencia a las ecuaciones polinómicas y a los sistemas numéricos. De hecho, decir simplemente que esos temas están relacionados yerra el punto de su evolución: en algún tiempo se consideró a algunos de ellos como parte de los otros, y, más adelante, según explicitaremos, esa relación se invirtió. Más aun, y según mostraremos, es ese cambio mismo el que separa la manera contemporánea de concebir el álgebra de la manera en que se la pensaba antiguamente. (Por supuesto, nuestro teorema se inscribe exclusivamente en la nueva mirada).

La evolución de las ecuaciones está inextricablemente relacionada con la de los números, por cuanto las soluciones de aquellas obligan a buscar y aun a crear un ámbito numérico que las contenga. Los números de la antigüedad son, en principio, los racionales positivos (con alguna adición de algún número irracional), de manera que cada matemático debe trabajar como distintos casos que hoy nos parecen el mismo.

Álgebra, grupos e isomorfismos

Por otra parte y como reseñábamos, el relato histórico por sí mismo no es suficiente para propiamente utilizarlo como insumo didáctico, y hacen falta consideraciones de orden epistemológico.

En el caso del Álgebra, un asunto de la mayor importancia al respecto es la aparición de la teoría de grupos, que terminará cambiando la concepción misma de aquello que llamamos *Álgebra*. Ahora bien, tal cambio conceptual está inextricablemente unido a la aparición de subgrupos normales y cocientes, y el desarrollo desde allí, a su vez, indisolublemente unido al del concepto de isomorfismo –y necesariamente a los teoremas que clarifican su importancia teórica y su utilidad práctica en la Matemática–.

Álgebra casuística y presimbólica.

Como se recordará, hasta antes de los griegos, se conocen algunas maneras de trabajar algunos problemas matemáticos, en forma no sistematizada. Los griegos edificarán un *corpus* de conocimiento, en el sentido de que las cantidades son magnitudes de la geometría. Se suele decir que ellos construyeron un *álgebra geométrica*: más que interesarse en las ecuaciones, se ocupan de las propiedades de las curvas, que pueden requerir de una ecuación, y no se encuentra en ellos una formulación (no resolución) puramente algebraica hasta el año 100 d. C. En cualquier caso, la demostración como método matemático es parte de su herencia.

Otros pueblos, en general, según los registros, ofrecen métodos carentes de demostración, obtenidos generalmente por ensayo y error.

La simbología es de aparición posterior, pero recurriremos a ella para abreviar la presentación. (Esto es, escribiremos en nuestra notación, desconocida en su mayor parte antes del siglo XVII).

El estudio de las ecuaciones

Ecuación lineal

En un sentido informal, las ecuaciones lineales fueron conocidas por muchos pueblos; por ejemplo, se la encuentra cada vez que se trata de cantidades que crecen en forma proporcional.

Euclides en sus *Elementos* (323 a. C.) trata en detalle la proporcionalidad –en aquel ropaje geométrico–.

Ecuación cuadrática

La ecuación cuadrática era conocida por los antiguos babilonios y egipcios. Se encuentra un problema resoluble por una ecuación cuadrática en Babilonia, hacia 1600 a. C.

Al Kwharizmi

Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi escribió su tratado *Hisab* al-jabr *w'al-muqabala* hacia 825.

Él determina que puede reducir las ecuaciones lineales y cuadráticas a 6 formas:

- cuadrados iguales a raíces;
- cuadrados iguales a números;
- raíces iguales a números;
- cuadrados y raíces iguales a números, esto es, del tipo $x^2 + bx = c$;
- cuadrados y números iguales a raíces, es decir, del tipo $x^2 + c = bx$;
- raíces y números iguales a cuadrados, i. e., del tipo $x^2 = ax + b$

Para tratar esas ecuaciones, utiliza dos operaciones: *al-jabr* o *completar*, que significa sacar los términos negativos de una ecuación (lo que hoy día llamaríamos sumar sus opuestos positivos en ambos lados de la ecuación), y *al-muqabala* o *balancear* (quitar de ambos lados una cantidad positiva).

Ecuación cúbica

La ecuación cúbica es seguramente el problema abierto de mayor duración en la historia de la matemática. (Cf. Kline, 1980).

Raíces cúbicas

Se sabe que indios, árabes y chinos e indios sabían aproximar raíces cúbicas de números. Pero cerca de 2 mil años antes de Cristo, los babilonios ya utilizaban tablas de cubos.

Los griegos

A propósito del problema platónico de la duplicación del cubo, imposible con regla y compás, Meneachmus, hacia 350 a. C., había ideado una resolución mediante la intersección de cónicas.

Por su parte, Arquímedes (287-212 a. C.) se propuso cortar una esfera con un plano, para ello, interseca una parábola y una hipérbola: resuelve así una ecuación cúbica por medios geométricos.

Diofanto de Alejandría (h. 200 - h. 280) analiza el problema de encontrar un triángulo rectángulo tal que el área añadida a la hipotenusa dé un cuadrado, mientras que el perímetro sea un cubo. Escribe y resuelve así la ecuación $x^3 + x = 4x + 4$.

No parece haber mucha más información acerca de ecuaciones cúbicas que nos hayan legado los griegos.

Al-Mâhanî y Tâbit ibn Qurra

Abu Abd Allah Muhammad ibn Isa Al-Mâhanî, comentando a Arquímedes, resuelve la ecuación del tipo $x^3 + a^2b = cx^2$. Su contemporáneo Tâbit ibn Qurra, hacia 870, consideró casos especiales de cúbicas pero no habría podido contribuir a la teoría general.

Omar al-Khayyam

En su *Tratado de demostración de problemas de Álgebra,* Omar al-Khayyam (1041-1131) extendió el método de Meneachmus para el caso de otras ecuaciones cúbicas, *more geometrico*. Al Khayyam incluso clasifica la ecuaciones cúbicas –en varios casos, pues no dispone de números negativos–.

Fibonacci

No parece haber progreso sobre esta materia, hasta que Leonardo de Pisa, Fibonacci, incluye en su *Flos* (1225), con una impresionante precisión de 9 decimales, la raíz positiva de la ecuación cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, derivada de un problema de al-Khayyam que le propone Juan de Palermo.

Luca Pacioli

Posteriormente, en 1494, Luca Pacioli, en su *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, se refiere también a la ecuación cúbica, al final de su tratado.

Intenta abordar las ecuaciones $x^3 + cx = d$ y $x^3 + d = cx$, y las encuentra tan imposibles cono cuadrar el círculo.

Scipion del Fero

Scipion del Fero (1465-1526), se interesa también en el tema; de hecho, él y Luca Pacioli se encuentran en Bolonia: de los dos casos de que se tenía conocimiento, $x^3 + cx = d$ y $x^3 = cx + d$, del Fero resuelve, aparentemente, uno.

Del Fero tiene un discípulo, Antonio Maria Fior, pero deja sus notas a su yerno Annibale dalla Nave.

Tras los trabajos de estos matemáticos italianos, queda la especie de que para resolver las ecuaciones cúbicas bastaría saber los casos anteriores y $x^3 + d = cx$.

Nicolo Fontana y Girolamo Cardano

Nicolo Fontana, apodadoTartaglia, toma, por su parte, el tema. Es desafiado por Fior en 1535: se darán uno al otro una lista de ecuaciones para su resolución. Tartaglia gana fácilmente el desafío, lo que evidencia que conoce un caso más que Fior.

Sabiendo del torneo, Girolamo Cardano se interesa en conocer a Tartaglia, a quien le sonsaca unos versos que este utiliza para resolver los casos que conoce: recurre a un cambio de variable para obtener una *resolvente* de menor grado.

Ecuación cuártica

Un discípulo de Cardano, Ludovico Ferrari, usando una metodología similar a la de Tartaglia, encuentra una resolvente para la cuártica. Cardano decide, entonces, publicar las resoluciones, cosa que hace en 1545, en su *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*, o simplemente *Ars Magna.*

Ecuaciones de otros grados

Las ecuaciones de grados mayores a 4 son uno de los problemas centrales del álgebra, y generaron el álgebra como la conocemos hoy día. Postergaremos su tratamiento para reunir previamente otros elementos de análisis.

La difícil expansión de los números

Ecuaciones y números

Como recordábamos, el estudio de las ecuaciones está ligado al de los números; sus respectivos avances son mutuamente necesarios.

Ahora bien, la evolución de los números muestra con claridad que hubo obstáculos muy importantes de sortear, que dificultaron grandemente las construcciones que había que hacer –y, por tanto, el avance del álgebra–.

Por ello, es muy relevante dar siquiera una rápida ojeada a su historia, que comienza, naturalmente, por los números que llevan precisamente ese apelativo –naturales–.

(Volveremos brevemente sobre el tema).

Los números son los racionales

En la Antigüedad (babilonios, egipcios, griegos y naciones circundantes), los números son los números racionales positivos: $\frac{m}{n}$, con m, n naturales (no nulos).

Los griegos (elegida una unidad de medida) no distinguen entre trazos y números: un número se construye con regla y compás; la razón $m : n$ o el número $\frac{m}{n}$ se obtiene por el conocido método de utilizar dos trazos de un mismo origen (en ángulo agudo), de medida m, n, respectivamente, y trazar paralelas a la recta que une los extremos de ambos trazos.

La ecuación $x^2 = 2$ fue un problema mayor para ellos: según se encuentra en Euclides (y antes en Aristóteles), su solución no es de aquella forma $\frac{m}{n}$, sin embargo, se puede obtener con regla y compás al hacer un triángulo rectángulo de catetos de medida 1. Ello

echa por tierra la concepción de los pitagóricos acerca del mundo, que sería regido por las razones $\frac{m}{n}$. Un problema que demorará casi un par de milenios en ser resuelto.

El cero y el sistema decimal

El cero es, claramente, una abstracción mayor, y representa un escollo principal para la introducción de la numeración indo-arábiga en occidente.

Ya Gerbert d'Aurillac, que tomó seguramente el sistema posicional de los árabes durante su participación en las Cruzadas, intentó hacerlo hacia el año 1000, sin mayor resultado.

El *Liber Abaci*, de Fibonacci, no es, en realidad, un libro del ábaco, sino que compara el usado en Europa con las virtudes del sistema decimal.

Los números negativos

Antes de su creación, los números negativos aparecen como el resultado de diferencias en las cuales el minuedo es menor que el sustraendo –y que, por lo tanto, no se pueden realizar–.

Brahmagupta, en Brahmasphutasiddhanta, en 628 ideó los números negativos. Es de su invención que se toma actualmente la relación de equivalencia con los que se los construye a partir de $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} - \{0\})$: él piensa en un comerciante que en un día gana *m* y paga *n*; al final del día, para los efectos prácticos, lo que importa es la diferencia $m - n$ (si ganó dinero) o $n - m$ (si perdió), o bien que *m* y *n* sean iguales.

Del mismo modo, Fibonacci interpretará, en un problema de dinero, un número negativo en la solución de la ecuación correspondiente como pérdida en lugar de ganancia.

En general, sin embargo, la resta de un número menor al que se le substrae una mayor no es afectada por los matemáticos en un espectro amplio de tiempo: Diofanto, Brahmagupta y François Viète, por ejemplo, rechazaron explícitamente las soluciones negativas de ecuaciones; Cardano los llamará números *ficticios*; Michael Stifel (1487-1567), por su parte, *absurdos*.

Los irracionales

El rechazo de los griegos a los números que todavía hoy llamamos *irracionales* perdurará por largo tiempo. En los *Elementos*, Euclides, de manera más bien objetiva, los había llamado *inconmensurables;* por el contrario, dados dos racionales $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, siempre se los puede llevar a una medida común –amplificar por $\text{mcm}(n, n')$–.

Fueron los árabes quienes siguieron investigando la cuestión. Al-Karaji (953-c.1029) y Al-Samaw'al, (c.1130-c.1180) se propusieron extender las operaciones aritméticas a las cantidades irracionales; este último y Al-Kashi (1390-1450) los aproximan por decimales. De todas maneras, todavía de trata de una mezcla de números y segmentos.

Los irracionales aparecen en Europa en el siglo XVI por una traducción de Euclides hecha por Nasir Al-Din al-Tusi.

Simon Stevin (1548-1620) resume diciendo que a estos números se los tenía por irracionales, irregulares, (sordos), absurdos y no dignos de ser citados en proposiciones matemáticas (Bell, 1996, p. 130).

Stifel, en su *Arithmetica Integra* (1544), presenta en su contra un argumento interesante, basado en la infinitud de la expansión decimal (no periódica) de un irracional: no se puede decir que son verdaderos números, porque carecen de la precisión de estos; tal como el infinito no es un número, así los irracionales no son verdaderos números, sino que quedan ocultos en una nebulosa infinita.

Los complejos

Los números a los cuales aún llamamos *imaginarios* fueron también profiusamente rechazados. En su momento, se llamaron también *imposibles*.

Un dato interesante se encuentra en el *Ars Magna,* de Girolamo Cardano: en algún momento de sus cálculos, Cardano debe multiplicar $5 + \sqrt{-15}$ por $5 - \sqrt{-15}$, y obtiene 40,

el resultado que busca y que le sirve, a pesar de que se supone que esos factores no existen; escribe entonces: ...*dejando de lado las torturas mentales que esto involucra, el resultado es….*

Cauchy, en 1847, es enfático en su declaración: *Descartamos en signo simbólico* $\sqrt{-1}$*, al que repudiamos por completo, y al que podemos abandonar sin remordimientos porque no sabemos su significado ni cuál podríamos atribuirle*. El propio Gauss dirá: *La metafísica de* $\sqrt{-1}$ *es difícil*. (Bell, 1996, pp. 185-186).

El lenguaje en el álgebra

Según E. T. Bell (1945), G. Nessemlam introdujo en 1842 tres fases históricas del álgebra: la *retórica*, la *sincopada* y la *simbólica*; tales etapas se refieren al uso del lenguaje. (Nos interesaremos más en otra clasificación).

Álgebra retórica

En la etapa retórica, el lenguaje utilizado es la lengua materna. Ella se presta bien para problemas sencillos, pero, evidentemente, se constituye en una dificultad para problemas más complejos.

Aryabhata, hacia el 500 d. C., trabajará de esa manera, sin símbolos: *...tome la raíz cuadra de esto, substraiga el doble del primer término...* (.).

Tan tarde como el año 1540, cuando Tartaglia se encuentra con Cardano, en lugar de una fórmula le enseña un verso que utiliza para resolver las ecuaciones cúbicas (agregamos una traducción en las notaciones actuales): *Cuando el cubo y la cosa juntas son iguales a un número discreto (*$x^3 + cx = d$*), encuentra otros dos números que difieren en éste;* $(u - v = d)$*; cuando lo tomas como un hábito que el producto debe ser siempre igual exactamente al cubo de un tercio de la cosa (*$uv = (\frac{c}{3})^3$*) , el resto, entonces, como regla general, de sus raíces cúbicas substraído será igual a tu cosa principal (*$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$*)*

Álgebra sincopada

Diofanto, hacia 250 d. C., incluye algunos símbolos en sus trabajos, y comienza así el *álgebra sincopada:* si se trata de encontrar dos números cuya suma es 20 y el producto 96, dirá 2*x es la diferencia requerida, luego, los números son* $10 + x, 10 - x\ldots$

Álgebra simbólica

El modo de trabajo simbólico pertenece a una etapa más avanzada del álgebra, y lo tratamos en la sección siguiente.

Álgebra simbólica y generalizante

La simbología

François Viète

François Viète, en 1591, en su libro *In artem analyticam isagoge*, distingue entre la *logistica numerosa*, referida a los números concretos, y la *logistica speciosa,* que trabaja también con *species*, esto es, con los tipos de cosas más que las cosas mismas. Por primera vez, se pudo trabajar con variables, que no son cantidades fijas, lo que permitió condensar y reificar todo el conocimiento algebraico: se podía trabajar con menos esfuerzo, lo que resultó muy conveniente para los desarrollos ulteriores del Álgebra y, más en general, de la Matemática. (Sfard, 1995).

El invento de Viète se traducirá en que las ecuaciones se conviertan en objeto de estudio en su propio derecho; los métodos operacionales de resolver ecuaciones por cálculos en reversa fueron reemplazados por manipulaciones de fórmulas: se da reglas para resolución de ecuaciones; *al-jabr* es ahora la *antithesis,* hay otra para dividir ambos lados de la ecuación por una misma cantidad.

In artem comporta un avance importante en el álgebra. Se libera del modo geométrico de prueba; su estilo es más 'algebraico': por primera vez se utilizan símbolos para las incógnitas (A, E, I, O, U) y para cantidades arbitrarias (B, C, D); usa los signos + y − para

facilitar el trabajo; a ello se unen las reglas para resolver ecuaciones.

Lo anterior no implica separación definitiva de geometría y álgebra. Por ejemplo, en su tratamiento de la ecuación cúbica expresa que …*resolver la cúbica es equivalente a trisectar un ángulo arbitrario*. (Citado por Stilwell, 2002, p. 93).

Con Viète, el álgebra se convierte en una disciplina de cierta independencia; *In artem* es el origen del álgebra abstracta como un estudio de cierta generalidad, mayor que la que conocieron sus predecesores.

De todas maneras, el álgebra, así concebida, es una suerte de aritmética universal: sus reglas son las de los números.

Por otra parte, no toda la comunidad matemática la mira con igual confianza. Newton diría, más adelante: *el álgebra es el análisis de los chapuceros en matemáticas*. (Kline, 1980, p. 124).

Rafael Bombelli

Bombelli, escribe un extenso tratado de Álgebra, que sería en 5 libros (y que se terminó de publicar en 1923).

Él introduce algunas notaciones interesantes y más cómodas, pero que ya no utilizamos.

De mayor interés para nosotros es su intención es tratar de establecer de manera correcta a los números negativos y a los complejos, entendidos estos como raíces de negativos.

La geometría analítica

Pierre de Fermat en 1629 y Descartes en 1637 inventan lo que se acostumbra llamar *Geometría analítica*, pero que pudo llamarse, seguramente, *Geometría algebraica*: los entes geométricos y sus propiedades están ahora resumidos completamente en una fórmula algebraica.

Descartes, en particular, usando su método, es capaz de resolver ecuaciones del tipo $x^4 + cx^2 + dx + e = 0$.

Los problemas generales

El impacto del Cálculo

Tras la aparición del Cálculo Infinitesimal, los problemas que este permitía abordar, el trabajo acerca de ecuaciones es proseguido por otros matemáticos, incluido Newton en la segunda mitad del siglo XVII.

Un siglo más tarde, una nueva generación de investigadores se empeña en encontrar fórmulas para resolver otras ecuaciones, como se dirá, *por radicales*, esto es, por medio de una fórmula algebraica que incluye las cuatro operaciones y extracción de algún tipo de raíces.

El álgebra *per se*

Más adelante, George Peacock, asociado de Augustus de Morgan –quien participó activamente en los debates acerca del simbolismo en las décadas de 1830 y 1840–, querrá establecer el álgebra como disciplina completamente independiente.

Suyo es el *Principio de permanencia: Whatever form is algebraically equivalent to another form expressed in general symbols, must continue to be equivalent, whatever the symbols denote*. (Novy, 1973, p. 191). La regla pone claramente a la manipulación algebraica por encima de los números: son aquellas las que deben prevalecer sobre estos.

Esto permitirá que la atención se centre más en las operaciones y las relaciones entre ellas que en la estructura sobre la cual las operaciones se realizan.

Para llegar a esta etapa, sin embargo, habría que desarrollar otros aspectos de la teoría de ecuaciones

Hacia una visión comprensiva

Joseph Louis Lagrange

Lagrange se venía ocupando de las ecuaciones. En 1770, en sus *Reflexiones acerca de*

la resolución algebraica de las ecuaciones (Lagrange, 1870), revisa lo que se conocía hasta ese momento en la teoría de ecuaciones polinomiales e intenta un avance substantivo en la materia.

Para ello, considera la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones cúbica y cuártica, y trata de entender por qué se habían podido resolver. Observa que para ellas se usaban *resolventes*: ciertos cambios de variables permiten encontrar una ecuación asociada de menor grado, cuya solución se conoce y a partir de la cual se obtienen las soluciones de la ecuación original.

La idea original de Lagrange es tratar todas las ecuaciones de una misma manera, lo que significa un gran paso en la historia del Álgebra. (Volveremos sobre esta importante cuestión).

Así, el tema era encontrar la relación entre las soluciones de las reducidas y la originales. Logra asociar las soluciones con *permutaciones* de las raíces, y, aun cuando no se plantea aún composición ni clausura de estas permutaciones, piensa que ellas constituyen *el verdadero principio para la resolución*.

Se pregunta cuántos valores diferentes puede tomar un polinomio cuando se lo permuta de todas las maneras posibles. Por ejemplo, encuentra que $x_1x_2 + x_3x_4$ puede tomar 3 valores, lo que determina el grado de la ecuación resolvente.

Intenta ese camino para ecuaciones de grado 5, pero ahora el grado, en lugar de disminuir, sube. Concluye entonces que se necesita un nuevo enfoque si se quiere avanzar sobre el asunto.

Alexandre Vandermonde

Alexandre Vandermonde, en su *Mémoire sur la résolution des équations,* presentada a la Academia de Ciencias de París en 1770, trata también de establecer principios generales. Trabaja para casos especiales de la ecuación que se llamará ciclotómica, $x^n = 1,$ para lo cual utiliza las resolventes de Lagrange y raíces primitivas de la unidad.

De su trabajo provienen las permutaciones cíclicas, la composición de ciclos y la descomposición de permutaciones en ciclos más pequeños. (Novy, 1973, p. 40).

(Edward Waring, en la misma fecha, hace un trabajo similar en *Meditationes Algebraicae*).

Paolo Ruffini

Posteriormente, Paolo Ruffini, estudiante de Lagrange, en varias memorias, de 1798, 1802, 1813, utilizando resolventes de Lagrange, declara que es imposible resolver una ecuación en general; la memoria de 1798 ya hablaba de que la ecuación de grado 5 no es resoluble por radicales.

Sin embargo, su trabajo es poco conocido (ni siquiera Lagrange lo lee) e inconclusivo.

Augustin Louis Cauchy

El prolífico matemático Augustin Louis Cauchy pensó las funciones en una manera más general: él habla de *funciones de n cantidades,* extendiendo así la idea de Lagrange de permutaciones, que ahora no son solo las de las raíces, sino de letras que representan cantidades.

Introduce el término *substitución* para hablar del paso de una permutación a otra. Define multiplicación de substituciones, substituciones idéntica e inversas. Sus teoremas preludian los teoremas acerca de los grupos de substituciones que se encontrarán pronto en la historia de las ecuaciones.

Karl Friedrich Gauss

Karl Friedrich Gauss, que hizo aportes a todas las ramas de la Matemática conocidas en su tiempo, hizo, por supuesto, contribuciones a este tema central de la disciplina de entonces.

Por una parte, se encargó de demostrar rigurosamente, en 1797, una creencia que se iba

imponiendo en los matemáticos desde el siglo XVIII: que los números complejos bastaban para resolver cualquiera ecuación con coeficientes complejos, y que se dio en llamar el Teorema Fundamental del Álgebra –sin el cual, la matemática de las ecuaciones se habría visto posiblemente condenada a seguir extendiendo el campo de los números en la búsqueda de nuevas soluciones–.

Completará también el importante caso de la ecuación ciclotómica.

En sus *Disquisitiones* (Gauss, 1801), cuando trata formas cuadráticas, introduce la composición de esas formas. Se trata de la primera operación algebraica de la historia que no se hace sobre números, y cuyas propiedades no provienen directamente de los números. (Cf., por ejemplo, Peacock, más arriba).

Sorprende a los historiadores que Gauss, posiblemente el matemático más grande que haya existido, se detenga a las puertas de la definición de grupo y no la haga.

Niels Heinrik Abel

En 1824, el noruego Niels Heinrik Abel publica en francés una memoria en que demuestra correctamente que es imposible resolver la ecuación quíntica por radicales, lo que prueba a su vez que no siempre se encontrará una fórmula para una ecuación, como las que había para los grados menores. (Cf. van der Waerden, 1985). Abel agrega casos en que se puede encontrar una resolución por radicales, como el de la ciclotómica, por ejemplo.

La irrupción de los grupos

Las fuentes de la teoría

Hay cuatro fuentes reconocidas de la teoría de grupos propiamente tal (cf. Wussing, 1984; Kleiner, 1986; Nicholson, 1993): el álgebra clásica (bien representada por Lagrange, 1770); la teoría de números, (desde las *Disquisitiones* de Gauss, 1801); la geometría (particularmente, el programa *Erlangen* de Klein, 1872), y el análisis (en especial, Sophus Lie, 1874; Henri Poincaré y Felix Klein, 1876).

Las ecuaciones

Hemos reseñado brevemente su rol en la sección anterior.

Los números

Gauss (1801), en sus *Disquisiones Arithmeticae*, inicia, sin tener un concepto claro ni teoría unificadora, el estudio de los grupos finitos. En la terminología actual: el grupo aditivo de los enteros módulo *m*, el grupo multiplicativo de enteros invertibles módulo *m*, el grupo de equivalencia de ecuaciones cuadráticas, el grupo de las raíces *n*–ésimas de la unidad.

La geometría

Ahora bien, Klein (1872), en su *Revisión comparativa de investigaciones recientes en geometría*, más conocidas como *Programa de Erlangen*, procura clasificar varios tipos de geometrías recientemente aparecidas (no euclidianas, proyectiva, diferencial, algebraica, *n*–dimensional, de extensión de Grassmann) como el estudio de invariantes bajo ciertos grupos de *transformaciones*. Así aparecen los grupos: proyectivo, ortogonal, de similaridades, hiperbólicos, elípticos, y las geometrías asociadas con ellos, con los cuales clasifica y ordena un estudio que carecía de unidad.

Por ejemplo, la geometría proyectiva en el espacio $\mathbb{R}^3$ es el estudio de las propiedades del espacio que permanecen invariantes bajo la acción del grupo proyectivo. La geometría euclídea plana se obtiene tomando el grupo ortogonal de $\mathbb{R}^2$, que preserva las distancias.

El análisis

Adicionalmente, Sophus Lie (1874), quien estudiara, como dijimos, con Klein el comentario de Galois hecho por Jordan (1870), introduce los *grupos continuos* –hoy llamados grupos de Lie– con el objetivo de reiterar lo que aquél hizo para ecuaciones diferenciales (no lo logrará).

En 1876, Poincaré y Klein comienzan su trabajo en *formas automorfas* (que son generalizaciones de otras funciones del análisis) en general, que sean invariantes bajo el grupo de automorfismos de las *transformaciones lineales* $z \to \frac{ax+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$, o uno de sus subgrupos.

El concepto abstracto de grupo

La aparición del concepto abstracto de grupo demorará cerca de un siglo, asunto del mayor interés para nuestra reflexión: Cayley (1854) dio, en realidad, una definición abstracta de grupo, pero, a pesar de su prestigio personal, habrá que esperar hasta 1878 para que sea tomado en cuenta. Weber (1882) propondrá también una idea abstracta de grupo, pero solo para el caso finito.

Evolución del concepto

La evolución de la teoría sigue bastante de cerca los pasos que E. T. Bell (1945) señala para los grandes avances matemáticos: descubrimiento de fenómenos aislados (grupos de permutaciones, abelianos, de transformaciones, continuos), reconocimiento de algunas propiedades comunes, búsqueda de nuevas instancias, cálculo detallado y clasificación, emergencia de principios generales haciendo nuevos cálculos y, finalmente, los postulados que cristalizan la teoría de manera abstracta.

El nacimiento de los grupos

Évariste Galois

La resolubilidad por radicales

Tras el resultado de Abel en 1824, era natural buscar una manera de determinar cuándo una ecuación es resoluble por radicales, esto es, utilizando las cuatro operaciones y extracción de raíces *n*-ésimas.

Galois ha leído (además de a Legendre en Geometría) los trabajos originales de Lagrange y de Abel.

En varias memorias que presenta a la Academia de Ciencias de París –en 1829, 1830, 1831 y 1832– establece cuándo se puede encontrar una fórmula y cuándo no.

Las memorias

Esas memorias no alcanzan reconocimiento inmediato.

En la primera, *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicauxs*, entregada el 16 de enero de 1831, Galois explica con claridad su propósito: *On trouvera ici une condition générale a la quelle* SATISFAIT TOUTE ÉQUATON RÉSOLUBLE PAR RADICAUX. (En mayúsculas en el original. Galois, 1962, p. 43).

La segunda se entrega a Joseph Fourier, quien muere.

Siméon Poisson y Sylvestre Lacroix reciben la tercera, *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux,*es presentada para el *Gran Premio en Matemáticas*. Aquellos declararán: *Su razonamiento no es suficientemente claro, suficientemente desarrollado, para que nosotros podamos juzgar su corrección, y no podemos dar ninguna idea en este reporte*. (Stewart 1998, p. xxi).

La cuarta memoria es, en realidad, una larga carta que escribe la noche antes de morir, y que entrega agonizante a su cuñado Auguste Chevalier, para que la entregue a alguien que vea no si es correcta, sino la importancia que tiene.

(Será Joseph Liouville quien hará que esas memorias sean publicadas por primera vez, cosa que ocurrirá en 1846).

Le groupe

Galois observa que las simetrías del polinomio forman lo que él llama, por primera vez en la historia, *le groupe*. Las propiedades del grupo reflejan las soluciones de la ecuación polinómica: la ecuación es soluble por radicales si el grupo es soluble. (En la terminología actual: hay una cadena de subgrupos

$\{e\} = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \ldots G_{n-1} \leq G_n = G$ tal que, para $k = 0, 1, \ldots n$ se tiene

$G_{k-1} \trianglelefteq / G_k$ y G_k/G_{k-1} es abeliano).

Este resultado significa el término de la teoría centrada resolver ecuaciones y el comienzo de una nueva etapa en que predominan las estructuras.

Propagación del concepto

La definición de grupo abstracto que dará Arthur Cayley en 1854 llevará las cosas más adelante, al hacer, precisamente, abstracción de la naturaleza de los objetos que lo constituyen: ya no solo se trata de permutaciones o substituciones, como se venía haciendo, sino también de cuaterniones, matrices y cualquier otro sistema que cumpla las propiedades requeridas en la definición.

Es ese concepto abstracto el que permitió, por ejemplo, que Felix Klein los utilice posteriormente en la Geometría, como hemos indicado.

El Álgebra propiamente tal

La definición de Cayley acentúa el cambio de énfasis que había habido, al centrarse no en los objetos sino en su manipulación, y con ello abre el camino para la proliferación de estructuras que le siguieron.

El Álgebra se convierte así en lo que hoy conocemos: el estudio de las estructuras algebraicas.

Hay aun otras dos direcciones que señalar en esta evolución.

Por una parte, Nicolas Bourbaki llevará la propia noción de estructura a un ámbito más amplio, y dirá que toda la Matemática consiste en el estudio de las estructuras algebraicas, topológicas (geométricas *sensu lato*) y de orden.

En otra dirección, la teoría de categorías unificará todas esas estructuras en una sola mirada global, y que parece completar un amplio ciclo: en esa mirada, no son los objetos los importantes, sino las *flechas* entre ellos. (Cf. Mac Lane, 1972).

Construcción de los números

Como dijimos antes, la historia del álgebra está centrada en las ecuaciones y, por ende, está inevitablemente entrelazada con la de los números. Hacemos, entonces una mención explícita al término de las construcciones de los sistemas numéricos.

Aspecto analítico

Aparte de la algebraica, una razón para preocuparse de los números fue la de dar un sustento teórico riguroso al Cálculo, desechando argumentos de tipo geométrico por otros de carácter, precisamente, aritmético. Un ejemplo claro de esto es el teorema de los valores intermedios, que tiene, precisamente, importancia para las ecuaciones: si un polinomio $p(x)$ es negativo para un número a y positivo para otro número b, entonces $p(x)$ tiene una raíz en el intervalo $]a, b[$

Aspecto numérico

Ampliación de los números

En cuanto al álgebra, un problema central fue siempre y naturalmente, si había soluciones y, de haberlas, en qué ámbito habitaban.

Se podría pensar, entonces, que los números se fueron ampliando sucesivamente para encontrar soluciones de ecuaciones cada vez más demandantes; así, $x + 2 = 5$ y $2x = 6$ tendrían soluciones en $\mathbb{N}$, pero $x + 2 = 1$ obligaría a ampliar a $\mathbb{Z}$; luego $6x = 2$ a $\mathbb{Q}$; $x^2 = 4$ se puede resolver en $\mathbb{Q}$, pero $x^2 = 2$ requiere de extenderse a $\mathbb{R}$; posteriormente, $x^2 + 1 = 0$ obliga a extenderse a $\mathbb{C}$.

Así, se habría construido sucesivamente $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ (y, por otros motivos $\mathbb{H}, \mathbb{O}$, que explicitaremos a continuación).

En cualquier caso, para los griegos, los números eran los racionales positivos (tuvieron de agregar raíces, comenzando desde el teorema llamado de Pitágoras) pero no conocían los enteros negativos, y, si se pesquisa, la historia se vuelve más compleja.

La sucesión histórica

Lo anterior significó un considerable esfuerzo para la construcción de los sistemas numéricos. Sin embargo, en contraposición a la sugerencia que acabamos de hacer, el orden en que históricamente se hicieron esas construcciones podría parecer un tanto sorprendente a primera vista:

- Los Naturales, en 1889, por Giuseppe Peano, en *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*.
- Los Enteros y los Racionales, en1860, por Karl Weierstrass en *Die Eklemente der Arithmetik* (publicadas por un discípulo suyo).
- Los Reales, en 1872, por Richard Dedekind en *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* (publicado en Dedekind, 1888); Georg Cantor en *Uber die Ausdehnung eines Satzaas aus der Theorie der trigonometrischen Reihnen*. También por R. Kronecker en 1887, en *Uber den Zahlbegriff* (y Karl Weierstrass, en 1860).
- Los Complejos, en 1833, por William Rowan Hamilton como pares ordenados, y Augustin Louis Cauchy, en 1847, como expresiones polinomiales en i tal que $i^2 = -1$.
- Los Cuaterniones, en 1843, por Hamilton, en *Lectures on Quaternions* (publicado en Hamilton, 1853). (Anotamos $\mathbb{H}$, por Hamilton).
- Los Octoniones por J. T. Graves en 1843 (no publicado) y luego por Cayley (1845). (Anotamos $\mathbb{O}$).

La sucesión de las construcciones es, entonces, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, que contrasta vivamente con la idea, ingenua aun cuando interesante, que explicitamos arriba.

Repercusión en el álgebra

De todas maneras, es efectivo que los matemáticos se preocuparon de averiguar hasta dónde deberían ampliar los números para encontrar soluciones a las ecuaciones y, desde ese punto de vista, el Teorema Fundamental del Álgebra, cuya demostración por Gauss citamos más arriba, representó un verdadero alivio, pues ya no habría que buscar indefinidamente más allá de los complejos para resolver ecuaciones que tengan coeficientes complejos.

Por otra parte, fue precisamente la reflexión acerca de los números, de sus propiedades, de la posibilidad de resolver ecuaciones y preguntas similares lo que originó el desarrollo del álgebra como la conocemos hoy, en particular, de la teoría de los grupos.

Subgrupos normales y cocientes

Nuestro trabajo se propone examinar más de cerca la evolución que venimos describiendo y la dificultad de su recepción por la comunidad matemática. Para nuestro propósito, es interesante considerar, además de las fuentes originales de los conceptos, algunos textos que institucionalizan el saber alcanzado y aportan, eventualmente, nuevos resultados y concepciones más generales, según veremos en la sección siguiente. (Volveremos sobre algunos de estos textos en una sección posterior).

Al interior de ese análisis, claro está, deberemos pesquisar con especial atención la aparición y desarrollo de los subgrupos normales, los morfismos e isomorfismos, los teoremas de isomorfismo.

Normalidad y cocientes

Evolución de los conceptos

Évariste Galois

Los subgrupos normales aparecen con Galois (1831). Su idea es que (en nuestra terminología), si el grupo G de una ecuación tiene un subgrupo normal H, ella puede resolverse por medio de los grupos H y G/H (no tiene aún el concepto de grupo cociente; para él G/H es el grupo de una *ecuación auxiliar*):

Quand le groupe d'une équation est susceptible d'une décomposition propre, en sorte

qu'íl se partage en M groupes de N permutations, on pourra résoudre l'équation donnée au moyen de deux équations: l'un aura un groupe de M permutations, l'autre un de N permutations.

En nuestra terminología: dada una ecuación cuyo grupo es *G*, si este tiene un subgrupo normal *H*, aquella puede ser resuelta mediante dos ecuaciones cuyos grupos son ahora *H* y *G*/*H* (el asociado con la 'ecuación auxiliar')

Galois señala expresamente que *G* se puede particionar según lo que hemos llamado coclases derechas e izquierdas: $G = H + HS + HS' \ldots$; $G = H + TH + T'H + \ldots$, y señala que, en general, esas particiones no son la misma, y que, cuando ellas coinciden, se tiene una *décomposition propre*.

Hay, entonces, en Galois, una noción implícita de grupo cociente.

Enrico Betti

Enrico Betti (1852) hizo el primer comentario in extenso de los escritos de Galois; lo realiza a partir de los grupos de permutaciones y de substituciones.

Ya en su obra se encuentra la noción de conjugación, que él llama *derivation*.

Respecto de los cocientes del grupo *G*, él observa que a veces ellos son, a su vez, grupos; sin embargo, siempre los toma como isomorfos (en nuestra terminología) a subgrupos de *G*, de manera que no alcanza a darse cuenta de que la naturaleza de los elementos de los cocientes es distinta de la de los del grupo inicial.

En cualquier caso, fue Betti quien estableció rigurosamente la sucesión de toremas de Galois (Cf. Jordan 1870).

Camille Jordan

Camille Jordan (1870), en su *Traité des substitutions et des équations algébriques*, sigue un camino diferente, y más sistemático. Su intención es claramente estructural (*sensu lato*) y pedagógica.

Es interesante observar que, aun cuando conoce su definición abstracta, los grupos para él son, tal como lo indica el título de su obra, grupos de susbtituciones.

Jordan tiene una idea de subgrupo normal y de cociente. Dice que dos substituciones *s* y *t*, permutables en un grupo, *son congruentes según el grupo H*, si hay una igualdad de la forma $s = th$, siendo *h* una sustitución de *H*, y agrega que se puede expresar esta relación por una fórmula análoga a la de las congruencias ordinarias: $s \equiv t \bmod H$. Para él, permutable en un grupo *H* significa $sH = Hs$ y $tH = Ht$ (ie., están en el normalizador de *H*), y congruencias ordinarias son las de Gauss.

Luego prueba que si $s \equiv t \bmod H$ y $s' \equiv t' \bmod H$ entonces $ss' \equiv tt' \bmod H$.

Añade: *On dira qu'un suite de substitutions* $s_1, s_2, \ldots$ *(toutes permutables a un même groupe H) forme un groupe suivant le module H si l'on a pour tous valeurs de α et de β una relation de la forme* $s_\alpha s_\beta \equiv s_\gamma \bmod H$. (Jordan, 1873, p. 46). Así, el grupo cociente, que él anota $\frac{G}{H}$, consiste de las clases de congruencia de los elementos $s_1, s_2, \ldots$ que componen *G*.

Sin embargo, nos advierte Dieudonné (Jordan, 1961, xviii), esa idea de cociente no es aun suficientemente clara. De hecho, Jordan no intenta fabricar explícitamente un grupo cociente. (Nicholson, p. 74).

Un indicador de lo anterior es que, del teorema que hoy llamamos Jordan-Hölder, que establece que dos series de descomposición para *G* tienen la misma longitud y que sus factores de composición, salvo el orden, son isomorfos, Jordan sólo habla de los órdenes correspondientes.

Las relaciones de equivalencia

Otras ideas van a incidir en la teoría de grupos, y permitirán aclarar, en particular, la de cociente.

Varios matemáticos trabajan con la noción de relación de equivalencia, que

reseñaremos brevemente más adelante, y de la cual aquí solo consignaremos su importancia para la emergencia del álgebra tal como hoy la conocemos.

Richard Dedekind

Richard Dedekind (1872) usa relaciones de equivalencia en sus estudios acerca de los números reales. Habla de que dos sistemas de elementos son *similares* si hay lo que hoy llamamos una biyección entre ellos. Indica que esos sistemas forman *determinadas clases*, en las cuales toma *representantes*... *la clase no cambia al tomar como representante cualquier otro sistema que pertenezca a ella.* (Dedekind, 1888). Luego demuestra que se trata de, en nuestra terminología, una relación de equivalencia. Más adelante, añadiremos una contribución adicional de Dedekind al tema de los cocientes, pero hecha desde un punto de vista diferente.

Lutwig Frege

Lutwig Frege (1884), también usa la idea de equivalencia: si bien no explicita el concepto, reconoce su importancia y define los números mediante correspondencias biunívocas.

Georg Cantor

Por su parte, Georg Cantor también descubre el concepto de relación de equivalencia, por su trabajo en números transfinitos, que publica en 1895 y 1897. Define equivalencia de conjuntos y a través de ello número cardinal.

Georg Frobenius

Frobenius, en su demostración de los teoremas de Sylow (Frobenius, 1887), sigue a Jordan, pero desde la definición abstracta de grupos.

Él habla de *relaciones de equivalencia* y de *clases de equivalencia*. Trae a colación el cociente de Jordan, pero establece que cada conjunto de elementos congruentes módulo $\mathfrak{N}$ puede pensarse como un elemento, y que tales elementos forman un grupo. Es ese un paso que se necesitaba dar para una adecuada comprensión del grupo cociente.

La noción de grupo cociente

Es Otto Hölder, en 1889 (Hölder, 1889) quien expresa con precisión la noción de grupo cociente de un grupo *G* a sociado a un subgrupo normal de *G*.

Hölder examina la teoría de Galois desde la teoría abstracta de grupos.

Su tema es la reducción de una ecuación algebraica arbitraria a una cadena de ecuaciones. Para ello, se pregunta: Qué grupos corresponden a las ecuaciones auxiliares; Hasta qué punto estos grupos están definidos; Cuántos hay. Utilizar el concepto de grupo cociente es una buena manera de abordar esas cuestiones.

Primero discute los grupos simples que provienen de una serie de descomposición (*faktorgruppen*) y, si bien es claro que no le parece una idea nueva, nota que hasta allí ella no ha sido suficientemente apreciada (según Nicholson, 1993, p. 81).

Luego define la multiplicación para coclases bajo un subgrupo normal; habla de *equivalencia* y de *clases*, como Jordan, pero ahora en una manera abstracta; introduce los términos *cociente* y *factor* y la notación G/H

De esta manera, Hölder, que reconoce su aparición en Galois en forma implícita, trata sistemática y explícitamente el concepto de cociente.

Comentario

Los historiadores coinciden en que, dado que el concepto de grupo cociente está estrechamente ligado al desarrollo conceptual de la teoría: para conocer los grupos cocientes hay que pensar los grupos de manera abstracta. Ello está en directa relación, además, con la tardanza en la aparición del concepto. De hecho, los conceptos abstractos de grupo y de grupo cociente son el fruto de un mismo conjunto de matemáticos trabajando en un mismo lapso.

Por supuesto, el comentario anterior es de sumo interés para nuestro estudio, dadas las

dificultades que los alumnos tienen en la construcción mental de los grupos cocientes.

Por otra parte, encontramos muy importante la relevancia de las relaciones de equivalencia para la elucidación histórica del concepto de grupo cociente, lo que da un asidero adicional a nuestra propuesta de basar el estudio del teorema del isomorfismo precisamente en las relaciones de equivalencia.

Finalmente, la importancia de los grupos cocientes está establecida más allá de toda duda. Como dice B. L. van der Waerden, a cuya relevancia personal en nuestra historia nos referiremos más adelante: *Hoy en día, difícilmente se puede concebir una teoría de grupos sin grupos cocientes...* (van der Waerden, 1939, p. 158).

Homomorfismos

Mencionamos aquí algunas citas y otro material que dicen relación con la manera en que aparecen en la literatura los conceptos que nos interesan (y que pesquisamos en abstracto por separado en el capítulo anterior).

Ellas nos muestran, además, la manera en que están entrelazados los conceptos de subgrupo normal, cociente y homomorfismo (e isomorfismo), ya desde la aparición de ambos conceptos.

Noción de homomorfismo

La noción de homomorfismo se debe a Jordan (1870): *Un isomorfismo* (de un grupo Γ en un grupo G) *se dice que es meriédrico si muchas substituciones de G corresponden a la misma solución de* Γ, *y holoédrico en el caso opuesto*.

La noción de isomorfismo

Ecuaciones y elementos

Walther von Dyck (1882), antes de probar su famoso teorema que establece que todo grupo finitamente generado es el cociente de un grupo libre de rango finito, señala que todos ...*los grupos isomorfos están incluidos en un único grupo... la esencia del grupo no está ya expresada por una presentación particular de la forma de sus operaciones sino más bien por sus relaciones mutuas*. Es este el preludio de la concepción de álgebra moderna al que hemos aludido y al que volveremos más adelante.

Klein, (1884), insistirá: *Entonces los dos grupos son abstractamente idénticos y pueden diferir solo en el significado de sus respectivas operaciones...* (es decir, de sus elementos).

Cayley y su teorema

La manera textual (Kleiner, 1986) en que Arthur Cayley se expresa al respecto señala con claridad cómo se utilizó la idea ingenua de isomorfismo y sugiere la forma en que los alumnos pueden abordar el concepto, por oposición a la noción formal, de acceso más difícil:

a. *Un grupo abstracto está determinado por su tabla de multiplicación.*

b. *El grupo cíclico de orden n es en todo respecto análogo al sistema de raíces de la ecuación ordinaria* $x^n - 1 = 0$.

c. *Hay un solo grupo de un orden primo dado.*

d. (Teorema de Cayley) *El problema general de la determinación de todos los grupos de un grupo dado de orden n, es realmente idéntico con el aparentemente menos general problema de encontrar todos los grupos del mismo orden n, que se pueden formar con las sustituciones entre n letras.*

(En la demostración, sin embargo, dirá, refiriéndose al grupo cualquiera, que “cada uno de sus elementos puede mirarse como una substitución", y no hará mención de preservación de las operaciones).

Teoremas de isomorfismo

Wather von Dyck

Von Dyck (1882), en sus estudios acerca de grupos libres, toma uno de estos, G, generado por $A_1, A_2, \ldots, A_m$ y luego $\overline{G}$, generado por elementos $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_m}$, que se definen mediante un *proceso predeterminado* y que resultan ser imágenes homomorfas de los anteriores. (Von Dyck, 1882, sección 4).

Encuentra dos casos. En el primero, en nuestras terminología y notación, $G \simeq \overline{G}$. En el segundo caso, a cada elemento de $\overline{G}$ corresponden infinitos de G. Define entonces lo que llamamos núcleo, y prueba que es un subgrupo normal de G; hay así dos factores: el subgrupo normal y la imagen homomorfa, que es G/H.

Richard Dedekind

Richard Dedekind es más explícito. (Cf. Dedekind, 1932, *Nachlass*).

Tiene una sección de *equivalencia de grupos.* Allí, forma la imagen homomórfica de un grupo M_1 de un grupo M haciendo que a cada elemento θ de M' *corresponda* un elemento θ_1 de M_1 de manera que, en nuestra terminología, se preserve la operación.

Muestra que M_1 es un grupo y que los elementos de M que *corresponden* a la identidad en M_1 forman un subgrupo N de M.

Luego expresa M en términos de N y sus coclases, y prueba que M/N es un grupo.

A continuación, muestra que hay una correspondencia biunívoca entre las coclases y los elementos de M_1 (teorema del isomorfismo).

A pesar de que no usa los nombres de homomorfismo ni de grupo cociente, es difícil sustraerse, al respecto, a la frase de Emmy Noether (citada por Nicholson, 1993, p. 77): *Está ya todo allí en Dedekind.*

Aparición en los textos

El teorema del isomorfismo aparece por primera vez en un libro posiblemente en Burnside (1897). Este toma de von Dyck (1882) la idea de *mutiple isomorphism*, i. e., nuestros (homo)morfismos. Muestra, à la Hölder, que si Γ es el conjunto de los elementos de G que son llevados en la identidad de otro grupo por un homomorfismo, entonces Γ es un subgrupo normal de G, y que, además, el cociente, que denota $\frac{G}{\Gamma}$, es un grupo. Agrega que $\frac{G}{\Gamma}$ es *simplemente isomorfo* a la imagen de G.

J. A. de Séguier (1904), en la primera monografía escrita sobre grupos abstractos, discutirá isomorfismos, homomorfismos, automorfismos, y enunciará y demostrará el primer teorema del isomorfismo.

Los teoremas Primero y Segundo del isomorfismo aparecerán en el texto de van der Waerden (1930), quien declara que tanto los enunciados como las demostraciones pertenecen a Emmy Noether. Para entonces, sin embargo, y debido, particularmente, a la influencia de esta eximia matemática, el álgebra habrá cambiado radicalmente de apariencia. Como dijo Alexandroff en su elegía fúnebre: *Emmy Noether fue quien nos enseñó a pensar en conceptos algebraicos simples –funciones homomorfas, grupos y anillos con operadores, ideales– y no complicadas computaciones algebraicas...* (Cf. Dick, 1981).

Esa será, precisamente, la nueva manera de concebir el álgebra. (Cf., además, Noether 1926, 1934).

El Álgebra categórica

La evolución de los teoremas de isomorfismo y de morfismo debe pesquisarse, finalmente, en el ámbito de la teoría de categorías, en la cual adquieren su mayor generalidad (en *categorías abelianas)*.

Para ello, es conveniente utilizar, en particular, como fuente, la obra de Saunders Mac Lane (Mac Lane, 1972), quien, según datos que reseñamos en otro lugar (6.1.4), estuvo presente cuando Emmy Noether, Emil Artin y B. L. van der Waerden, en Göttingen, hacia 1930, consolidaron la teoría de grupos en el grado de generalidad que se buscaba. (Cf. van der Waerden, 1935).

Categorías y funtores

Según Mac Lane, *la teoría de categorías comienza con la observación de que muchas propiedades de los sistemas matemáticos pueden ser unificadas y simplificadas por una representación con diagramas y flechas*. (Mac Lane, 1971, p. 1). Así, por ejemplo, las nociones de producto cartesiano, de grupo, de homomorfismos, de cociente... todas ellas pueden ser expresadas utilizando diagramas de flechas apropiados.

Habría sido W. Hurewicz quien hacia 1940, en conferencias acerca de homotopía relativa de grupos, habría tenido *la idea fundamental de representar una función por una flecha*, (Ibid., p. 29); esa representación a la vez desplazó la notación $f(X) \subseteq Y$, habitual entonces y representó un interés central de la topología.

En 1942, Mac Lane y Samuel Eilenberg originaron la teoría de categorías.

De acuerdo a Colin Mc Larthy (Mc Larthy, 2005) el uso de diagramas matemáticos como los que aquí utilizamos para el cociente y otros más complejos se debe también a Mac Lane (Mac Lane, 1942).

Elementos universales

De acuerdo a Mac Lane (Ibíd.), la noción de elemento universal tardó en aparecer, porque puso sobre el tapete la cuestión de la falta de unicidad de los objetos matemáticos; ellos mismos son únicos salvo (un único) isomorfismo.

Había ya varios ejemplos pero, según Mac Lane, fue Pierre Samuel (1948) quien definió elemento universal; la noción fue pronto popularizada por Bourbaki (Cf. Bourbaki, 1973).

Nuestro tema

Es en este ámbito que los cocientes toman su mayor precisión y generalidad y adquieren su real relevancia, que vimos en 3.3.4: más importante que el objeto cociente es la *propiedad universal,* esto es, su condición de *elemento universal*.

Tales *objetos universales* son centrales a la Matemática, pero no en cuanto objetos (lato sensu) sino en lo que se refiere a la manera en que funcionan en las diferentes teorías. Además, están definidos salvo (un único) isomorfismo y no es, por tanto, relevante la naturaleza de los elementos que lo componen.

A manera de ilustración:

Consideremos, por ejemplo numérico, el del sistema $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Si se hace su construcción a partir de pares de enteros en los que el segundo es no nulo y definiendo una relación de equivalencia entre esos pares, ello permite afirmar que hay un objeto matemático que posee ciertas propiedades; digamos provisoriamente, es un cuerpo ordenado. Ahora bien, el trabajo en $\mathbb{Q}$ no precisa de recurrir a las clases de equivalencia de infinitos pares cada vez, sino que utiliza directamente las propiedades para realizar los cálculos. En última instancia, lo que importa es su propiedad universal: Si llamamos i al monomorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ que lleva z en $\frac{z}{1}$, se tiene que cada monomorfismo $j : \mathbb{Z} \to F$, donde F es un cuerpo conmutativo cualquiera, se puede factorizar de una única manera como $j = k \circ i$, donde $k : \mathbb{Q} \to F$ es un monomorfismo. Esta propiedad universal recoge lo más importante que se obtiene con la construcción.

Siguiendo ese orden de ideas, si reparamos en las diversas construcciones que se hacen para elaborar los diferentes sistemas numéricos a partir de "los naturales", caemos en la cuenta de que lo que posiblemente llamamos "números complejos" es uno entre más de una veintena de objetos, cuyos elementos son de naturaleza diversa, pero que satisfacen la propiedad de ser la clausura algebraica de los números reales. No distinguimos entre una y otra construcciones, sino que nos fijamos en las propiedades del resultado obtenido. (El cuerpo de los números complejos está definido de manera única salvo un único isomorfismo).

Esta manera de pensar, que nació poco antes de la segunda mitad del siglo pasado, desplaza así la atención desde los objetos matemáticos hacia las flechas entre ellos.

Para alcanzar esa forma de considerar el cociente (por ejemplo), cognitivamente se requiere de la construcción de este concepto como un *objeto* (según APOE).

Las relaciones

Las relaciones de equivalencia son centrales para nuestra aproximación al teorema del isomorfismo.

Entregamos aquí una reseña de la génesis de la noción de relación de equivalencia, adicional a lo dicho en 4.4.1. Como se verá, tal reseña no puede sino ser un tanto breve.

Cocientes y equivalencias

Se ha dicho que el concepto de grupo cociente formado por coclases tiene dos virtudes: solo usa elementos del grupo, y no depende de una representación de éste. (Cf. Nicholson, 1993. Volveremos posteriormente sobre este punto).

Pero debe considerarse, sin embargo, que la idea central en un cociente es la de partición y, por tanto y según explicitaremos más adelante, la de relación de equivalencia. Sin embargo, esta noción ha sido menos explorada respecto de nuestro tema.

La noción y la expresión

El concepto

Tal como hemos reseñado en 4.4.1, el concepto de equivalencia era ya conocido por matemáticos tales como Dedekind, Kronecker, Frobenius y Hölder, quienes participaron en forma decisiva en la génesis de la teoría de grupos y de otras estructuras algebraicas.

Lo anterior no obstante, el uso del concepto entre los matemáticos, según pudimos advertir, varía.

Hölder, por ejemplo (Hölder, 1889), define que dos elementos de un grupo son equivalentes si uno puede ser transformado en el otro por un elemento del subgrupo normal.

Por su parte, Frege, al tratar los números, explícitamente estudia la relación de igualdad entre ellos, y reconoce que la correspondencia biunívoca *es* una relación de equivalencia, aun cuando no da un enunciado explícito del concepto.

Hermann Weyl, en 1913 (Weyl, 1955), hace una discusión que lleva a la noción de relación de equivalencia, pero no utiliza el término.

Tampoco lo utiliza Bertrand Russell en (Russell, 1919), pero habla de relaciones que tienen las propiedades que llama *reflexiva, simétrica* y *transitiva*, (y agrega '...es obvio que una relación simétrica y transitiva debe ser reflexiva en todo su dominio' –salvándose de error al final–).

El propio van der Waerden (1930), en cada estructura en la que define isomorfismo, explicita las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad que este concepto posee, sin llegar a un enunciado general.

El término

La palabra *equivalente* (*ähnlich*) había sido usada para matrices por Kurt Hensel en (Hensel, 1879). (Cf. Mac Duffee, 1933).

El tema ha sido discutido recientemente por historiadores, y no parece haber suficiente claridad acerca de la aparición formal del concepto de relación de equivalencia –aun cuando, obviamente, se viene utilizando, al menos, desde Euclides–.

Epistemologías genética e histórica

Piaget y García (1989) han elaborado una visión de la Historia de la Matemática, y, muy en especial, de la del Álgebra.

Tal mirada distingue tres etapas o niveles en el desarrollo histórico del álgebra; esas etapas serían también seguidas de alguna manera por quienes aprenden álgebra hoy en día.

En las secciones 4.7.1 a 4.7.4 vamos a reseñar, en sus propios términos, la perspectiva de Piaget y García, que nos interesa tanto desde un punto de vista histórico como desde uno cognitivo. En 4.7.5 agregaremos la visión de otros autores. Añadiremos con un comentario crítico de nuestra parte, también breve en 4.7.6. La última sección es un intento de ampliar toda la perspectiva hasta allí descrita, considerando el desarrollo contemporáneo de la Matemática en una dirección determinada.

Historia y psicogénesis

Piaget y García sostienen que las diversas etapas en la construcción de distintas formas de conocimiento son secuenciales y que el mismo orden secuencial es evidente en la historia. Según ellos, un aspecto cualquiera del conocimiento no puede ser disociado de su contexto histórico y, por lo tanto, la historia del concepto puede dar alguna indicación acerca de su significación epistémica. (Ibíd., p. 7).

Piaget y García consideran que estos niveles son el mecanismo más constructivo que hallaron en su búsqueda de *los mecanismos comunes entre historia y psicogénesis.* (Ibíd., p. 29).

Las etapas

Estas etapas ocurren tanto en los procesos históricos como en aquellos que surgen en los aprendizajes (Ibíd., p. 29); ellas se aplican no solo a la historia matemática y a la evolución de los conceptos matemáticos, sino a todos los dominios y niveles de desarrollo.

Las etapas no son solo períodos en el desarrollo histórico o del aprendizaje, sino que representan además maneras de organizar el conocimiento. Cada etapa comienza con una reorganización de lo que se ha heredado de las precedentes (Ibíd., p. 8); cada vez que se alcanza un nuevo nivel, lo que es sobrepasado es integrado siempre en las nuevas estructuras.

La *construcción reflexiva* y la *generalización constructiva* (Ibíd., p. 3) se repiten indefinidamente en cada nivel sucesivo.

Subetapas

Además, cada etapa se dividiría del mismo modo en sus propios niveles (originando, por ejemplo, las etapas inter intra, inter inter e inter trans), los que aún podrían subdividirse en similares términos.

En lo que sigue, usaremos preferentemente el término *etapa* para el desarrollo histórico, y *nivel* para el cognitivo.

Aspecto histórico

Etapas en el álgebra

En el caso de las Matemáticas en general, las etapas señaladas tienen características ostensibles.

Para el Álgebra, en particular, el tema es particularmente interesante; ella parece ser un ejemplo privilegiado en términos históricos. Incluso, el proceso de algebraización de la matemática se puede interpretar en términos de la segunda de las etapas que describiremos.

Tanto si se trata de la resolución de ecuaciones como de la emergencia y evolución de la teoría de grupos, que hemos narrado brevemente, las etapas en cuestión, que se recorren en el orden en que las ubicamos en lo que sigue, son:

Etapa intraoperacional

Esta etapa está caracterizada por el estudio de formas aisladas –se aborda cada objeto por separado– y por los métodos de ensayo y error.

Etapa intraoperacional

En esta etapa se cambia el enfoque desde el analizar cada objeto a un estudio de las relaciones o transformaciones entre diferentes objetos. (Ibíd., p. x).

Etapa transoperacional,

En esta detapa, deliberadamente se ignora la multiplicidad de especificidades de los objetos o situaciones. Ella se caracteriza por la evolución de estructuras en las cuales las relaciones internas corresponden a transformaciones interoperacionales: una vez que se ha dominado y generalizado las transformaciones, pueden hacerse nuevas síntesis. (Ibíd., p. 182).

Para la mejor inteligencia de las transiciones de una a otra etapas, es necesario tener presente que hay un largo trecho entre la utilización espontánea e inconsciente de las estructuras y el hacerlas explícitas (Ibíd., p. 25).

(Nos parece, sin embargo, que la naturaleza variada de los objetos matemáticos hace que esta clasificación pueda precisarse todavía ligeramente, según veremos en 4.7.5, 'Los niveles operacionales').

El caso de las ecuaciones

Etapa intra

En esta etapa, las ecuaciones son resueltas en forma aislada, cada una según su propio método de resolución; ecuaciones ni métodos se combinan entre sí, no hay transformación alguna entre las ecuaciones. Se busca invariantes, esto es, propiedades específicas de cada caso.

Claramente, esta etapa se prolonga desde los egipcios y los babilonios hasta inmediatamente antes del esfuerzo de sistematización y análisis unificado realizado por Lagrange en 1770.

Etapa inter

Fueron varios los matemáticos que se plantearon problemas de mayor generalidad respecto de las ecuaciones.

La etapa se caracteriza por la formulación de problemas de mayor generalidad: se busca métodos comunes dentro de la diversidad; cuando se los compara, se establecen correspondencias y transformaciones entre ellas, junto con los invariantes que se requieren para tales transformaciones. Cuando se dominan y generalizan esas correspondencias, se hacen posibles nuevas síntesis.

Lagrange es un buen exponente de esta etapa: él observa que todos los métodos conocidos para las ecuaciones (cúbicas y cuárticas) utilizan sendas resolventes. Ruffini es también un buen ejemplo de focalización en el aspecto interoperacional (Ibíd., p. 157). Gauss, al demostrar el Teorema Fundamental del Álgebra, representa la culminación de uno de los procesos de generalización que tuvieron lugar.

El tránsito a esta etapa no comporta solo un aumento de la cantidad de conocimiento, sino principalmente una total reinterpretación de los fundamentos conceptuales. (Ibíd., p. 109). En esta etapa, es posible saber que algo funciona sin conocer realmente la teoría subyacente: hay un largo trecho entre la utilización espontánea e inconsciente de las estructuras y el hacerlas conscientes. (Ibíd., p 24 y 25)

Hay que notar que Lagrange se dio cuenta de que la transformación involucrada en pasar de una permutación a otra era muy relevante, pero no alcanzó a considerar la estructura que ellas formaban. De análoga manera, Gauss, en sus estudios de congruencias de números y de formas cuadráticas, trató de encontrar invariantes en los sistemas de transformaciones y se acercó mucho a la noción estructural de grupo, pero (para extrañeza de los historiadores) no lo logró.

Los trabajos de Gauss y Cauchy se ubican entre los últimos de esta etapa (Ibíd., p. 155) y son también los más importantes predecesores de la siguiente. Esos estudios y los de Lagrange y Ruffini son la última representación del período interoperacional en el desarrollo del álgebra y específicamente en la historia de las ecuaciones algebraicas. (Ibíd., p. 155)

En cualquier caso, las transformaciones que involucró fueron posibles a causa de un simbolismo abstracto y general.

Etapa trans

En el estudio de las ecuaciones, esta etapa es la fructificación de la idea de centrarlo en las transformaciones, y comienza con la definición de grupo por Galois. (Cf. también van der Waerden 1985, p. 76). Con ello, finaliza la etapa en que el estudio se centraba en las ecuaciones y sus soluciones y comienza esta, en la cual aparecen las estructuras, que predominarán en el estudio. (Piaget y García 1989, p. 9).

Ahora se puede establecer un método para abordar cualquiera ecuación –vía la eventual resolubilidad del grupo de Galois correspondiente–. Sin embargo, el objetivo mismo de estudiar la resolución de ecuaciones será reemplazado por el de estudiar las estructuras.

Propiamente hablando, se tiene el nivel trans cuando la teoría de grupos está completamente desarrollada.

Etapas en el Álgebra abstracta

Las primeras estructuras

Galois identificó y *tematizó* la primera estructura algebraica conocida. Con ello comienza la etapa transoperacional de las ecuaciones, que se formaliza cuando Arthur Cayley, estudiando *la ecuacion simbólica* $\theta^n = 1$ (Cayley, 1854) enuncia la definición de grupo (abstracto) finito.

Sin embargo y naturalmente, los estudios iniciales de estas y otras estructuras forman parte de la etapa intraoperacional de las estructuras algebraicas, que caracterizan a lo que hoy en día llamamos álgebra abstracta. (Cf. Ibíd., p. 139).

Relevancia de los números

Para Gauss, cada forma cuadrática había sido esencialmente una relación en la cual los números eran representados por coeficientes y variables. William Rowan Hamilton había construido (Hamilton, 1844, 1853), con cuádruplas de números reales, los *cuaterniones*, los cuales, en retrospectiva, tenían todas las propiedades de lo que posteriormente se llamaría un campo, salvo la conmutatividad. Por su parte, Grassman trabajó posteriormente con *n*-uplas de números, una generalización de los complejos y de los cuaterniones a la vez, con toda libertad.

Más adelante, Dedekind se dio cuenta de que no era necesario que aquellos coeficientes de Gauss fueran números, sino elementos de *campos*: había muchos conjuntos de elementos que poseían las mismas propiedades que los números, y se estudiaron las propiedades de clases de elementos que no definen un dominio específico sino una estructura común (Piaget & García, 1989, p 157). Dedekind identificó, entonces y tematizó la noción de campo, construida, por cierto, sobre la de grupo.

Predominio de las estructuras

Esta progresiva liberación del estudio respecto de los números fue lo que llevó a una nueva época, en que las estructuras predominan: Hilbert introdujo el término *anillo,* Kronecker y Dedekind, los *ideales*. Muchas otras estructuras harán su aparición en breve lapso.

El siglo XX deliberadamente seguirá persiguiendo la abstracción.

La secuencia

Aun cuando no es nuestro propósito precisar al respecto, es claro que este proceso sigue las etapas inter, intra y transoperacional.

Más aún, la aparición de las teorías de grupos y de campos es la fuente de la noción de estructura formulada en la historia del Álgebra, el *hilo de Ariadna* que ayuda a entender la transición de la etapa inter a la transoperacional. (Ibíd., 156). Para ello, se requirió una continua tematización reflexiva o una continua conceptualización de objetos matemáticos. (Ibíd., p. 171).

Subdivisiones

Subetapas

Cada etapa tiene sus propias sub-etapas intra, inter y transoperacionales.

Por ejemplo, antes de que los griegos formularan de alguna manera algebraica su conocimiento de las ecuaciones hacia el año 100, se estaba en una etapa intra-intraoperacional.

Luego, en la época en que se estudió la resolución de la cuártica, se estuvo en la etapa intra-interoperacional

El trabajo de Viète pertenece aún a la etapa intraoperacional, porque trata de problemas específicos, pero avanza ya hacia la etapa transoperacional, al pasar de los números a las variables: representa a la etapa intra-transoperacional (Ibíd., p 146).

Sub-subetapas

Ahora bien, cada tipo de ecuaciones tendría una etapa intraoperacional cuando diferentes problemas que las utilizan se resuelven de manera aislada.

Por su parte, la subetapa intra-intraoperacional se puede dividir aun en sub-subetapas:

- una en la cual todo se expresa verbalmente;
- otra en que se estudian soluciones aisladas de ecuaciones de un grado particular, para lo cual se requiere que ellas se expresen mediante métodos de alguna manera 'algebraicos' (abreviaturas, escritura sincopada, Cf. 4.1.3), y
- una tercera ya completamente simbolizada.

Avances de la etapa intra a inter-intra y de inter-inter a inter-trans resultan de *tematización reflexiva*, esto es, una conceptualización exhaustiva de objetos matemáticos progresivamente construidos, incluso antes que tales intuiciones representacionales se desarrollen en axiomas (Ibíd., p. 171)

Aspecto cognitivo

Los niveles

Según Piaget y García (1989), la naturaleza de la construcción del conocimiento es secuencial; cada etapa es el resultado de las posibilidades abiertas por la precedente y una condición necesaria para la siguiente.

En el desarrollo histórico del Álgebra, se observa que cada etapa proviene de la anterior. Los estudiantes, por su parte, parecen pasar por esos niveles y subniveles en el proceso de aprendizaje.

Piaget y García hablan de *...una sucesión regular de subniveles para cada construcción* (Ibíd., p. 167) y de que *...cada etapa involucra subniveles, que siguen la misma secuencia y por las mismas razones. Este hecho es de fundamental importancia* (Ibíd., p. 173).

Al pasar de un nivel al otro, la abstracción reflexiva lleva al aprendiz a proyectar a otro nivel lo que se deriva de uno inferior y a reconstruir lo que es transferido por la proyección dentro de un sistema más amplio.

Grupos y aprendizaje del álgebra abstracta

Las transiciones

Según Piaget y García (1989), si se consideran las etapas históricas en su conjunto, se encuentra que la intraoperacional duró unos tres milenios y medio, y que la interoperacional al menos un siglo. El estudiante, sin embargo, que haría una progresión similar, dispone de un tiempo (obvia e inevitablemente) más reducido, pero habría que cuidar precisamente que pueda hacer el tránsito de una a la otra.

En cualquier caso, mientras un aprendiz pasa de un nivel a otro, hay una integración de elementos que se han generado desde las fases iniciales (Ibíd., p. 2)

En ese proceso, hay una proyección desde los niveles altos hacia los más elementales y la reflexión causa una reconstrucción y reorganización, en un sistema más amplio, de lo que ha sido transferido como resultado de la proyección.

Hay un mismo patrón en la construcción mental global de un tópico algebraico y la correspondiente construcción histórica. Más aún, la manera en la cual las adquisiciones previas son reinterpretadas desde la perspectiva de la nueva etapa alcanzada es muy similar a lo que registra la historia.

Los niveles

El nivel intraoperacional corresponde, naturalmente, al análisis de casos específicos, por separado. En el interoperacional establecen diferencias, correspondencias y transformaciones. El pasaje desde el nivel inter al transoperacional consiste en la generalización de esas correspondencias y transformaciones. El nivel trans se manifiesta cuando los aprendices pueden realizar operaciones en operaciones.

De tal manera, es conveniente promover el que los estudiantes recorran apropiadamente ese camino.

Por otra parte, los métodos, errores y problemas encontrados en cada nivel arrojan luz sobre los aprendizajes.

Otros autores

Piaget y García no son los únicos autores que postulan estas etapas en el desarrollo histórico y cognitivo.

Varios autores han compartido y/o criticado su perspectiva en esta materia. Algunos de ellos estiman que la emergencia histórica del concepto de grupo puede tipificar los posibles niveles de aprender el álgebra abstracta, en términos similares pero con algunas diferencias con Piaget y García. Nixon (2005) contiene una reseña y referencias bibliográficas sobre varios de ellos.

El aspecto histórico

El aspecto histórico, por ejemplo, es suscrito explícitamente por Freudenthal, quien, refiriéndose a la teoría de grupos, afirma *la Historia se desarrolló de acuerdo a estos niveles* (Freudenthal 1973, p. 123). Ello no obstante, agrega que hay en la perspectiva de Piaget y García algunos malentendidos, por cuanto habrían usado cierta terminología matemática con diferentes significados (número ordinal, número cardinal, función, grupo de transformaciones e. g.); sin embargo, agrega, se trata de más de una dificultad de lenguaje que de una conceptual, y que se circunscribe, además, a los experimentos con niños y no están relacionados con trabajos posteriores, en los cuales se habla de las etapas inter, intra y transoperacional. (Freudenthal, 1973, p. 50)

El aspecto cognitivo

El aspecto cognitivo es, a su vez, compartido por investigadores tales como, los van Hiele, quienes agregan, incluso, que las tres etapas pueden ocurrir varias veces al interior de un proceso de aprendizaje que concierne a un objeto. (Van Hiele, 1959, p. 9). De todas maneras, ellos estiman que los niveles son demasiado vagos o constreñidos a un período del desarrollo del niño, y, de hecho, piensan que esos niveles no están esencialmente conectados con una edad particular, sino que son característicos de muchísimos procesos de enseñanza, sin importar la edad en la cual tienen lugar. (Van Hiele, 1959, p. 14).

Por su parte, Tall (1991) señala que seguir la manera en que un tópico se desarrolla históricamente es una guía útil, pero que no necesariamente provee el enfoque más efectivo.

El currículo en espiral

Las etapas de intra, inter y transoperacional se suelen poner en correspondencia el enfoque de aprendizaje en espiral, atribuido generalmente a Jerome Brunner. (Cf. Brunner, 1964).

Hay buenas razones y evidencias para ese enfoque. (Nos parece que una buena ilustración de ello es el teorema (general) de Pitágoras: en la primera ocasión un alumno recibe el enunciado del teorema para triángulos rectángulos (o, mejor, actividades que

permitan acercarse a él) y tiene múltiples oportunidades de comprobarlo; luego estudiará la demostración; más adelante se le ofrecerá una versión del teorema general; el enunciado puede posteriormente hacerse mediante cosenos; incluso, se puede generalizar a mayores dimensiones).

Algunos autores son entusiastas promotores de situar niveles y subniveles en una espiral creciente. Nixon (2005, *passim*), por ejemplo, señala que pequeños aspectos de los conceptos en construcción pueden ser ubicados en espiral, y sitúa incluso a un mismo teorema en diferentes etapas de la espiral que propone.

Visión crítica

Aspecto histórico

Una herramienta inestimable

Nos parece indudable que, en el aspecto histórico, Piaget y García nos han legado una herramienta para mirar a la historia del Álgebra de una manera incisiva e iluminadora. Además, es fácil extrapolar su descripción del caso del Álgebra para otras ramas de la Matemática –ellos mismos describen, por ejemplo, el caso de la Geometría–. El tránsito de una etapa a otra es fácilmente perceptible en los registros históricos.

Agregamos a continuación una breve nota enfática que creemos conveniente para la comprensión de ese tránsito y también desde un punto de vista cognitivo.

Cambio de enfoque, pero no abandono

Según la perspectiva de Piaget y García que hemos reseñado, el avance de los conocimientos y el de las teorías, cuando las hay, comporta también cambios de enfoque, uno de los más ostensibles de los cuales consiste en que los problemas que se enfrenta son otros, la teoría es, realmente, otra. Por ello, podría quedar la impresión que una época es abandonada por otra, lo que no es el caso: en esa otra teoría se pueden reconocer los problemas que la originaron.

Podemos dar varios ejemplos:

Es claro que la teoría de ecuaciones dio paso al estudio de las estructuras algebraicas; sin embargo, los cuaterniones de Hamilton, por ejemplo, de los cuales se suele describir, como hicimos, la pérdida de la propiedad conmutativa, pueden considerarse desde la perspectiva más notoria de ofrecer un ámbito en el cual una ecuación de segundo grado tiene infinitas (no numerables) soluciones.

Otra ilustración de ese hecho nos la da Arthur Cayley, que extendió el trabajo de Hamilton con sus octavas, las cuales pierden además la propiedad de asociatividad de los escalares. Fue él, como señalamos, quien dio la definición abstracta de grupos; sin embargo, él probó también el teorema que lleva su nombre, que dice que, en cierto modo, se puede seguir pensando los grupos como si estuvieran formados por permutaciones.

Por su parte, los anillos y los ideales, que constituirán una teoría aparte, fueron definidos y desarrollados en el empeño de probar el llamado Teorema de Fermat, esto es, demostrar la imposibilidad de resolver, preecisamente, una ecuación.

Tal tipo de ejemplos puede multiplicarse para otros aspectos del álgebra contemporánea, y muestra la necesidad imperiosa de no perder de vista que, en general, las etapas históricas, al dejar atrás algunos puntos de vista, no los abandonan, sino que los retoman desde otra perspectiva.

Aspecto cognitivo

Historia y psicogénesis

Es también reconocido por los estudiosos que Piaget y García han substanciado bien el paralelismo entre las etapas históricas y los niveles cognitivos.

Algunos autores, tales como Nixon (2005), concluyen de lo anterior que es importante construir un tópico matemático desde su forma histórica original, y pasar a través de los varios niveles y subniveles en la construcción del conocimiento.

Creemos que en esto se puede hacer, asimismo, algunas consideraciones adicionales.

Historia y enseñanza

En primer lugar, es claro que recurrir a la historia es un recurso muy importante para la enseñanza.

Sin embargo y según señalábamos, los problemas que enfrenta una época pretérita no son los mismos que los de la que le continúa. De hecho y por ejemplo, es frecuente que los antiguos se presenten necesariamente entrelazados con aspectos que, desde un punto de vista contemporáneo, son diferentes y aun dispensables. La simbología es distinta. La claridad de los conceptos es diferente; se puede observar que, a veces, los matemáticos no logran plantear con claridad los problemas ni las hipótesis, y, en ocasiones, expresar un concepto con claridad tarda siglos.

Al respecto, es interesante comparar las demostraciones de algunos hechos según la etapa en que se está. El teorema de Lagrange mencionado hace un rato es una buena ilustración, en cuanto al lenguaje utilizado, la manifiesta diferencia en la claridad y aun la longitud de la demostración.

Imitar sin más, en la enseñanza, la manera en que un tópico se desarrolló no solo es un proceso largo y, en la práctica, muchas veces inalcanzable: significa, en realidad, renunciar de hecho a las claridades y a los recursos teóricos que nos ofrece la Matemática actual.

Por lo demás, puede ocurrir que lo que imaginemos que es el desarrollo histórico haya procedido en un orden distinto al que podríamos imaginar, lo que hace más compleja la situación. La creación de los sistemas numéricos, cuya génesis histórica reseñamos muy brevemente antes, es un buen ejemplo de esto, uno muy relevante y decisivo.

Axiomático versus histórico

Por supuesto, los acostumbrados tratamientos axiomáticos presentan inconvenientes para quien se inicia en el estudio del álgebra, pongamos por caso, y se sabe que limitarse a ellos no es la mejor estrategia para la enseñanza de estudiantes neófitos. En el otro extremo, la perspectiva solo histórica significa, en realidad, renunciar a la historia, que es la que provee de las visiones más claras, completas y comprensivas que se alcanzan en la etapa transoperacional.

Seguramente, el didacta estará siempre tensionado entre la evolución histórica, más accesible como motivación, y el desarrollo de corte axiomático, que suele seguir un orden invertido pero, en cierto modo preciso, más claro. Para abordar este dilema, el enseñante puede recurrir a diversas y explícitas teorías didácticas, varias de las cuales hacen expresa referencia al aspecto epistemológico en su acepción histórica.

Una aproximación histórica da una mayor oportunidad de acercarse a la Matemática en cuanto actividad. Sin embargo, decidirse por una progresión solo al modo histórico requerirá de evidencias previas y manifiestas en su favor.

Los niveles operacionales

Presentamos aquí una consideración, en comparación con otras que venimos discutiendo, bastante menor, pero que, en atención a una descomposición genética posterior, nos parece necesario explicitar.

El nivel intraoperacional de un esquema se caracteriza por la ausencia de relaciones entre los componentes; el nivel siguiente, por el contrario, porque esos elementos están (en principio) todos relacionados entre sí.

Ahora bien, hay conceptos que, pese a su complejidad eventual, se encapsulan en objetos de contornos bien definidos y de nivel intraoperacional fácilmente identificable. Es el caso del de grupo, por ejemplo.

Cuando se trata funciones o morfismos, es también claro que, en términos generales, la encapsulación se hace muchas veces sobre la conexión, digamos, entre pares de objetos dados, mediante una correspondencia ya definida. Una ilustración de esto se tiene para

funciones definidas por fórmulas.

Lo anterior no obstante, hay también enunciados acerca de morfismos para los cuales los elementos relacionados no están dados de antemano, pues se tiene al principio uno (variable) y es necesario construir el morfismo que se encargue de, a su vez, fabricar la imagen de aquel, de manera que, en realidad, la correspondencia es parte de la demostración, pero no del enunciado del objeto en cuestión. Un caso de esto es nuestro teorema RE/P, en el cual, dada un a relación de equivalencia, es necesario construir la partición que es su imagen según el teorema –y así explicitar la correspondencia–. Por supuesto, desde una perspectiva puramente matemática, no hay distinción entre los dos últimos casos; sin embargo, desde un punto de vista cognitivo sí hay la diferencia que acabamos de explicitar. Para casos como este, el nivel intraoperacional sigue existiendo, naturalmente, pero, nos parece, tiene desde el comienzo mayor complejidad que lo habitual.

Ahora bien, entre la negación y la afirmación del cuantificador universal correspondiente a las dos afirmaciones iniciales (no hay conexiones, todo se conecta), hay amplio espacio para situaciones intermedias, de manera que aquella expresión de la distinción entre los niveles parece un tanto drástica.

Por cierto, tales situaciones se pueden incluir en los niveles intermedios de las etapas. Sólo que, en un caso como el del teorema RE/P, no se comienza, a nuestro entender, por el nivel, digamos, *intra-intra-intraoperacional.*

Curriculum en espiral

Si bien la imagen de curriculum en espiral reseñada brevemente arriba es interesante y sugerente, nos parece que obedece a una concepción excesivamente lineal de la construcción del conocimiento, la cual, curiosamente, parece a veces poner a la consideración puramente matemática por encima del aspecto cognitivo, ya que el orden propuesto debe establecerse según los requisitos matemáticos que se ponen en juego, necesariamente en sucesión lógica.

Por el contrario, APOE, por ejemplo, provee de ejemplos de conceptos cuya construcción mental es simultánea, aun cuando uno sea un prerrequisito del otro; la encapsulación de los conceptos de grupo y de subgrupo (Cf. Brown, De Vries, Dubinsky & Thomas, 1997) son una muestra muy relevante para nosotros.

Es conveniente, además, poner esta materia en relación con la evolución histórica de los conceptos: según los historiadores (Cf. 4.4.1, Comentario) los conceptos de grupo y de grupo cociente se formalizaron también en forma simultánea.

Desarrollo ulterior de las estructuras

Proyectar la perspectiva

Piaget y García describieron los grupos de transformaciones como *de carácter transoperacional* en sí mismos: los elementos del grupo son, precisamente, transformaciones. (Piaget y García, 1989, p. 168)

Agregaron que la etapa trans de la teoría de grupos abre la Matemática al estudio de las estructuras, que serán las que predominarán de allí en adelante. (Ibíd., p. 157)

Lo que sigue es un comentario a esas dos frases, que procura proyectar la perspectiva de Piaget y García al desarrollo ulterior de las estructuras, que terminan de situar los teoremas que nos ocupan en sus aspectos matemático, histórico y cognitivo.

Estructuras y morfismos

Las estructuras

En primer lugar, las estructuras que fueron apareciendo y desarrollándose ya entrando en el siglo XX no son solo algebraicas. Tal como lo señala Bourbaki, ellas son también estructuras de orden y topológicas –es decir, geométricas– y una combinación variable de ellas (Bourbaki, 1960).

Los diversos sistemas numéricos, por ejemplo, están construidos sobre una articulación

de sus aspectos algebraicos, topológicos y de orden; $\mathbb{R}$ es el único campo ordenado completo, e. g. –lo que supone, por ejemplo, compatibilidad de las operaciones con el orden–.

Los morfismos

La noción de morfismo se da en distintas versiones en las diferentes teorías: morfismos de anillos, funciones lineales, funciones continuas, funciones crecientes, etc.

En el siglo XIX ya se conocía los morfismos que hoy se suelen llamar *representaciones:* de un grupo en un grupo de permutaciones, o en un grupo *clásico* de matrices (lineal, ortogonal, etc.).

La noción de (homo)morfismo de grupos es, por cierto, transoperacional.

Por otra parte, en su versión particular de isomorfismo da mayor claridad al concepto de grupo: dos grupos isomorfos no son, desde el punto de vista estructural, substantivamente distintos; ahora bien, si son isomorfos bajo un único isomorfismo, se puede reemplazar uno por el otro en cualquiera afirmación que diga relación con sus propiedades estructurales.

Por consideraciones como las anteriores, los morfismos fueron cobrando cada vez mayor relevancia. Los teoremas de homomorfismos, en particular, adquirieron importancia.

Morfismos entre teorías

Ahora bien, en el transcurso de investigaciones en topología, se llegó a la idea de que, para resolver ciertos problemas, había el camino de mirar el problema desde algunos invariantes algebraicos y ver si esos problemas tenían solución en una teoría algebraica (grupos, y después, A-módulos). Por ejemplo, si dos espacios topológicos eran homeomorfos, sus grupos de homotopía y los de homología deberían ser isomorfos, lo que proveyó de una condición necesaria para la existencia de un homeomorfismo. Esta idea generalizó la noción de (homo)morfismo.

De esta manera, el estudio abstracto de las teorías no transcurrió en absoluto de manera independiente: no solo es el caso de que unas teorías únicamente se construyeron sobre otras (los anillos sobre los grupos, pongamos por caso), sino que se establecieron explícitamente conexiones entre ellas.

Categorías

Las categorías

Para tratar las anteriores ideas en su generalidad, Eilenberg y Mac Lane construyeron, en 1942, el lenguaje de las *categorías* (Eilenberg & Mac Lane, 1942). (Cf. también Mac Lane, 1972, p. v).

Como hemos indicado en 3.3, se reúne bajo esa idea las teorías de los conjuntos, los grupos, los monoides, los anillos, los A-módulos, los K-espacios vectoriales, los grupos topológicos, etc., etc.

El pasaje de una teoría a otra (y ciertos morfismos dentro de la misma teoría) fue recogido en la idea de *funtor,* que describimos en (3.3.2) y que generaliza largamente la idea de (homo)morfismo.

Los primeros de ellos fueron los que mencionamos recién: a cada espacio topológico X se asigna su n-ésimo grupo de homología $H_n(X)$, y a cada función continua $f : X \to Y$ un homomorfismo de grupos $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$.

En el álgebra, los *funtores olvido* (de estructura) aparecieron también de manera natural: asignar a cada grupo el conjunto subyacente y a cada morfismo de grupos la función subyacente; a cada anillo el grupo subyacente y a cada morfismo de anillos el morfismo de grupos subyacente, etc.

Es claro entonces que la teoría de categorías representa ciertamente una etapa transoperacional del estudio de las estructuras, en particular, de las algebraicas.

Las flechas

Ahora bien, dada la relevancia cada vez mayor de las flechas en las diferentes teorías,

se estima que las categorías consisten principalmente de flechas, y que el estudio de las categorías podría también ser descrito como aprender *cómo vivir sin elementos, usando flechas en su reemplazo*. (Mac Lane, 1972, p. v).

Tales flechas, por supuesto, son primeramente los morfismos, pero también, por extensión, los funtores.

Es claro que esta mirada representa una etapa *inter* en la teoría de categorías. (Ella está expresada claramente en Ehresmann, 1965).

Elementos universales

En mayor profundidad, lo importante en la teoría de categorías, dice Mac Lane, es la idea de par de funtores adjuntos, que aparecen *en todas partes* en la Matemática (Mac Lane, 1972, p. v), y de la cual las construcciones universales son un caso; ahora bien, estas construcciones se expresan también como *elementos universales* de un funtor hacia la categoría de conjuntos (según vimos en 3.1.11, definición 83 y proposición 84, y luego en 3.3.3, definición 112 y ejemplo 114, 2).

La generalidad del concepto de elemento universal se aprecia bien al comprobar que son elementos universales para determinados funtores: la base de un espacio vectorial, el cuerpo de fracciones de un dominio de integridad, la completación de un espacio métrico (y varias generalizaciones de estos tres casos), el núcleo de un morfismo (para un funtor *contravariante*) y otros objetos igualmente relevantes. Un ejemplo importante para nosotros es el cociente G/N de un grupo G sobre un subgrupo normal N, o, más precisamente, la propiedad universal de la proyección $\pi_N : G \to G/N$ que vimos en 3.1.11, definición 83 y proposición 84. (Cf. Mac Lane, 1972, p. 57).

Las extensiones de Kan

En el nivel más profundo, la noción de extensión de Kan recoge las construcciones básicas de funtores adjuntos, y por tanto, de elementos universales. En realidad, todos los conceptos de la teoría de categorías son extensiones de Kan (Ibíd., pp. 244-246).

Nos parece que esta afirmación representa necesariamente una etapa trans trans transoperacional, que da una idea de la generalidad alcanzada en el proceso que describieron Piaget y García.

Monoide generalizado

Una manera alternativa de concebir una categoría es la de un monoide generalizado: una estructura parecida a un grupo, salvo que no necesariamente tiene inversos para cada elemento.

Así, es muy interesante observar que la idea de grupo sigue siendo fundamental en el estudio de las estructuras de todo tipo. Un largo camino desde Galois.

Piaget y García (1989, p. 133) estimaron que la idea grupo puede ser usada para especificar la naturaleza de algunas de las estructuras fundamentales de la inteligencia humana.

Una noción interesante, al respecto, es la de explorar la noción de que las categorías puedan cumplir esa función. Es una tarea de dificultad considerable (los objetos categóricos son bastante remotos en relación con los procesos cognitivos elementales); al fin y al cabo, así como los grupos fueron útiles para clarificar la naturaleza de las (soluciones de) las ecuaciones, las categorías permiten aquilatar con mayor nitidez el concepto de grupo (y muchos otros que nos interesan).

Alternativa cognitiva

Una manera alternativa para recoger este desarrollo de la Matemática de manera cognitiva, o, más precisamente, una aproximación al aprendizaje de la Matemática en la cual se pueden reconocer algunos elementos matemáticos aquí descritos es la Teoría de registros representaciones semióticas de Raymond Duval. Él releva la importancia de disponer de una pluralidad de representaciones semióticas para un mismo objeto, y sus

conceptos de *tratamiento* y de *conversión* son muy cercanos a la idea de morfismo y, en general, de flecha que venimos reseñando en esta sección. (Cf. Mena, 2007).

La teoría APOE

RUMEC y el ciclo ACE

Desde 1980, Ed Dubinsky ha venido desarrollando una aproximación distinta a la enseñanza. Para ello, fundó, con un equipo de investigadores, el grupo *RUMEC* ya mencionado, con el propósito amplio de contribuir al conocimiento básico acerca del pensamiento humano y de servir a ese objetivo especialmente en Matemáticas.

Con ese fin, el grupo desarrolla investigación en educación matemática y aportes al desarrollo curricular en el área en una forma que reviste tres componentes: análisis teórico, tratamiento instruccional y datos empíricos. (Cf. Dubinsky, Dauterman, Leron & Zazkis, 1994; Leron & Dubinsky, 1995; Asiala, Dubinsky, Mathews, Morics & Oktaç, 1997; Clark, De Vries, Hemenway, St. John, Tolia & Vakil, 1997).

Ventajas de la teoría

Esta visión integrada contrasta con la falta de referencia a la investigación en el aprendizaje del álgebra abstracta que se observa con frecuencia en los diseños instruccionales.

Nos interesa este marco por varias razones.

Una de ellas es que pone muy en el centro y en el inicio de las investigaciones el saber matemático del investigador, lo que da un soporte que ocasionalmente se echa de menos en otras propuestas.

Otra consiste en que considera un ciclo de investigación que permite integrar bien las evidencias empíricas en los diseños de investigación y en las propuestas didácticas, y aun en la corrección de los diseños iniciales: a la postre, una buena manera de ir enfrentando el aspecto epistemológico global.

Por otra parte, nuestra pesquisa acerca del estado de la enseñanza del teorema que nos interesa y, más en general, de la del álgebra abstracta, manifiesta que los estudios más desarrollados en este ámbito se han hecho con la teoría APOE, de manera que podemos aprovechar sus hallazgos –si bien nos apartaremos deliberadamente de algunos de sus enfoques–.

El desarrollo que haremos de la teoría y de sus antecedentes explicitará también, en mayor medida, nuestras razones para adoptar este marco teórico.

Plan del capítulo

Comenzamos con la fuente de la teoría, los trabajos de Piaget acerca de la abstracción reflexiva.

Continuamos con una descripción de la teoría APOE; se incluye aquí en ciclo de investigación, del cual forma parte la Descomposición Genética, central a la teoría.

Reseñamos finalmente algunos aspects adicionales, de interés para la comprensión de la teoría.

Antecedentes

Piaget y García

La abstracción

Ed Dubinsky, el creador de la teoría APOE, ha señalado que un antecedente muy relevante para su teoría lo constituyen los trabajos de Jean Piaget, quien se propuso estudiar el desarrollo del conocimiento –el proceso de abstracción–y luego lo continuó en colaboración con Rolando García,

En sus estudios, Piaget distinguió tres tipos de abstracciones, que reseñamos muy brevemente a continuación.

Abstracción empírica

En primer lugar, está la abstracción empírica, que tiene como fuente los objetos del mundo externo (objetos físicos, personas, el ambiente que le rodea), y que es la que adquiere un niño a través de la manipulación de los objetos a su alcance, como parte de su interacción con el medio: el proceso de observación. Así obtiene, por ejemplo, una noción de la dureza de un cuerpo, del peso, del sabor, de la longitud, etc.

Abstracción reflexiva

Pero Piaget nota, como otros, que las observaciones empíricas no pueden explicar por sí solas el proceso de desarrollo del pensamiento, pues no revelan las relaciones entre los fenómenos. Estas relaciones, dice Piaget, se originan en la coordinación de acciones, que él llama *abstracción reflexiva* (o 'reflexionante' –*réfléchissante* en el original–). Esto es particularmente relevante respecto del conocimiento lógico-matemático, que no existe por sí mismo en la *realidad* (esto es, en los objetos): su fuente está en el individuo, que construye aquellas relaciones.

Abstracción pseudo-empírica

Piaget aclara que, si un individuo interactúa con los objetos y establece relaciones a partir de ello, no está abstrayendo directamente a partir de aquellos, sino utilizándolos como apoyo para establecer coordinaciones. Piaget llama a este proceso abstracción pseudo-empírica, puesto que parecería empírica por estar acompañada por experiencia práctica sobre objetos, sin embargo, el individuo está, en realidad, haciendo abstracción reflexiva (es el caso de la investigación experimental).

Asimilación

Naturalmente y según se puede comprobar, la construcción que un individuo hace de un concepto está ligada tanto a las estructuras que ya posee como a las ideas que pueda hacerse de ese concepto a partir de su experiencia con el mismo: cuando aborda una situación matemática –digamos, un problema–, debe recurrir a sus propias ideas acerca de los conceptos implícitos en la situación. Como resultado de su reflexión acerca del problema, hace una reconstrucción de su conocimiento, reestructurándolo; a ese mecanismo, Piaget y García (1989) lo llaman *asimilación*.

La cuestión epistemológica

Errores

Desde la perspectiva descrita, los errores conceptuales y de cálculo, e. g., que aparecen durante el proceso de aprendizaje, son considerados en una óptica cercana a la de Piaget (1975): cuanto se construye en determinado nivel de desarrollo puede ser adecuado para el ambiente matemático de ese momento, pero cuando hay que confrontar fenómenos nuevos se debe reconstruir los conceptos en un nivel superior; si esa reconstrucción se retrasa, alguna noción, aún apropiada para el nivel anterior, puede ser, sin embargo errónea para lo que ahora se necesita.

En tales ocasiones, el estado del aprendiz puede comportar una dificultad de carácter epistemológico, pues tenderá a interpretar la experiencia de ese momento de acuerdo al conocimiento de que dispone –incluyendo concepciones erróneas–, e ignorar, por tanto, las contradicciones que se producen.

Equilibrio/desequilibrio

Lo anterior releva la importancia de las situaciones desequilibrantes, que ayudan a confrontar concepciones y experiencia.

Por otra parte, hay evidencias de que la manera en que se desarrolla el conocimiento de un individuo depende del orden en que se ve enfrentado a los conceptos y sus propiedades y de las características explícitas de las interacciones que tiene con ellos.

Debido a lo anterior, es importante poner al aprendiz en situaciones que favorezcan esta dinámica desequilibrio/equilibrio.

Además, ya que un concepto incompleto puede ser considerado como un estadio intermedio en el aprendizaje, la estrategia pedagógica no consiste en corregir al alumno, sino en favorecer su progreso más allá de ese estadio intermedio: parece razonable esperar que pase las etapas señaladas; en caso contrario, puede estar tratando de ver una situación desde un nivel inapropiado.

Los esquemas y la tríada

Un esquema es "la estructura o la organización de acciones, tales como se transfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas". (Piaget & Inherler, 1978, p. 20). El desarrollo de un esquema es un proceso dinámico y cambiante, que obedece a ciertos mecanismos internos.

Un esquema se desarrolla pasando por tres fases o períodos, la *tríada intra-inter-trans*, que se suceden según un orden fijo, y que están relacionados con las etapas operacionales descritas para el ámbito histórico.

Piaget y García estiman que esos niveles se pueden determinar al analizar el desarrollo de un esquema de cualquier concepto matemático.

Fase intra

Lo propio de la fase-intra es "el descubrimiento de una acción operatoria cualquiera, y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas". Hay limitaciones en este nivel: por una parte, esta acción operatoria no se coordina con otras "en un agrupamiento organizado"; además, el análisis interno de esa acción operatoria contiene errores y lagunas en la inferencia, que se corregirán progresivamente. (Piaget y García 1989, p. 163)

Fase inter

La fase-inter incorpora ya coordinación entre las acciones operatorias: comprendida ya una operación inicial, se puede deducir de ella otras que están implicadas, y coordinar el conjunto con aun otras que sean semejantes, constituyendo así "sistemas que involucran ciertas transformaciones". La situación es, entonces, nueva, pero hay aún constricciones, que se originan en el hecho de las composiciones "solo pueden proceder con elementos contiguos". (Ibid., p. 165).

Fase trans

La fase-trans se construye en función de lo anterior, e involucra, además de las transformaciones, síntesis entre ellas, las cuales llegan a constituir "estructuras" (Ibid. p. 167).

La abstracción reflexiva

Si volvemos nuevamente nuestra atención a lo que es la abstracción reflexiva, podemos precisar ahora que es el mecanismo mediante el cual el individuo se moviliza de una a otra fases (Ibid.), y que se lleva a efecto mediante actividades (físicas o mentales del individuo que tienen dos partes, indisolublemente unidas: la elevación del conocimiento que este posee a un plano superior, y la reorganización y reconstrucción de ese conocimiento para formar nuevas estructuras.

La teoría APOE

Tal como señalamos con anterioridad, la sigla APOE proviene de los términos *acción, proceso, objeto* y *esquema.* (APOS, en el original en inglés).

Abstracción reflexiva à la Dubinsky

Dubinsky explica que tomó dos aspectos fundamentales de Piaget y García para crear la teoría APOE con el objeto de describir el desarrollo del *pensamiento lógico-matemático* (cuyo significado explicitamos luego) desde sus etapas iniciales a las más avanzadas.

Epistemología y psicología

En primer lugar, Dubinsky subscribe que hay una relación cercana entre la naturaleza de los conceptos matemáticos y su desarrollo en la mente de un individuo (Dubinsky,

Weller, McDonald & Brown, 2005; Cf. Piaget, 1970, pp. 7-10). De allí que la teoría procure y exhiba explicaciones de carácter epistemológico y psicológico.

La abstracción reflexiva y sus tipos

En segundo término, Dubinsky nos dice que el fundamento principal de su teoría es el concepto de abstracción reflexiva, que él y sus asociados utilizan para describir cómo un individuo realiza ciertas construcciones mentales acerca de un concepto determinado. En su versión, la abstracción reflexiva es el proceso por el cual se construyen objetos mentales a través de acciones mentales sobre esos objetos (Ibíd., p. 4).

Dubinsky considera cinco *tipos de abstracción reflexiva* o *mecanismos*: *la interiorización, la coordinación, la encapsulación, la generalización y la reversión*. Ellos originan lo que llama las *construcciones*: *acciones, procesos, objetos y esquemas* –a partir de las cuales se denomina la teoría– (Ibíd., p. 5)..

El conocimiento matemático

Para él, el conocimiento matemático de un individuo es *su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar esas situaciones*. (Dubinsky, 1996).

Al reflexionar sobre un concepto o problema, el individuo hace, como dijimos, una reconstrucción de su conocimiento, y lo reconstituye así mediante una reorganización de sus estructuras en un nivel más alto, al interior del cual el nuevo conocimiento es asimilado. De esta manera, las estructuras que el estudiante ya posee determinan su construcción del nuevo concepto, y las conexiones entre ellas definen a su vez el conocimiento matemático de ese individuo. De allí que Dubinsky y su grupo se propongan ayudar a los estudiantes a construir las estructuras apropiadas para cada nuevo concepto, estableciendo conexiones adecuadas de ese concepto con las estructuras previas.

Las construcciones mentales

Noción primera de esquema

Dubinsky considera que un esquema es la construcción más amplia y acabada que el individuo realiza de un concepto, la forma en la cual ese concepto existe en la mente: la totalidad del conocimiento de ese individuo que, para él, está conectado de manera consciente o inconsciente con un tópico matemático particular –grupo, función, etc.–, (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996); una estructura inconclusa que evoluciona por la asimilación de nuevos objetos y la reacomodación de las estructuras de acuerdo a las nuevas relaciones que estos establecen.

Ahora bien, construir esquemas es un proceso complejo, para cuya descripción se necesita explicitar los mecanismos que el individuo pone en juego, partiendo de los más elementales, según hacemos a continuación.

Mecanismos mentales

Enfrentado a un nuevo concepto matemático, el individuo realiza transformaciones sobre otros objetos construidos previamente para construir este nuevo objeto (Dubinsky et al., 2005).

Según se podrá apreciar, algunas de esas construcciones (acciones y procesos) son transformaciones dinámicas, que pueden transformar otro tipo de construcciones, estáticas (objetos).

Acciones

Si las transformaciones que el individuo hace se realizan obedeciendo a estímulos externos, decimos que el individuo posee una *concepción acción* del nuevo concepto: él realiza transformaciones paso a paso determinadas por algún conector externo. Las acciones son más limitadas que otras construcciones mentales, pero son el principio crucial en la construcción del conocimiento. (Dubinsky, 1996, p. 34).

En matemáticas, una acción es una transformación de objetos matemáticos que es realizada por un individuo mediante un algoritmo explícito y que el sujeto percibe como conducida desde el exterior (Dubinsky et al., 2005).

La noción de acción incluye la determinación de que alguna propiedad sea satisfecha.

Por ejemplo, si se trata de abordar una situación que involucre el concepto de morfismo de grupos, el estudiante requerirá de una fórmula explícita que le indique cómo verificar la propiedad de preservar la operación del grupo, y de una pregunta-patrón: *¿Es f un morfismo?* En este como en otros casos, las acciones se realizan repitiendo un algoritmo y se caracterizan por el uso de la notación de los objetos sin consciencia de su naturaleza.

Procesos

Ahora bien, si el individuo repite y reflexiona sobre una acción, esta puede ser *interiorizada* en un *proceso mental*; esto es, se construye una estructura mental que hace el mismo trabajo que la acción externa: una operación interna que, ya sea realiza esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, o solo es imaginada como tomando lugar, pero sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos. El individuo posee una concepción proceso del concepto cuando puede reflexionar sobre él sin realizar acciones específicas.

Una evidencia de la interiorización del concepto de morfismo de grupos es que el estudiante pueda reconocer si una función *f* es (o no) tal, al verificar mentalmente si se preservan la operaciones.

Otra manera de generar un proceso es por la *coordinación* de dos o más procesos, mecanismo que permite establecer relaciones entre ellos, por ejemplo mediante conectores lógicos, para determinar un nuevo proceso. (Ibíd. Tendremos oportunidad de mostrar un ejemplo de esto, a propósito de los morfismos (Cf. 8.4.1).

Además, puede *revertirse* un proceso para obtener un nuevo proceso.

Objetos

Cuando el individuo piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad, decimos que ha *encapsulado* el proceso y que posee ahora una *concepción objeto* del concepto en cuestión. Ello comporta la idea de que tratar a algo como un objeto puede llevar a hacerlo un objeto: al intentar realizar esas acciones aparece la necesidad de que haya *'alguien'* (algo) que posea la propiedad, y pensar acerca de ello puede llevar a la encapsulación. (Cf. Dubinssky et al., 2005).

"Un individuo tiene una concepción objeto de un concepto si él/ella puede desencapsular el concepto de vuelta al proceso subyacente y construir transformaciones que pueden ser aplicadas al objeto" (Ibíd. p. 5).

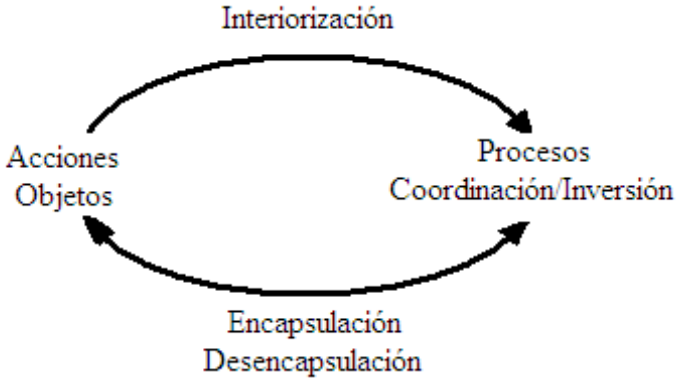


Figura 4. APOE (Asiala et al. 1996)

La encapsulación se logra cuando, para resolver una situación, el individuo hace una transformación sobre, precisamente, un objeto. Por ejemplo, si preguntamos si acaso la

composición de morfismos de grupos es también un morfismo, o si acaso cuando un morfismo de grupos es invertible su inversa también lo es, es posible responder solo si los morfismos son considerados como objetos.

Hay muchos casos en que es esencial volver desde un objeto al proceso que lo forma. Según la teoría ello solo puede realizarse *desencapsulando* el objeto, esto es, volviendo al proceso que fue encapsulado para construir ese objeto.

En la desencapsulación, el individuo puede obtener únicamente los procesos que fueron encapsulados para construir ese objeto. (Dubinsky, 1997, p. 98).

La coordinación de procesos genera nuevos procesos que a su vez se encapsulen en nuevos objetos. La desencapsulación, al volver sobre el proceso que determinó un objeto, permite precisamente coordinar ese proceso con otros. En nuestro ejemplo, para establecer que la compuesta $g \circ f$ de dos morfismos es también un morfismo, primero es necesario ver a ambos como objetos; en segundo lugar, se requiere desencapsular a g, cuyo proceso se necesita para formular la composición: el proceso de g se aplica sobre el objeto f, para determinar un nuevo proceso que se encapsule en $g \circ f$. (Cf. Roa y Oktaç, 2010).

Desde esta perspectiva, las dificultades que el estudiante puede tener con el simbolismo matemático provienen de tratar de aplicar rótulos antes de que los objetos hayan sido construidos vía encapsulación. Una vez que el objeto existe en la mente, es fácil asignarle un rótulo. Por otra parte y tal como recogimos en nuestra descripción de la concepción objeto, haberla alcanzado conlleva la posibilidad de desencapsular el objeto en el proceso que lo formó (Dubinsky et al., 2005, p. 5), de modo que se favorece la interpretación de una representación simbólica.En esta óptica, por tanto, el rol del simbolismo matemático es subsidiario.

Se considera que el mecanismo de encapsulación es el más importante para la construcción del conocimiento matemático, pero, también, que es el más difícil de lograr: puede dilatarse mucho o incluso no ocurrir.

(En el apartado siguiente, se incluye otra manera de construir objetos).

Los esquemas como construcciones mentales

Ahora podemos expresar, siguiendo a Trigueros (2005) que un *esquema para una parte específica de la Matemática es la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente.*

La *coherencia* es una característica fundamental del esquema, y se refiere a la capacidad del individuo para reconocer las relaciones que hay al interior del esquema y establecer si este le permite solucionar una situación matemática particular, y usarlo cuando corresponda.

Al tratar un problema matemático, el estudiante evoca un esquema y lo *desenvuelve* para tener acceso a sus componentes, utiliza relaciones entre ellas, y trabaja con el conjunto. Las relaciones que ocupa y el tipo de construcción del concepto que muestra dependen de su conocimiento matemático; a mayor conocimiento, habría más relaciones entre esos conceptos y la estructura sería más coherente.

El esquema está siempre en evolución, y puede llegar a considerarse como un nuevo objeto, al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha *tematizado*. *Tematizar* es una manera para la construcción de objetos, alternativa a la encapsulación de procesos –por tanto, puede hacer luego acciones sobre el esquema–.

Para ello, el individuo separa las componentes del esquema y reúne las que requiere para la solución de un problema que precisa de esas componentes. (Cf. Trigueros, 2005, p. 27)

Un esquema tematizado formará parte de otros esquemas, lo que posibilitará erigir diversas conexiones entre los conceptos previos y los que el individuo busca integrar a las

estructuras que ya posee. (Dubinsky, 1994)

De esta manera, el mecanismo de asimilación de Piaget y García responde principalmente a la construcción de nuevos esquemas en función de los precedentes o a la acomodación de estos últimos. Asimilar es, por tanto, inseparable de estructurar: el individuo aprehende el objeto y le da una forma que toma de las estructuras que posee, ajustándola a ese contenido, y el propio esquema que asimila se modifica al acomodarse en función del objeto asimilado.

Niveles operacionales de un esquema

La sola descripción de las acciones, procesos y objetos que intervienen en el tratamiento de una parte específica de la Matemática no explicita el grado de formación del esquema correspondiente, la cual depende, como decíamos, de las relaciones que el estudiante establece entre las distintas construcciones mentales que conforman el esquema.

Por ello, es necesario incluir, en la descomposición genética, los niveles o fases operacionales del esquema. Estas fases están aún en discusión por los especialistas. Nosotros seguiremos aquí a Dubinsky & Mc Donald (2001, pp. 7-8):

"El mecanismo de la tríada consiste en tres etapas, referidas como *inter*, *intra* y *trans*, en el desarrollo de las conexiones que un individuo puede hacer entre constructos particulares dentro del esquema, tanto como la coherencia de esas conexiones.

- La etapa intra del desarrollo de un esquema se caracteriza por una focalización en acciones procesos y objetos individuales, en forma aislada de otros ítems cognitivos de naturaleza similar. Por ejemplo, en el concepto de función, un individuo en el nivel intra tendería a focalizarse en una única función y en las varias actividades que podría realizar con ella. .
- La etapa inter se caracteriza por la construcción de relaciones y transformaciones entre esas entidades cognitivas. En esta etapa, un individuo puede comenzar a agrupar ítemes y aún llamarlos con un mismo nombre. En el caso de las funciones, el individuo podría pensar acerca de sumar funciones, componerlas, etc., y aun comenzar a pensar de todas esas operaciones individuales como instancias de una misma clase de actividad: transformación de funciones.
- Finalmente, en la etapa trans el individuo construye una estructura subyacente implícita oi explícita a través de la cual las relaciones desarrolladas en la etapa inter son entendidas y que da al esquema una coherencia mediante la cual el individuo puede decidir qué pertenece a la amplitud del esquema y qué no pertenece. Por ejemplo, un individuo en la etapa trans del concepto de función podría construir varios sistemas de transformaciones de funciones tales como anillos de funciones, espacios vectoriales de dimensión infinita de funciones, junto con las operaciones incluidas en tales estructuras matemáticas".

Una descripcion similar se encuentra en Trigueros (2005).

Descomposición genética

Como decíamos, un interés principal de la teoría APOE es describir la manera en que se construye el conocimiento matemático; para ello, se diseña una Descomposición Genética (Clark et al., 1997), que describe en detalle, y de acuerdo a la conceptuación descrita, los aspectos constructivos de un concepto o, más en general, de un fragmento de conocimiento matemático. Su objetivo es explicitar un camino factible de construcción de un concepto por parte de un individuo, en términos de construcciones y mecanismos mentales, de tal manera que él pueda seguirlo para tener buen éxito en su empeño.

Esa descomposición genética no es única, pues depende de los caminos de construcción por parte del individuo y de sus estructuras mentales previas.

Ciclo de investigación

RUMEC propone un ciclo de investigación compuesto de tres componentes: Análisis teórico; Diseño e implementación de enseñanza, y Observación, análisis y verificación de datos. (Asiala et al., 1996).

Este ciclo procura conseguir una descripción próxima y detallada de la construcción de los conceptos matemáticos, pero no es ese su único objetivo, según se hará explícito a continuación.

Análisis teórico

Finalidad

El objetivo principal del Análisis teórico es diseñar una Descomposición Genética, lo que permite *...mediante la descripción de las construcciones mentales, modelar la epistemología y cognición del concepto matemático estudiado*. (Roa & Oktaç, 2010, p. 90).

El análisis teórico consiste fundamentalmente en describir las construcciones mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas) y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, asimilación) que un individuo puede realizar para construir un determinado concepto matemático.

De esta manera, es posible considerar las interrelaciones que un estudiante puede establecer entre las construcciones que ya ha hecho y un concepto nuevo que asimila o construye.

Componentes

El Análisis teórico considera, en primer lugar, la comprensión y la experiencia (en cuanto aprendiz y en cuanto enseñante) del investigador (o de los investigadores).

Además, y teniendo en cuenta la relación cercana entre la naturaleza de los conceptos matemáticos y su desarrollo en la mente de un individuo (Cf. Dubinsky, 2001), se comienza desde la reflexión matemática acerca de los conceptos. (Cf. Trigueros, 2005).

Se utilizan, además, los resultados de investigaciones previas, el análisis de libros de texto y otros aspectos que se estime que contribuyan a la delineación de un camino posible de construcción de un concepto determinado.

Preguntas

Según Asiala et al. (1996), hay dos preguntas que deben guiar el trabajo en esta componente: *¿Qué significa comprender un concepto matemático?* y *¿Cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un individuo?* El objetivo de esas preguntas es motivar la reflexión acerca de qué es comprender un concepto determinado y cómo un individuo puede concebirlo –por sobre no solo de la repetición mecánica de algoritmos y similares, sino también de la hipotética construcción de un concepto aislado–.

Además de las anteriores, es conveniente hacer las siguientes preguntas: *¿Qué elementos previos debe poseer un estudiante para que pueda abordar de manera exitosa el concepto del teorema del isomorfismo?*, y *¿Qué construcciones y mecanismos mentales están asociados a dicho concepto?* (Cf. Roa, 2008).

La importancia de lo anterior se ve con claridad si se considera, como señala la teoría, que la evolución de los esquemas que un estudiante posee, la incorporación de nuevos esquemas y la generación de nuevas relaciones que lo anterior comporta enriquecen su conocimiento matemático y la coherencia de esos esquemas, y que ello a su vez le permite disponer de un número mayor de alternativas para abordar situaciones que involucran los conceptos relacionados. (Asiala et al., 1996).

Refinamiento de la descomposición

La aplicación y reiteración del ciclo de investigación a partir de una Descomposición Genética de un concepto permite refinarla teniendo presente tanto los datos empíricos como su análisis, considerados en la tercera componente del ciclo.

Este refinamiento ocurre de dos maneras: por una parte, la descomposición genética guía el análisis, pues hay que verificar si acaso las construcciones mentales propuestas

parecen haber sido realizadas por los estudiantes; por otra, los resultados de ese análisis pueden traducirse en modificaciones en la descomposición genética.

El ciclo se repite en tanto en cuanto ayude al investigador a comprender en mayor profundidad de qué manera el estudiante construye su comprensión del concepto. La importancia de esto radica en que, si las construcciones que realiza el estudiante son las que se requieren según la descomposición genética, la teoría predice que el estudiante habrá aprendido esa matemática. (Dubinsky & Yiparaki, 1996)

Diseño e implementación

El diseño y la implementación instruccionales se sustentan expresamente en el análisis teórico inicial, y su objetivo es ayudar a los estudiantes a realizar las construcciones mentales propuestas.

El ciclo ACE

El método pedagógico que se emplea en esta etapa es el ciclo de enseñanza ACE, de actividades, discusión en clase y ejercicios (*ACE teaching cycle: Activities, Class discussion and Excercises*): se trata de reemplazar las lecciones con métodos interactivos, constructivos y con aprendizaje colaborativo.

Para ello, el grupo RUMEC utiliza profusamente computadores, tanto como manera de disponer de abundancia de situaciones y de cómputos como para inducir o reforzar el aprendizaje de los conceptos en juego –por la vía de programar en el lenguaje computacional ISETL, (*Interactive Set Language*), práctica que de suyo obligaría a clarificar los conceptos y los métodos de trabajo–. (Cf. Dubinsky & Leron, 1994).

Se utiliza el llamado *método del descubrimiento*, pero, más que descubrir los objetos, se apunta a que los alumnos los construyan en su mente.

Enseñanza e investigación

Es conveniente tener presente que la teoría APOE considera que impartir instrucción es también una oportunidad de obtener información (esto es, *data*. Cf. Dubinsky & Yiparaki 1996). La relación, sin embargo, es más interesante y compleja, según reseñamos a continuación.

Dificultades y caminos

Ante un concepto determinado, la teoría APOE es una herramienta que puede utilizarse tanto para explicar las dificultades de su aprendizaje como para plantear caminos para su construcción por el individuo, y los estudios realizados con ella aportan resultados concretos en relación con estrategias pedagógicas apropiadas para motivar esa construcción.

De acuerdo a la perspectiva descrita, es, naturalmente, de capital importancia que el estudiante se enfrente con situaciones matemáticas que promuevan su reflexión. Ahora bien, esa reflexión depende del tipo de preguntas que se le planteen, cuyo objetivo debería ser generar un nuevo conocimiento que se integre al conjunto de construcciones previas que aquel tiene.

Enseñanza y esquemas

Dado que, como dijimos antes, respecto de los esquemas, su evolución, la incorporación de otros nuevos y las relaciones entre ellos enriquecen su conocimiento y le posibilitan tener más alternativas para abordar situaciones problemáticas concernidas, es natural concluir que las actividades propuestas por los profesores deberían procurar generar de manera continua la construcción, reacomodación y reconstrucción de los esquemas y de las otras estructuras matemáticas que el estudiante posee. (Cf. Roa & Oktaç, 2010).

Descomposicón genética y enseñanza

Asimismo y como dijimos antes, la aplicación del ciclo de investigación puede originar cambios en la descomposición genética, pero, a su vez, esto puede sugerir modificaciones en el diseño de enseñanza incluido en el ciclo.

Además, al reiterar el ciclo, la descomposición genética va reflejando de mejor manera el análisis de los datos, y aportando información que ayuda a explicar el desempeño de los estudiantes en tareas matemáticas relacionadas con el concepto bajo estudio. El objetivo del análisis de estos datos adicionales no es clasificar a los estudiantes según una jerarquía de niveles, sino obtener evidencia de cuáles construcciones previstas por la descomposición genética parecen ser llevadas a cabo.

Es decir, solo parte de la información recogida en el ciclo de investigación se utiliza para averiguar qué construcciones mentales efectivamente hicieron los estudiantes; la otra sirve para ver si la predicción realizada, en cuanto aprendizaje logrado, es respaldada por los datos.

Virtudes del ciclo

De esta manera, el ciclo de investigación permite evaluar tanto el análisis teórico como el diseño de instrucción.

De allí que trabajar con este ciclo tiene dos virtudes: una es profundizar nuestra comprensión de la epistemología del concepto; la otra es que nos permite la creación de estrategias pedagógicas que están mejor alineadas con la manera en que creemos que el estudiante llega a comprender el concepto –tales estrategias se traducirán, entonces, en mejores aprendizajes–.

Análisis de datos

El análisis

Tal como hemos venido anunciando, el tercer paso del ciclo de investigación es la reunión, observación y verificación de datos para su análisis.

Este análisis se expresa en términos matemáticos más que en construcciones mentales que pueden o no haberse hecho

La referencia

El análisis teórico inicial es nuevamente una referencia en esta etapa: se averigua si los estudiantes hicieron las construcciones mentales propuestas; el análisis de datos puede llevar, como dijimos, a revisiones en la descomposición genética que se propuso inicialmente.

Frutos de la reiteración

Habíamos dicho que el ciclo de investigación, se reitera cuanto sea necesario para llegar a una comprensión más profunda de cómo el concepto podría desarrollarse en la mente del alumno.

En cada ciclo se agregan nuevos datos referentes al desempeño de los estudiantes en tareas matemáticas relacionadas con el concepto en cuestión.

El propósito, recordemos, es obtener un conocimiento más profundo de la epistemología del concepto. Además, la reiteración hace posible diseñar estrategias pedagógicas más adecuadas a la manera en que, según las evidencias, el estudiante llega a entender el concepto.

Otros aspectos de interés

Reseñamos aquí en forma escueta otras consideraciones que es conveniente tener presentes en relación con la teoría APOE, y precisiones y/o énfasis respecto de reflexiones que ya hemos hecho.

En las secciones 6.4, 6.5 y 8.1 agregaremos, posteriormente, otros comentarios al respecto.

Cognición y saber

(Insistencia). La descomposición genética presentada no es independiente del conocimiento acerca de un determinado dominio del saber: el individuo construye el conocimiento a la vez que trata de reequilibrar, interiorizar, encapsular, desencapsular, y así sucesivamente.

Lógica y genética

Hay evidencias de que, a veces, la construcción de conceptos diferentes está coordinada (como ser, en el caso de los grupos), de manera que el progreso en uno parece esperar desarrollo en los otros. Esto sugiere que la psicogénesis, que puede construirse linealmente, no necesariamente procede de esta forma.

De todas maneras, hay también evidencias de que, ocasionalmente, conceptos que desde un punto de vista lógico anteceden a otros, son, sin embargo, construidos en forma sincrónica con esos otros que le suceden. Por ejemplo y según veremos más adelante, se ha propuesto que los conceptos de grupo y de grupo cociente se construyeron (históricamente) en forma simultánea, y, por otra parte, que los de grupo y de subgrupo se construyen (psicogenéticamente) al mismo tiempo. Nosotros daremos un ejemplo adicional, a partir del teorema que hemos rotulado RE/P.

Coordinación de esquemas

Por supuesto, cuando, en una construcción, se necesita articular conceptos previos, ello será más fácil y fructífero si los esquemas correspondientes están sólidamente establecidos y, por el contrario, habrá obstáculos adicionales si esos esquemas previos están ya sea en vías de construcción o 'mal' construidos.

Ello es particularmente relevante ante ciertos conceptos que consisten en la coordinación de otros esquemas, subsidiarios. Por ejemplo, el concepto de grupo cociente consiste en la coordinación de los esquemas de coclase, de multiplicación de coclases y de normalidad.

Tal coordinación consiste, en general, en seleccionar construcciones específicas de esos esquemas constituyentes y aplicarlos a las situaciones que conllevan la construcción del nuevo esquema.

En ese caso, si hay problemas en la construcción que se necesita, resulta difícil percibir si ellos provienen de problemas de coordinación o de debilidades en los esquemas subsidiarios. Ello reviste importancia pedagógica, pues bien podría ser que lo que se necesite sea ayudar a construir los esquemas que son requisito para la construcción del nuevo esquema.

El orden de las dificultades

En términos generales, si se mira al resultado relativo de los estudiantes sujetos de los estudios realizados, hay un orden ascendente de dificultad en la construcción de los conceptos: lo más fácil de realizar son las acciones; por comparación, interiorizar en procesos, es más difícil; para ciertos objetos, la encapsulación puede estar más allá de la capacidad de los estudiantes.

En el caso de la Matemática, puede ocurrir que a ese orden ascendente haya que sumar eventualmente la dificultad también creciente de las materias bajo estudio.

El auxilio pedagógico

Cuando se tiene una idea de cómo deben ser enseñados los conceptos, la cuestión que se plantea es cómo debe ordenarse la instrucción para hacerla congruente con la senda del desarrollo cognitivo.

Se trata, claro está, de ayudar a dar pasos específicos en el desarrollo de un concepto dado; en particular: a interiorizar acciones; a construir y a revertir procesos; a coordinar procesos y construir otros a partir de ellos; a encapsular procesos; a tematizar una colección de procesos y objetos en un esquema general, etcétera.

Para ello, en general –y, particularmente, para el último caso señalado– es esencial que el estudiante reflexione en las acciones que está desarrollando. A su vez, para ayudar a esto último es muy conveniente el trabajo en común que provee de oportunidades para discusión y reflexión –particularmente, se plantea, si el trabajo incluye el aspecto computacional–.

Al respecto, una guía interesante es el dictamen de Piaget en el sentido de que las

mayores construcciones en el desarrollo cognitivo no pueden acelerarse por educación, pero que sí es posible aumentar la base experiencial para enriquecer los desarrollos que tienen lugar. (Cf. Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974).

La cuestión de los requisitos

Respecto de lo que en Matemáticas comúnmente se denominan (pre)requisitos, es necesario hacer una distinción fundamental, y que manifiesta, por lo demás, una virtud muy relevante de la teoría APOE.

En efecto, la manera en que habitualmente se imparte la docencia incluye la noción de que se *pasa* ciertas materias en un orden lógico apropiado y que ello permitiría que el estudiante pueda progresar en su estudio. Por supuesto, la evidencia experimental –y aun la experiencia del propio docente– es clara en el sentido de que ese *pasar* las materias dista de ser exitoso, y las diversas teorías didácticas *sensu stricto* la expresan con claridad.

APOE precisa cómo es que, desde una perspectiva cognitiva, funcionan los requisitos: alguno de ellos podría necesitarse solo en cuanto concepción *acción*, otro como *proceso*, o tal vez como *objeto*; un requisito importante muy posiblemente requerirá de una *concepción esquema* del objeto matemático.

Al respecto, es conveniente tener presente que, según nos previenen Roa y Oktaç, en caso de que las construcciones mentales de los estudiantes acerca de los requisitos para la construcción mental de un determinado concepto matemático obedezcan solo a la realización de ciertas acciones limitadas por una orden externa, esos estudiantes carecerán de las estructuras previas para abordar aquella construcción y por tanto no se puede esperar que logren avanzar en ella. (Roa & Oktaç, 2010, p. 100).

Epistemología *sensu lato*

Necesidad de la teoria

Por oposición a muchas otras iniciativas que se llevan a cabo en el ámbito educacional, un análisis o una propuesta propiamente didácticos deben buscar asidero en la investigación.

Investigación significa, por supuesto, disponer de marcos teóricos explícitos y usar de ellos.

Teoría e ingenuidad

Ahora bien, hay una compleja relación entre la teoría, el investigador y lo que llamamos realidad.

Pese a la creencia ingenua en contrario, la investigación ha establecido que la teoría precede a la observación.

Si no hay teoría, lo que precede a la observación es, en principio, una suerte de ideología. Por lo demás y dado que el marco teórico no prevé todos los aspectos posibles –es una abstracción– la presencia de alguna traza de ideología parece inevitable.

Teoría e información

Es desde la teoría que se hacen las preguntas, se diseñan las observaciones y las experiencias, se decreta qué es aquello que se observa, se analizan los datos, se extraen las conclusiones.

A su vez, los datos y análisis obtenidos sustentan a la teoría: la hacen más rica, le dan mayor rigor y solidez, la comprueban, etc. Cabe también que estos últimos contradigan a aquella y la teoría deba corregirse, acomodarse a los datos. Que a su vez provienen, como dijimos, del marco teórico.

El ciclo de investigación

Esta, como decíamos, compleja relación, debe cuidarse siempre en la investigación.

El ciclo de investigación de RUMEC nos parece una muy buena respuesta para ese resguardo: en primer lugar, las propuestas didácticas explícitamente se originan en investigaciones; además, el ciclo se ocupa de que la investigación (la descomposición

genética) sea puesta a prueba y revisada, y ya hemos descrito otras características que concurren a este proceso de validación, rectificación y mejoramiento.

Aspectos didáctico y cognitivo

Nos detenemos ahora en aspectos de la enseñanza de nuestro tema, en el marco de los estudios de álgebra abstracta contemporánea. Como hemos manifestado anteriormente, no pretendemos aquí separar indebidamente los aspectos cognitivos de los didácticos –justamente, la teoría APOE los reúne de manera apropiada, a nuestro entender– sino, por el contrario, señalar que ambos deben estar presentes en nuestro análisis.

Para ello, examinamos primero en qué medida los textos de estudio reflejan o pueden reflejar algunos avances teóricos.

En la segunda sección damos nuestra percepción acerca de la enseñanza de estos temas en Chile; incluimos allí algunas cuestiones que hemos podido apreciar en los trabajos de los alumnos: dificultades y aprendizajes.

Proseguimos con una mirada a la enseñanza del álgebra abstracta, teoría de grupos incluida, tal como lo presenta la literatura ad hoc.

La cuarta sección está destinada a la contribución de APOE a la investigación de la enseñanza de la teoría de grupos.

En la sección siguiente comentamos la aproximación de RUMEC reseñada en la anterior, y señalamos nuestras coincidencias y diferencias con ella.

A continuación agregamos algunos datos que hemos obtenidos directamente con nuestros estudiantes y otros a quienes hemos planteado custiones relevantes en relación con nuestro tema.

Los textos

Textos y *estado del arte*

Como bien se sabe, los textos de estudio no son principalmente libros de investigación, sino, en el mejor de los casos –al respecto– un resumen de ciertos aspectos del estado del arte en las disciplinas que tratan; ello no obstante, la historia muestra que pueden tener un papel relevante en el desarrollo de esas disciplinas.

El autor de un libro de texto, en su labor de compilación, es responsable por la elección de los temas y el énfasis relativo que les da, y por la organización general del libro. Puede haber incluido o no materiales y un diseño que representen bien, en su nivel, el estado del arte del tema.

El texto de Ahlfors de Variable compleja, publicado en 1953 (Alhfors, 1966), y el de Halmos de Teoría ingenua de conjuntos, de 1960 (Halmos, 1960) son ejemplos bien conocidos de libros que pusieron al alcance del público los fundamentos, avances y prepocupaciones de la matemática de su tiempo en sus respectivas áreas. Por el contrario, el texto *Álgebra*, de Hall y Knight, aparecido en 1885, (Hall & Knight, 1952), aparte de sus virtudes y de su influencia notable, es una muestra de cómo es que el estado del arte puede estar completamente ausente.

Un buen ejemplo de la relevancia que pueden entrañar la sintonía de un texto con el estado del arte de una disciplina es, naturalmente, el de *Los Elementos* de Euclides, cuya importancia trasciende incluso a la Matemática propiamente tal.

El énfasis en las ecuaciones

Avances en Matemáticas

Respecto del tema que nos ocupa, la historia de los textos de Álgebra desde el siglo XIX hasta la primera mitad del siglo XX –particularmente relevante para nuestro propósito–, la cuestión es, en comparación con la proliferación de obras en las décadas siguientes, mucho más pesquisable.

Por motivos que se encuentran en la historia sucintamente reseñada en el capítulo anterior, el Álgebra de ese tiempo consistía básicamente en la teoría de ecuaciones polinomiales y formas polinomiales, incluyendo la llamada teoría de invariantes.

La obra de Galois se había vuelto conocida y relevante tras su publicación debida a Liouville en 1846, y luego, en forma más detallada, por Camille Jordan en su *Traité des substitutions et des équations algébriques*. (Jordan, 1870). Como hemos indicado antes, es interesante notar, en el título de esta obra, cierta ambivalencia no perceptible en la época: se trata de las substituciones (grupos de permutaciones) y de las ecuaciones algebraicas; cuál de esos temas es el que ha de prevalecer es, como veremos, el tema de la media centuria siguiente.

Posteriormente, Kronecker y Dedekind habían hecho progresos importantes en la teoría de campos de números algebraicos, lo que, junto con lo anterior, dio lugar a cierta preponderancia de los temas de grupos, anillos, campos y módulos. Todo ello transformaría profundamente la concepción misma del Álgebra.

La investigación en los textos

Se puede apreciar con claridad que los textos relevantes de esa época van progresivamente, pero con cierta hesitación, incorporando algunos de los resultados de la investigación.

El siglo XIX

El *Cours d'algèbre supérieure* de Joseph Serret (1849), aunque incluyó la teoría de Galois en su tercera edición (1869), siguió empleando el enfoque más antiguo de Lagrange y Abel de comienzos del siglo XIX, y no contiene una discusión separada del concepto de grupo. Serret lo deja en claro en la Introducción de su libro: l*'Algèbre est, a proprement parler, l'Analyse des équations*.

El *Traité des substitutions et des équations algebriques* de Camille Jordan (Jordan, 1870), trataba el tema de los grupos, pero su enfoque era todavía el de la solubilidad de las ecuaciones. La importancia de esto es manifiesta, tal como lo plantea Dieudonné en su *Abrégé* , cuando menciona la aparición de ese libro (1978, tome I, p. 116): *...qui sera la "Bible" des spécialistes de la théorie des groupes pendant plusieurs générations*.

En 1895, Heinrich Weber publicó en tres volúmenes su tratado *Lehrbuch der Algebra* (Weber, 1895), aún focalizado en ecuaciones y formas polinomiales; para él, lo central está constituido por las propiedades de los números racionales y los reales. Los grupos aún eran una materia subsidiaria.

El siglo XX

Ya en el siglo pasado, la comunidad matemática se fue interesando progresivamente en investigar propiedades de estructuras abstractas: grupos, campos, ideales, anillos, etc. En ello, Emmy Noether, según veremos, tuvo un papel primordial, tanto en los resultados como en la concepción misma de lo que es el Álgebra.

Sin embargo y si bien los textos fueron, como decíamos, incorporando estos elementos, la perspectiva que asumían no varió substantivamente: el libro de Robert Fricke *Lehrbuch der Algebra* (Fricke, 1924), el de Leonard Eugene Dickson, *Modern Algebraic Theories* (Dickson, 1926, el más moderno en Estados Unidos hasta la aparición del de Birfhoff y Mac Lane en 1941), el de Helmut Hasse, *Höhere Algebra* (Hasse, 1926), el de Otto Haupt, *Einführung in die Algebra* (Haupt, 1929) siguieron el tratamiento tradicional. (Cf. Corry, 1996).

Moderne Algebra

El texto

Bartel van der Waerden había estudiado principalmente con Emmy Noether en Göttingen y Emil Artin en Hamburgo (van der Waerden, 1975). En su texto capital, *Moderne Algebra* (van der Waerden, 1930), él declara expresamente bajo el título que el

libro es *en parte un desarrollo de conferencias de E. Noether y E. Artin*; además, atribuye a ella el haber puesto en el centro del estudio a los conceptos de anillo, ideal, módulo, clase residual e isomorfismo (van der Waerden, 1935, p. 469).

Su libro hizo la síntesis que se necesitaba, y proveyó de una perspectiva unificada. Él incorporó nuevos resultados, pero también cambió la perspectiva de estudio, trabajando en forma axiomática y poniendo en el centro la idea de estructura algebraica. Grupos, anillos, cuerpos, ideales y módulos son ya en su libro ejemplos de estructuras algebraicas, y puede estudiar cada una siguiendo un mismo patrón de desarrollo. La teoría de Galois se insertaba de manera natural en esa perspectiva; por su parte, la estructura algebraica de los números –*sensu lato*– era tratada por él como sendos casos especiales de estructuras algebraicas –*sensu stricto*–: los números racionales son ahora un ejemplo del campo de fracciones de un dominio de integridad, etc.

Su relevancia

En una edición más reciente de *Moderne Algebra* en inglés (van der Waerden, 2003), D. Eisenbud, declara que, en alguna época, todo el que quisiera ser algebrista debía estudiar en ese libro, y agrega: *Aun ahora, todo quienes trabajan en Álgebra tiene una tremenda deuda con él, aprendieron de él de segunda o tercera manos, si no directamente*.

Saunders Mac Lane, en el importante libro que reseñamos a continuación nos da su opinión acerca del texto de van der Waerden: *Este hermoso y elocuente texto sirvió para transformar la enseñanza de posgrado de álgebra, no solo en Alemania, sino también en otros lugares de Europa y en los Estados Unidos. Formuló de manera clara y sucinta las visiones conceptuales y estructurales que Noether había expresado con tanta fuerza. Esto se combinó con la elegancia y la comprensión con que Artin había dado conferencias ... Es, en mi opinión, el más texto influyente en el álgebra del siglo XX*. (Mac Lane & Birkhoff, 1967, p. 1).

La influencia de *Moderne Algebra* fue suficiente como para impulsar en el mundo la idea de que el Álgebra es estudiar las estructuras algebraicas (siendo cada vez más central a ellas precisamente la noción de isomorfismo).

A Survey of Modern Algebra

El conocido Saunders Mac Lane, quien fue a estudiar Lógica a Göttingen en 1931 y obtuvo su doctorado en 1934, se encontró allí con Emmy Noether (y con Emil Artin) y se interesó en el Álgebra según ella la proponía. (Noether fue también quien impulsó la mirada propiamente algebraica en topología. (Cf. Alexandroff, 1981).

El texto

De vuelta a estados Unidos, Mac Lane escribió con Garret Birkhoff *A Survey of Modern Algebra* (Birkhoff & Mac Lane, 1941) para dar a conocer esa manera de concebir el Álgebra. Ese fue el primer libro sobre la materia escrito en América en esa concepción, e influyó a generaciones de matemáticos, también en Europa.

Su relevancia

Según R. Lyndon (1979), ese texto puso al alcance de los estudiantes de pregrado lo que había estado reservado para los matemáticos en el texto de van der Waerden, y su impacto en el pregrado norteamericano fue inmediato y sostenido, tanto en los contenidos como en la enseñanza, y definió incluso lo que hoy se toma por enseñanza del álgebra en ese nivel. Por cierto, la influencia de ese texto se extendió también a Latinoamérica. (Hay una versión en español, al menos desde Birkhoff & Mac Lane, 1954).

Éléments de Mathématique

Los textos

La publicación de los diferentes fascículos de la serie *Éléments de Mathématique* abarcó medio siglo (hay nuevas impresiones y ediciones posteriores). El libro *Algèbre* (que reúne varios fascículos publicados antes) apareció en 1973. (Bourbaki, 1939-1998)

Éléments es una obra de una serie de importantes matemáticos que la publicaron bajo el pseudónimo de Nicolas Bourbaki, fue seguramente el texto más influyente de Matemáticas del siglo XX.

El tratado de Bourbaki surge de la insatisfacción del grupo de fundadores con los textos de los antiguos maestros –vale decir, Jacques Hadamard, Émile Picard, Édouard Goursat. (Dieudonné, 1970)–.

La idea de estructura –en sus acepciones algebraica, topológica y de orden– fue tomada del texto de van der Waerden, seguramente la obra de mayor influencia individual en el proyecto de Bourbaki. (Por lo demás, Weil, uno de los fundadores, fue a Göttingen, donde quedó impresionado con Emmy Noether. (Cf. Corry, 2008, p. 329).

Su relevancia

Rápidamente, los *Elementos* influyeron en todo el mundo matemático y, por décadas, determinaron la forma de la investigación matemática y también de los currículos de Matemáticas en muchas partes del mundo (Corry, 2008). Un indicio de ello es, por ejemplo, el cambio que introdujo en la terminología y en la simbología. (La terminología de funciones es un ejemplo elemental de ello).

Algunos lo llegaron a considerar perfecto (Cf. Samuel, 1972), pero hubo también detractores (Cf., por ejemplo, Hewitt 1956, o bien Mathias, 1992).

Ahora bien la conocida dificultad de sus ejercicios (el que un trabajo de investigación apareciera propuesto en el texto se convirtió en una señal de distinción para su autor) no lo hacía precisamente un libro para estudiantes noveles.

Enseñanza en Chile

Lo que sigue es una historia que se repitió seguramente, con algunas variaciones, en América y en otras latitudes.

Vamos a circunscribir, sin embargo, nuestra atención a los sucesos acaecidos en nuestro país.

Ahora bien, no conocemos de documentos escritos sino muy fragmentarios sobre esta materia en el país, y la relación que hacemos es fruto el de nuestra propia recolección de datos hecha desde varias fuentes. Estimamos, sin embargo, que las conversaciones que hemos mantenido con los protagonistas de entonces y con otros docentes de esta área en distintas partes del país, y nuestra propia y un no escasa experiencia en la enseñanza de esta materia, nos permiten hacer una reseña, a grandes rasgos, correcta.

Nuevos textos de álgebra abstracta

Es evidente a una mirada medianamente conocedora que los textos de estudio en álgebra abstracta se fueron haciendo en el estilo del de van der Waerden y con los énfasis en las estructuras que su libro y los de Bourbaki y el de Birkhoff y Mac Lane (1941) hacían.

En el postgrado

La dificultad que presentaba el texto de Bourbaki para el estudio inicial hizo que su influencia no se notara directamente en el nivel de la licenciatura, sino en los programas de postgrado.

Algo parecido ocurrió con varios textos importantes, tales como el de Jacobson (1951) y el del propio van der Waerden (1949).

Textos en pregrado

Por otra parte, aparecieron libros de *Álgebra Moderna* destinados al pregrado, cuya finalidad no parecía clara: ciertamente el texto de van der Waerden había incluido en su tratamiento el tema de los módulos, tan relevante en los trabajos de Emmy Noether, por ejemplo; sin embargo, los estudiantes universitarios necesitaban algo más de Álgebra Lineal que un apartado entre otras estructuras algebraicas. (Cf., al respecto, el libro de Ayres, 1969).

Hay que agregar, además, que no parece que autores y editoriales en general tuvieran la claridad suficiente como para hacer un tránsito apropiado de estas materias al pregrado. Roger Godement, miembro del grupo Bourbaki, autor él mismo de un relevante libro de Álgebra (Godement, 1963), se refiere a los textos editados en Estados Unidos en su época con cierta aspereza: *La plupart de ces libres son d'un intérêt mathématique plutôt douteux.* (Godement, 1963, p. 656).

Irrupción de la *matemática moderna*

Enseñanza de la Matemática

En Chile, no hubo realmente programas de postgrado hasta mediados de la década de 1970; los nuevos aires comenzaron a aparecer a fines de la anterior.

Matemática para especialistas

Con muy pocos doctores en el país, la enseñanza de los postgrados emergentes se guió por las sugerencias de los textos y las convicciones de los escasos protagonistas. Ello incluyó en algún tiempo interés tal vez desmesurado en entonces la reciente teoría de Categorías, cursos de Geometría à la Hilbert –sin ninguna figura que pudiera llamarse dibujo–: abstracción y arquitectura y generalidad de los edificios matemáticos, en desmedro de la capacidad de trabajo en los casos (matemáticos) concretos.

Verdad es que textos relevantes, de carácter axiomático, favorecían esa dirección. Un ejemplo interesante es el de Eilenberg y Steenrod (1951), de topología algebraica, que declara: *No se da motivación alguna para los axiomas. Se pide que el estudiante inicial los tome como acto de fe... Esto no debería ser difícil, porque la mayoría de los axiomas son bastante naturales, y su totalidad posee suficiente belleza interna para inspirar confianza*.... (Eilenberg & Steenrod, 1951, p. x).

Nos parece que la anterior es una poderosa motivación de carácter estético. Sin embargo, hacemos notar la dificultad que presenta para un estudiante no iniciado.

Un claro ejemplo adicional de esto último se encuentra en el libro de Álgebra de Serge Lang, el cual pide al lector: *Tome cualquier libro de álgebra homológica y pruebe todos los teoremas sin mirar las demostraciones dadas en ese libro* (Lang, 1969, p. 105), y cuyo ejemplo de monoide consiste en tomar clases de homeomorfismos de superficies (conexas) compactas, con una operación abstrusa para un no iniciado. (Ibid., ¡p. 8 !).

Mac Lane y Birkhoff, por su parte, procuraban incorporar nuevos conocimientos a un texto diferente del que habían escrito. Luego de reconocer la influencia de van der Waerden y su libro para los estudios graduados, y la del que ellos mismos habían escrito y de otros similares para el pregrado, declaran sus razones para los cambios: *"...entretanto, el álgebra moderna ha continuado desarrollándose vigorosamente…"*. (Mac Lane & Birkhoff, 1967, p. ii). Su libro hará uso sistemático de la idea de un *elemento universal* (Ibid., p. 24 y passim) –y pondrá mayor énfasis en los teoremas de morfismos–.

Matemática para el usuario común

Como en otros países con entera seguridad, los profesores de pregrado se polarizaron ya fuera en una visión tradicional (anticuada, en verdad, para la Matemática de entonces) o en una más *moderna*. Así, muchos alumnos de Matemáticas cursaron asignaturas que alternativamente enfatizaban los cómputos concretos pero sin mayores herramientas (*Aritmética racional* sin recurso a estructuras algebraicas, por ejemplo) o bien describían las ideas generales del Álgebra sin el conocimiento suficiente de trabajo en casos específicos (propiedad universal del producto tensorial de A-módulos, pero sin relación con productos de algún tipo, e. g.).

Esta situación afectó también a los estudiantes de otras áreas que la matemática. Alumnos de ingeniería, que habían tenido hasta hacía poco cursos anuales de Trigonometría y de Geometría Analítica, debían ahora encarar asignaturas de un semestre que podían contener ambas materias y dar cierta relevancia a los grupos abelianos finitos.

Había aun otra circunstancia, y muy determinante. El país había realizado recientemente una Reforma Curricular en escuelas y colegios, la más importante en el siglo, inspirada en el movimiento mundial de lo que se llamó las Nuevas matemáticas escolares, o, también, Matemáticas Modernas. Tal como en las otras naciones en las cuales se llevó a cabo, la reforma fracasó notoriamente. Para los alumnos universitarios chilenos, su situación era más bien lamentable, pues a las tensiones que vivían los diferentes currículos se sumaba el que un número importante de profesores asumía que la preparación de esos estudiantes incluía cierto dominio de las ideas *modernas* contenidas en los currículos escolares; sin embargo, los profesores de enseñanza secundaria no conocían esas materias y no podían impartirlas, y los textos de estudio al alcance de los alumnos estaban plagados de errores de distinto calibre.

Tal vez la imagen más ilustrativa de esta situación que abarcaba las enseñanzas media y superior es la de profesores de colegio que dividían sus lecciones en *clases de conjuntos* y *clases de Matemáticas*.

El Álgebra Abstracta

Los programas

Como cabría esperar, los programas de esa época dependieron bastante de la situación descrita y, en cierto modo, repitieron lo señalado para los textos de fines del siglo XIX: el diseño de las asignaturas podía responder a una idea de Álgebra Moderna que le diera un marco general apropiado a lo que los alumnos podrían haber aprendido (por ejemplo, en Teoría de Números), o bien a una de Álgebra Abstracta en la cual se estudiara con cierto detalle las estructuras algebraicas, poniendo énfasis especial en los sistemas numéricos y en los polinomios (conectando así, al menos en principio, con la antigua teoría de ecuaciones).

Los textos

Según nuestra información, en las distintas universidades del país, en esta materia se utilizaron principalmente los textos de van der Waerden (1930), de Birkhoff y Mac Lane (1941), de Roger Godement (1963), de Serge Lang (1969), de Ayres (1969). Un poco menos relevantes fueron los libros, también conocidos, de Jacobson (1951), de Kurosh (1953), de Herstein (1964), de Dubreil & Dubreil-Jacotin (1965), de Paley & Weichsel (1966), de Rotman (1973), de O'Brien (1973), de Mac Donald (1968). Por supuesto, hubo también otros.

Pasada la primera etapa, los textos que se utilizaron con mayor frecuencia fueron el de Hungerford en el postgrado (Hungerford, 1974; eventualmente, también en la licenciatura) y el de Fraleigh en el pregrado (Fraleigh, 1973).

(Es de notar, además, la escasez de libros en español. Las versiones en este idioma de Hall (1969), de Kostrikin (1992), de Dubreil & Dubreil-Jacotin (1961), de Fraleigh (1973) y de Kurosh (1953), son excepciones al respecto).

La situación en la actualidad

En Chile, las universidades son autónomas para elaborar sus programas de estudio.

Licenciaturas y postgrados en Matemáticas

Desde la década de 1980 han ido apareciendo programas de doctorado en Matemáticas, de los cuales hay ahora media docena. (Hay el doble de programas de Magíster en Matemáticas y un par en Didáctica de la Matemática).

Ahora bien, los programas de licenciatura y de magíster en matemáticas suelen tener un grado perceptible de homogeneidad, variando, sin embargo, de acuerdo a si de trata de un programa *aplicado* o *de Matemáticas puras,* lo que tiene relevancia para nosotros, por cuanto ello determina, por cierto, la importancia relativa del álgebra abstracta en el currículo.

Si el programa no es 'aplicado', considerará seguramente, en particular, la mayor parte de los teoremas de morfismos que incluimos en el Capítulo 2.

Matemáticas en pedagogías

Variabilidad de contenidos

Por el contrario, el contenido matemático de las carreras de pedagogía en Matemáticas es bastante heterogéneo, de manera que una de ellas puede tener un solo curso de álgebra abstracta y otra tres. (No contamos aquí álgebra lineal y/o multilineal).

En el país, hay tantos programas de pedagogía en Matemáticas bajo el alero de departamentos o facultades de ciencias como a cargo de facultades o departamentes de educación. Eso determina claramente la importancia que el programa otorga a las formaciones matemática y *educacional*, respectivamente.

No creemos que los alumnos de las pedagogías, en general, aprendan el listado de teoremas de morfismo que hemos dado en el capítulo 2. De hecho, no podemos afirmar en modo alguno que la generalidad de los futuros profesores de Matemáticas estén aprendiendo lo suficiente de la disciplina.

Interacción de los docentes

Ahora bien, en casi todos los casos, el currículo se genera entre académicos de unas y otras facultades (o departamentos), de manera que un conjunto de docentes se encarga de impartir las materias de Matemáticas y otro de las de educación.

La interacción entre ambos grupos pudo ser, en algún tiempo, inexistente, pero, últimamente, los procesos de acreditación obligatoria a que están sometidos todos los programas de pedagogía del país han reunido a unos y otros a tareas mas compartidas, aun cuando casi no hay currículos que sean diseñados por un equipo interdisciplinario. Una razón más profunda para ello parece ser que la envergadura de la problemática educacional del país, especialmente en Matemáticas, ha ido haciendo lentamente converger a los diferentes actores, bajo el convencimiento que se comienza a imponer de que no es posible que una persona, un grupo, o una forma de abordar aquella problemática, tengan esperanza alguna de resolverla.

De cualquier modo, el hecho de que, en algunas instituciones, la formación de profesores de Matemáticas consista en una licenciatura disciplinaria de alrededor de 4 años seguida de una rápida formación pedagógica de un año no favorece, precisamente, la interlocución entre los actores.

Por unos 15 años, la única excepción de carácter disciplinario a esta situación general era el programa de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, en cuyo Instituto de Matemáticas ha habido cierto desarrollo de la Didáctica de la Matemática en sentido estricto y sus académicos, por tanto, han tomado parte activa en la formación pedagógica (o, mejor dicho, didáctica) de la Pedagogía en Matemáticas

Diferencias en los textos

Por supuesto, actualmente en Chile, hay más textos de álgebra abstracta en circulación que en el pasado, pero, al parecer, su número no ha variado en forma substantiva. Esto parece ser un fenómeno más general (al respecto, es interesante considerar que Springer-Verlag se ha ocupado de re-editar publicaciones de mediados del siglo XX y aun anteriores –incluida la versión en inglés del propio *Moderne Algebra* de van der Waerden– de editoriales tales como van Nostrand.

(Nuestro propósito aquí es sólo hacer una descripción general de un conjunto de textos en circulación).

Arquitectura matemática

Por lo demás, en el país ha habido poca producción de textos de álgebra abstracta, y, hasta el momento, ellos han tenido circulación un tanto restringida a la universidad que lo generó. De tal manera, las aproximaciones a nuestro teorema y los que le acompañan se puede pesquisar fácilmente en los textos en circulación, de los cuales los más nuevos no difieren en forma substantiva de los de la segunda mitad del siglo XX que reseñamos

arriba.

En general, esos textos están hechos por matemáticos, cuyo conocimiento profundo de la materia parece otorgarles la confianza suficiente para esperar que la arquitectura de los escritos y la terminología ad hoc (teoremas, proposiciones, corolarios...) expliciten suficientemente los distintos relieves de los diferentes temas; por la misma razón, en términos generales, los ejercicios y problemas que incluyen suelen estar destinados ya sea a clarificar o asentar alguna noción, o a hacer algún excurso que amplíe la perspectiva.

Las diferencias más ostensibles (exceptuando las referentes a los teoremas de morfismo, que veremos luego), parecen ser:

a. (Claro está) la profundidad y amplitud con que se tratan los diversos temas.

Bourbaki (1971), Dubreil (1975) y Dubreil & Dubreil-Jacotin (1961), por ejemplo, en lugar de grupos, tratan directamente grupos con operadores –lo que los hace poco aptos para la enseñanza inicial.

Gentile (1973) y Bourbaki (1973) no trabajan directamente con grupos al comienzo, sino que comienzan desde semigrupos y monoides, lo que matemáticamente es correcto, pero nos parece poco apropiado para los estudiantes.

Mac Lane & Birkhoff (1967) incluyen elementos universales. Hilton & Yu (1977) tratan decididamente categorías. También lo hacen Lang (1969) y Mac Lane & Birkhoff (1967), aun cuando con énfasis menor o, tal vez, más apropiado. (El libro de Hilton & Yu nos parece un tanto radical en exceso –esto es, en cuanto a lo que los alumnos pueden efectivamente trabajar–).

b. La importancia que dan a cuestiones eventualmente preliminares: conjuntos, lógica, números enteros, etc.

Por ejemplo, Hungerford (1974), Jacobson (1951), Lang (1967), Moore (1967), Paley & Weischel (1966) se interesan en ver primero la estructura de los números enteros, para trabajar con mayor tranquilidad los asuntos de órdenes y los grupos cíclicos.

c. La preocupación más o menos explícita por la enseñanza de estudiantes neófitos.

Esto se ve, por ejemplo, en la dificultad de los ejercicios: ya hemos mencionado los de Bourbaki (1971) y los de Lang (1969); los de Jacobson (1951) no son tampoco fáciles de abordar: no provee de bastantes ejercicios rutinarios (y no parece que se pudiera enfrentar alguno de ellos con concepciones acción de las nociones involucradas.

Por otra parte, algunos textos procuran avanzar más pausadamente y dar una cantidad apreciable de ilustraciones y de ejercicios matemáticamente más fáciles de abordar (Gentile, 1973; Paley & Weischel, 1966 y Fraleigh, 1973, por ejemplo). (El libro de Lang de 1967 es bastante más detallado y legible, para un lego, que el de 1969).

d. La presencia eventual de cierta inclinación al Álgebra Universal (cf. Burris & Sankappavanar, 1981).

Esta característica se observa en los textos de Dean (1967) Dubreil & Dubreil-Jacotin (1961) y Dubreil, e. g. –si bien no en muchos otros–: la estructura de orden en la colección de los subgrupos de un grupo dado.

e. Alguna precisión o extensión en algún punto de interés.

Por ejemplo, de más de 30 textos examinados, solo Kostrikin (1983) y Gentile (1973) señalan que un subgrupo cualquiera define dos relaciones de equivalencia en el grupo ambiente. (El resto de los textos define solo una relación de equivalencia, a partir de un subgrupo normal).

f. (Un asunto relativamente menor).

El uso de la variable antes que la función y, consecuentemente, la escritura de las

funciones compuestas en sentido inverso y las tablas de grupos ’transpuestas’. (Mac Donald, 1968; las primeras versiones de Fraleigh, desde 1973).

En general, la arquitectura básica de los textos de álgebra abstracta en uso sigue siendo la propuesta por van der Waerden. (Según nuestra percepción, la innovación mayor la ofreció el texto de Mac Lane y Birkhoff (Mac Lane & Birkhoff, 1967) pero ella no prosperó en general, que sepamos, en nuestro país.

Los teoremas de morfismo

Respecto de los teoremas que nos ocupan, las variaciones en su presentación son ciertamente más notorias: listados más, o bien, menos, explícitos; colecciones más, o menos, exhaustivas de los teoremas; (nombres o numeraciones ligeramente diferentes para los teoremas); relegación de algunos de ellos a los ejercicios; versiones en alguna medida diferentes; presencia o ausencia del teorema fundamental del morfismo y su ubicación relativa con el teorema del isomorfismo –de manera si el segundo es solo un corolario del primero, pongamos por caso–. Las demostraciones, sin embargo, son muy similares y están representadas en lo que hicimos en 3.1.10 y 3.1.11, salvo en algún intento esporádico de presentar primero el teorema de la correspondencia para apoyarse en él en el tratamiento de los otros.

En esta materia se percibe cierta evolución en los textos, conforme se avanza en el tiempo. El de Dickson (1926), por ejemplo, a pesar de tratar representaciones de grupos al final, no contiene las definiciones de (homo)morfismo ni de isomorfismo propiamente tales. Albert (1937) solo define lo que es un isomorfismo, pero no elabora mayormente sobre esa noción. Birkhoff & Mac Lane (1941), Lentin & Rivaud (1969) y Nachbin (1986) se limitan, a su vez, prácticamente a dar las definiciones de isomorfismo y de (homo)morfismo.

El libro de **Fraleigh** (1973) merece una mención especial, en este aspecto, dada su intención manifiesta de hacer accesible la teoría a estudiantes iniciales, que le ganó las preferencias de profesores y alumnos, a pesar de que su notación pone primero las variables y luego las funciones (lo que afecta, como dijimos, a compuestas y tablas de doble entrada). Por lo demás, esa notación fue modificada en ediciones posteriores (por ejemplo, en la séptima, con V. Katz. Cf. Fraleigh & Katz, 2003). El texto tiene un capítulo especial de isomorfismo, que incluye una sección de cómo probar que dos grupos son isomorfos, otra de cómo probar que no lo son, y una dedicada al teorema de Cayley: un grupo cualquiera puede sumergirse monomórficamente en un grupo de permutaciones. (Que incluya una sección ad hoc nos parece notable en dos sentidos. Uno es el de que este relevante teorema, de acuerdo a lo que hemos reseñado hasta aquí, tiene una importancia teórica e histórica considerables. La otra es que todos los textos examinados hacen una mención expresa a este teorema, pero él podría quedar sepultado en medio de otros que el alumno intenta recordar –en oposición a la importancia que señalamos–).

De una treintena de libros revisados, solo en Moore (1967) y Lang (1969) aparece el teorema del pasaje al cociente.

La tabla siguiente muestra la presencia de los teoremas más relevantes en los textos, el orden relativo de los conceptos de isomorfismo y morfismo, y el de los teoremas del isomorfismo y fundamental del morfismo, cuando están contemplados en el texto. Hemos abreviado ’Iso’ por la definición de isomorfismo; ’Mor’ por la de morfismo: ’TI’ por teorema del isomorfismo, ’TF’ por el teorema fundamental del morfismo; ’1TI’ por $(G/N_1)/(N_2/N_1) \simeq G/N_2$; ’2TI’ por $HN/N \simeq H/H \cap N$; ’Fac’ por el teorema de factorización de un morfismo en la compuesta de un epimorfismo, seguido de un isomorfismo y luego de un monomorfismo; ’Cor’ por el teorema de la correspondencia. (Escribimos ’(0)’ para indicar que el teorema aparece en los ejercicios; ’(1)’ significa que el teorema figura en el texto, pero que la demostración fue relegada a los ejercicios).

Autor(es)	Año	Iso	Mor	TI	TF	1TI	2TI	Fac	Cor
Jacobson	1951	1°	2°	2°	1°	0	0	0	0
Queysane/Delachet	1957	1°	2°	1	0	0	0	0	0
Herstein	1964	2°	1°	1	0	(0)	1	0	0
Paley/Weischel	1966	1°	2°	0	0	1	1	0	1
Dean	1967	1°	2°	1	0	0	1	0	1
Hall	1967	1°	2°	1	0	0	0	0	1
Lang, *Alg. Struct.*	1967	2°	1°	1	0	0	0	0	0
Mac Lane/Birkhoff	1967	2°	1°	2°	1°	1	0	1	1
Lang, *Alg.*	1969	2°	1°	1°	2°	1	1	1	1
Moore	1967	1°	2°	2°	0	(1)	(1)	0	0
Rotman	1973	2°	1°	1	(0)	1	1	0	1
Fraleigh	1973	1°	2°	1	0	1	(0)	0	0
Hungerford	1974	2°	1°	2°	1°	1	1	0	1
Hilton/Yu	1977	2°	1°	1	0	0	1	0	0
Kostrikin	1983	1°	2°	1	0	1	1	0	0
Spindler	1993	1°	2°	1	0	1	1	0	1

La cuestión didáctica

Ahora bien, todos los textos que hemos mencionado hasta aquí están, sin duda, bien estructurados en su concepción matemática –muchos de ellos fueron escritos por matemáticos reconocidos en el área–. Sin embargo, ellos no contemplan en su diseño un aspecto didáctico propiamente tal, de manera que los autores cifran su esperanza de aprendizaje de los estudiantes en la coherencia lógica de su presentación. Ello tiene, como sabemos, las virtudes y falencias bien conocidas, y se necesita, por tanto, enmendar esta situación.

El texto de Dubinsky, que utiliza el programa ISETL (Dubinsky & Leron, 1994) es claramente una alternativa distinta. En los libros que hemos examinado, por el contrario, se puede observar solo alguna mayor preocupación por agregar ilustraciones y ejemplos que, desde un punto de vista puramente matemático, ayuden al lector (por ejemplo, situaciones elementales mediante las cuales se puede comprobar si acaso uno ha entendido bien el contenido de un determinado concepto o resultado, pero, en ningún caso, se muestra siquiera alguna traza de que se ha buscado evidencias empíricas de que las estrategias usadas den el resultado que se espera de ellas).

Breve excurso

La teoría APOE nos entrega puntos de vista para analizar un texto de estudio con una visión bastante más precisa que la habitual.

En efecto, una mirada puramente matemática se fijará seguramente en la estructura lógica –o, mejor, axiomática– del escrito, lo que cautela que los resultados se presenten en una progresión debida y coherente y, anterior a ello, que se trate de un escrito que pueda llamarse, propiamente, de matemáticas. Por otra parte, algunos autores se preocuparán de las ’aplicaciones’ de la materia. Adicionalmente, quienes sigan cieras corrientes pedagógicas, se preocuparán de la motivación y aspectos similares.

Si se utiliza la teoría APOE, podemos discernir si acaso el cuerpo del texto y el diseño de su ejercitación entregan herramientas apropiadas para las construcciones mentales que los estudiantes deben realizar. Ello da una profundidad diferente al análisis del escrito.

No hemos hecho un tal análisis, sin embargo, muy apropiado para juzgar la relevancia de un texto, pero que nos apartaría de nuestro propósito actual.

(Avanzando en esa dirección, nos podemos preguntar, además, si un libro pretende ser una referencia para su uso –posterior– en la enseñanza o más bien está concebido para construir conceptos a través de actividades. Los textos basados en APOE, en particular, no están diseñados para disponer de un catálogo de teoremas y sus demostraciones, sino que se focalizan en proponer actividades que procuran ayudar a hacer las construcciones necesarias).

Falencias y urgencias

La relevancia de lo anterior es mayor que la que cabría esperar: la enseñanza superior ha aumentado explosivamente en el país en los últimos años; el requerimiento de profesores y de científicos también es mayor. Lo anterior no obstante, los resultados de las mediciones escolares están por debajo de la expectativa que crea la inversión que el país ha realizado en esta área. Sin embargo, la mayor parte de los matemáticos (y otros especialistas) en las universidades persiste en considerar –en contra de la evidencia– que el asunto radica solamente en la correción de los resultados y en una buena arquitectura formal de los textos y de las asignaturas, y, más que preocuparse por innovar en su práctica docente, solo manifiesta impaciencia ante los malos resultados alcanzados por los estudiantes.

No creemos que, en este ámbito, la situación del país sea muy diferente a la de otras naciones.

Los teoremas de isomorfismo

Aproximaciones en la literatura

Hay básicamente dos tipos de aproximación a los teoremas del isomorfismo para grupos, como las hay seguramente en todo el mundo, en la actualidad.

Una es enunciar y probar el TIG y un listado de otros teoremas del isomorfismo para grupos, demostrando cada uno por separado: se define una función ad hoc, y se prueba que es un morfismo biyectivo. Así se trabaja, en particular, en el libro de Fraleigh (1973).

La otra consiste en enunciar y comenzar por el teorema fundamental del morfismo para grupos, lo que permite, según explicamos antes, para cada uno de los otros teoremas de isomorfismo para grupos, disponer ya de una aplicación bien definida de la cual se sabe además que es un morfismo. Esta aproximación está, por ejemplo, en Mac Lane & Birkhoff (1967) y también en Hungerford (1974).

La ventaja de una u otra en términos cognitivos es difícil de aquilatar, y nos hemos propuesto estudiar seriamente este tema en otro trabajo.

Teorema fundamental en el centro

En términos generales, el teorema fundamental del morfismo para grupos es, claro está, matemáticamente hablando, más determinante que el teorema del isomorfismo. Si uno conoce bien el primero, el segundo y los restantes teoremas de morfismo son consecuencias inmediatas, para las cuales no es necesario construir morfismos sino utilizar los que están, en cada caso, disponibles y sólo 'levemente' velados. Según nuestra experiencia, sin embargo, el teorema fundamental es más remoto para la percepción de los alumnos. Ahora bien, esto último no debería extrañar, dada la aparición tardía de este teorema respecto del teorema del isomorfismo, cosa a su vez carente de sorpresa, pues es el fruto del empeño puramente algebraico en enfatizar más las flechas que los objetos –está hecho en el espíritu de los elementos universales–.

Foco en el TIG

Si, por el contrario, se estudia primero el TIG, el enunciado del teorema es,

comparativamente, más concreto, pues se puede leer sin pensar en la propiedad universal que manifiesta y, en verdad, sin preocuparse de las flechas sino del objeto cociente que se ha construido. Ello no obstante, para los restantes teoremas del isomorfismo, el alumno deberá cada vez imaginar una función ad hoc (cosa en modo alguno inmediata) y, antes de probar que es biyectiva, demostrar que está bien definida. Ahora bien, la buena definición es, según hemos ya indicado, la parte crucial de la demostración y también la menos lograda. Por su parte, esto último no es completamente determinante en contra de esta aproximación: al fin y al cabo, reiterar el trabajo de la buena definición podría ser una manera de conseguir que el estudiante se dé cuenta de la necesidad de esta condición y de que aprenda a demostrarla. Pero, a su vez y según las observaciones y entrevistas que hemos realizado, esto último no ha ocurrido.

El estudio posterior

En definitiva, entonces, deberíamos hacer un estudio comparativo posterior en el cual separemos, como hacemos en este trabajo, los aspectos conjuntísticos de los propiamente algebraicos.

La enseñanza del álgebra abstracta

La literatura en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Abstracta es reducida en comparación con la cantidad de trabajos que existen en otras áreas, tales como Cálculo e, incluso, Álgebra Lineal.

Ciertamente, el Álgebra Abstracta es un sector de impacto (cuantitativamente) menor que el del Cálculo o el álgebra superior, e.g.

En adición a ello, hay, por supuesto, la cuestión de la mayor abstracción. Ello no quiere decir, naturalmente, que no haya conceptos abstractos en otras áreas (tales como *límites*, muchos conceptos del álgebra lineal, incluso *pendientes*, por ejemplo), sino que, en el caso del álgebra abstracta, se trata de habérselas con conceptos precisamente abstractos, desde el comienzo y en forma permanente.

A continuación, presentamos los antecedentes que hemos encontrado en la literatura. Los hemos separado en dos secciones: en la primera reseñamos la escasa presencia de lo que se refiere a la enseñanza del Álgebra Abstracta con excepción de la que proviene del uso de la Teoría APOE, que hemos separado en la segunda sección. (De todas maneras, por razones de claridad, hemos incorporado en la primera sección unos cuantos datos que pertenecerían, en rigor, a la segunda)

Álgebra abstracta en pregrado

Extensión y objetivos

A nivel de pregrado, la enseñanza de Álgebra abstracta consiste, en general, de elementos de las teorías de grupos, de anillos y de cuerpos. Tales materias son enseñadas principalmente a estudiantes de pedagogía y/o de licenciatura en Matemáticas.

En la teoría de grupos se suele hacer énfasis en la noción de simetría; en la teoría de anillos se extienden ciertas propiedades de los enteros a estructuras más generales, y en la teoría de cuerpos se enfoca mayormente los aspectos relacionados con la teoría de Galois elemental.

Dos suelen ser los objetivos, inextricablemente ligados, que los autores –y los programas de estudio– parecen tener presentes con mayor frecuencia en relación con los cursos de Álgebra abstracta: dar un marco de comprensión global al estudio de los sistemas numéricos, y presentar un concepto general de ’estructura algebraica’, en el cual tenga sentido ubicar el problema tradicional del álgebra desde Al-Khwarizmi: la resolución de ecuaciones. Por supuesto, tales objetivos pueden ser eventualmente reemplazados, en la práctica, simplemente, por los del estudio de los conceptos y teoremas del álgebra abstracta

elemental. (Según hemos señalado en 4.7.2 y luego en 6.2.2).

Enseñanza del álgebra abstracta

Desde quienes desarrollaron los currículos de las *Matemáticas modernas*, al menos, se estimó que los jóvenes pueden efectivamente entender los conceptos elementales de grupos

Sin embargo, hay actualmente un cierto consenso entre los instructores experimentados en la materia y, al parecer, más aún entre los propios alumnos, de que la enseñanza del álgebra abstracta, en general, dista bastante de conseguir los objetivos que se propone. (Cf. Leron & Dubinsky, 1995; Clark et al., 1997; Lajoie, 2001).

Estudiantes que se especializan en matemáticas porque disfrutaron el Cálculo, encuentran grandes dificultades y empiezan ahora a disgustarles las matemáticas –con las siguientes consecuencias posteriores, por ejemplo y eventualmente, para sus propios futuros alumnos–. (Cf. Clark et al., 1997).

El problema central, según describen Dubinsky y otros (Dubinsky et al., 1994), consiste en que, en esta materia, el alumno, más allá de limitarse a seguir huellas de comportamiento imitativo, tiene que habérselas con conceptos abstractos, trabajar con importantes principios matemáticos, aprender a escribir demostraciones.

Los estudiantes, por el contrario, manifiestan una tendencia acentuada a inclinarse a procedimientos *canónicos*, susceptibles de ser realizados paso a paso, y (paradójicamente, se diría) suelen quedarse atrapados al tener algunos grados de libertad en sus elecciones. Además, muestran una preferencia notoria por lo simple: al tratar aspectos de los grupos en general, pongamos por caso, escogen primero las propiedades que son sintácticamente simples y, si se trata de un grupo específico, computacionalmente simple. (Leron, Hazzan & Zazkis, 1995).

Dado el abrupto cambio hacia el entendimiento de conceptos y la complejidad global del objeto bajo estudio, no parece posible, entonces, que un estudiante pueda tener buen éxito trabajando de la manera que hasta allí ha utilizado.

El grado de la dificultad

Tanto según la percepción habitual como de acuerdo a antecedentes empíricos de que se dispone, no solo sucede que la comprensión de los alumnos en este ámbito suela ser reducida, sino también que ellos pueden verse eventualmente perdidos en las materias –aun en el caso de que tengan buen rendimiento en otras áreas de la Matemática–. Peor aún, ocurre también que en cierto momento los alumnos se desaniman y terminan apartándose de la asignatura.

Todo esto pone en cuestión el conocimiento residual de la enseñanza de estas materias, y hay quienes piensan posible que, en definitiva, en la mayoría de las universidades, los cursos de álgebra abstracta no son exitosos.

Una de las consecuencias que se puede extraer es que habría que modificar de manera importante las formas de enseñanza al respecto.

Parafraseando lo que Asiala et al. (1996, p. 305) dicen en relación con la construcción de grupos cocientes: la pregunta más importante es si es posible ayudar a un mayor número de estudiantes a aprender cómo construir y comprender lo que han construido.

Los conceptos del álgebra abstracta

Hemos dado algunos antecedentes sobre la enseñanza del álgebra abstracta elemental, en general, en la presentación.

Ahora agregamos algunas referencias relativas al aprendizaje de la teoría de grupos, a propuestas didácticas y a consideraciones teóricas al respecto. Con ello no hemos tenido la intención de separar los antecedentes en categorías fijas, sino la de facilitar la comprensión de la relación que tiene cada una de esas componentes con nuestra propuesta.

La teoría de grupos

Dificultades y refuerzos

Lajoie (2001) indica que no ha habido muchas investigaciones en que las dificultades hayan sido objeto de un proyecto de investigación (en ese trabajo, ella, en lugar de experimentar en enseñanza, se concentró en observar los resultados). Incluso, Nardi (2000) expresa que es ésta un área relativamente nueva en la psicología del aprendizaje de matemáticas avanzadas.

Ha habido algunos estudios que examinan esta cuestión. Selden & Selden (1978), por ejemplo, clasificaron hasta 16 tipos de errores que los alumnos cometen en el estudio del álgebra abstracta elemental, si bien no presentan un marco teórico para comprender y actuar sobre ese fenómeno.

En otro orden de ideas, Nardi (2000) señala que el uso de argumentos pragmáticos (por oposición a epistemológicos) por parte del instructor (*aparecerá en el examen*, por ejemplo), aunque en cierto modo motivador, no es tan apropiado como los argumentos cognitivos (*las coclases son indispensables para estudiar cocientes*, e. g.).

Abstracción

Dubinsky et al. (1994), estiman que las mayores dificultades en la comprensión de los grupos aparecen con los conceptos que llevan al teorema de Lagrange y a los grupos cocientes. Sus estudios confirman la especie de que, a veces, esta materia produce una detención en el aprendizaje.

La dificultad no parece estar en las relaciones *bastante simples* (Nardi, 2000, p. 175) entre objetos matemáticos –por ejemplo, el mismo teorema de Lagrange–, sino en la naturaleza abstracta de los objetos involucrados –en las coclases como objetos que se mide, se cuenta y se compara– (Cf. Hazzan & Leron, 1996).

Representaciones visuales

Nardi (1996, 2000) nos advierte que la representación visual de carácter geométrico de los conceptos que el instructor tiende a utilizar o que el estudiante construye (equivalencias como líneas rectas, coclases como cuadrados), parece ser interpretada literalmente por este último, lo que sugiere un potencial peligro cognitivo construido, en general, en el uso de imágenes metafóricas. Esas imágenes (rectas y cuadrados) no ayudarían sino que, por el contrario, serían medios de construcción de imagen dudosos y pobres para conceptos particularmente abstractos. Nardi añade que el concepto de coclase es *paradigmáticamente problemático* (sus itálicas).

El lenguaje

Por otra parte, los estudiantes manifiestan dificultades para diferenciar, por ejemplo, los grupos $n\mathbb{Z}$ de los grupos $\mathbb{Z}_n$. (Dubinsky et al. 1994; Hazzan & Leron 1994; Brown et al., 1997). Asimismo, Nardi (1996), señala posibles confusiones lingüísticas, por ejemplo, entre las expresiones $G - K$ y G/K.

Noción de isomorfismo

En primer lugar, entender un isomorfismo de grupos requiere de los conceptos de grupo, función y cuantificador. (Leron et al., 1995).

Por su parte, Nardi (2000), agrega que el descomponer el teorema en sus elementos constituyentes (esto es, cociente, función definida desde los elementos del grupo, función definida desde las clases, etc.) es una técnica particularmente eficiente para favorecer el aprendizaje.

Leron, Hazzan & Zazkis (1994), Leron (1995) y Nardi (2000), están de acuerdo en que una expresión formal de muchas ideas generales acerca de similaridad y diferencia, en particular la idea de que dos cosas que son diferentes pueden ser vistas como similares bajo

un acto de abstracción apropiado, contiene una dificultad de abstracción que está en el corazón de la dificultad de los estudiantes para entender la relación que un isomorfismo de grupos define.

Ahora bien, Lajoie (2001), indica que, en la raíz de las dificultades relacionadas con el aprendizaje de la teoría elemental de grupos, hay ciertas componentes de las imágenes conceptuales (de los procedimientos, de las definiciones) de los estudiantes, que entran en conflicto con las definiciones formales pero que son válidas en ciertos contextos –a veces, en algunos amplios y difíciles de cambiar–. En el caso del isomorfismo de grupos, hay una parte de la definición que es tempranamente accesible, pero que también es nebulosa y no sirve, por ejemplo, para responder a la pregunta de si dos grupos son isomorfos: se piensa que deben ser similares, pero no se asocia eso con la idea de morfismo.

Respecto de la idea intuitiva de isomorfismo y del orden de la presentación, los investigadores no siempre están de acuerdo.

Por ejemplo, Leron y otros (Leron et al., 1995) piensan que debe darse primero esa idea intuitiva, y que es necesario empezar con isomorfismos y luego seguir con morfismos en general.

Lajoie (2001), sin embargo, no coincide con estas afirmaciones, y agrega que, si una idea de similaridad (idea intuitiva de isomorfismo) no está asociada a la operación, no es muy útil. (Lajoie no está en contra de una aproximación intuitiva, pero señala que ésta no necesariamente posibilita a los estudiantes entender lo que se querría que comprendieran).

Teorema del isomorfismo

A las dificultades ya señaladas, que inciden, por cierto, en el logro de una adecuada claridad conceptual en el teorema que nos interesa, es necesario agregar, al menos, las consideraciones que reseñamos a continuación.

Nardi (1996) reporta que los estudiantes se afligen por las siguientes ideas: definir una función entre dos grupos; definir una nueva relación entre conjuntos de elementos de estos grupos, y definir un tipo de morfismo entre estos conjuntos o entre elementos del grupo y conjuntos de elementos. Encuentra evidencia de una conceptualización mecánica, sin entendimiento conceptual, del isomorfismo definido en las clases. Estima que el cambio de niveles de abstracción (función definida entre elementos y función definida desde clases) debe ser presentado explícitamente al aprendiz, pues no le es evidente. Agrega que, sin una descomposición del teorema en sus elementos constituyentes, no es sorprendente que los estudiantes no sean capaces de hacer estos cambios en niveles más abstractos.

Nardi (2000) encuentra, además, una confusión importante entre la función definida en las clases y la definida entre elementos. Expresa que el grado de complejidad en un problema que requiere una bien coordinada manipulación de funciones entre diferentes conjuntos es extremadamente alto. Estima que la conexión entre ambas funciones y la importancia de volver de una a la otra deben ser hechas explícitas al aprendiz, y que las preguntas orientadoras que procuran ser pequeños pasos hacia educir de los estudiantes una completación de la demostración no parecen iluminar y disolver sus percepciones problemáticas.

Propuestas didácticas

En respuesta a la situación, en algunos aspectos, deplorable, de la enseñanza del álgebra abstracta descrita más arriba (Cf. Dubinsky & Leron, 1995), varios investigadores han planteado alternativas a la enseñanza tradicional del álgebra abstracta.

En Dubinsky et al. (1994), hay una breve reseña acerca de las aproximaciones al tema que podría utilizarse: el curriculum en espiral propuesto por Brunner (1964); el aprendizaje por refinamientos sucesivos, en que se está siempre frente al todo, en una sucesión de

versiones simplificadas de él, cada vez un poco más compleja y más cercana a la versión final que en el estadio precedente; o aun el *holistic spray*, que utiliza computadores y toda herramienta disponible para arrojar al alumno a un ambiente que contiene tanto como sea posible del concepto bajo estudio.

En cualquier caso, es inevitable coincidir con el juicio de Asiala et al. (2000), que ya habíamos señalado desde nuestro punto de vista: hay trabajos relacionados ya sea con la comprensión de diversos aspectos de esa materia matemática o bien con su enseñanza, pero son muy escasos los artículos o monografías dedicados a esa enseñanza explícitamente vinculados con la investigación.

Consideraciones teóricas

La abstracción

Los siguientes autores han examinado el tema de la abstracción relacionándola con el estudio del álgebra abstracta.

Nardi (1996), nos recuerda que la Matemática se define como una forma abstracta de pensamiento, y que la abstracción está considerada entre las actividades mentales menos accesibles. En un contexto educacional, agrega, el encuentro con la abstracción matemática es un paso crucial ya en la transición desde las matemáticas informales de la escuela al formalismo de la matemática universitaria. Esta transición está caracterizada por tensiones cognitivas, que procede a identificar y explorar (en varios niveles, incluyendo el de la teoría de grupos).

Ella describe el encuentro del novicio con la abstracción, en ese nivel, como un *proceso personal de construcción de sentido* y a la vez como un proceso de inculturación: la nueva cultura es la matemática avanzada introducida por el experto; y la interacción del novicio con las nuevas definiciones de conceptos está obstruida por su conocimiento previo inestable.

La *construcción de imágenes conceptuales* es descrita por ella como una construcción de metáforas significativas y una exploración en la razón de ser de los nuevos conceptos y los nuevos razonamientos. Advierte que los estudiantes noveles experimentan dificultades con la mecánica del razonamiento matemático formal tanto como con la aplicación de esa mecánica en una manera contextualizada. Este comportamiento descontextualizado estaría ligado a la fragilidad de su conocimiento con respecto a la naturaleza del rigor en la matemática formal.

En el aspecto lingüístico, señala que, en un ambiente de aprendizaje amistoso de debate, el estudiante intenta una presentación formalística de su argumento, pero puede expresarlo con mayor facilidad y precisión en lenguaje ordinario; señala, sin embargo, algunas ocurrencias en las que el uso de expresiones coloquiales por parte del instructor puede distraer al alumno de su aprendizaje.

Por su parte Hazzan (2001), se refiere a la reducción del nivel de abstracción.

Comenta que, dado que no hay una sola forma de definir abstracción, una reducción de nivel de abstracción puede entenderse, también, de varias maneras. Agrega que los estudiantes procuran hacer accesibles los nuevos conceptos, de modo que los puedan pensar y manipular. Además, tipifica tres maneras que ellos usan y que pueden llevar a error: retrotraer a estructuras familiares (pero ciertas propiedades pueden no ser ya válidas en el nuevo ambiente); usar un procedimiento canónico (se evita el examen de la materia matemática bajo discusión); adoptar una perspectiva local (en lugar de estudiar el grupo, argumentan sobre los elementos; pues perciben fuertemente la matemática como siempre dando reglas para resolver).

El nivel meta

Jean-Luc Dorier, (1995), se refiere a conceptos que no fueron inventados solo para

resolver nuevos problemas, y los llama, (siguiendo a Robert & Robinet, 1993), *conceptos unificadores y generalizadores* (*concepts unificateurs et généralisateurs*).

Uno de estos conceptos es, claro está, el de grupo, y parece conveniente incluir aquí una brevísima reseña al respecto, dado que Dorier señala que es necesario introducir algunos aspectos *meta* en su enseñanza.

Estos conceptos unifican los diversos métodos, herramientas y objetos que existían previamente, y presentan un cambio de perspectiva que induce un nivel sofisticado en las operaciones mentales. En su construcción, se puede distinguir dos estados (que, a su vez, pueden corresponder a dos procesos mentales en el aprendizaje): reconocimiento de similaridades entre objetos, herramientas y métodos, y traída de este concepto a la vida. Hacer explícito este concepto induce una reorganización de antiguas competencias y elementos del conocimiento (según es, por lo demás, claramente apreciable en el caso de los grupos).

Como consecuencia, una de las dificultades más notorias en la enseñanza de estos conceptos es el rol de los conocimientos preexistentes, relacionados y de menor nivel. Ellos deben ser integrados en un proceso de abstracción, esto es, deben ser criticados y sus características puestas en evidencia, pues serán generalizadas y unificadas; al mismo tiempo, ciertas especificidades deben ser dejadas de lado.

Este proceso necesita no solo de buena comprensión de los objetos que se van a abstraer, sino que requiere también de la identificación de las características comunes que definirán su representación formal, abstracta –lo que comporta, con frecuencia, mirar desde otro ángulo el conocimiento adquirido–.

Un asunto de importancia es, por cierto, la transferencia de competencias del nivel inferior al más avanzado. Al respecto, nos señala Dorier, es mucho más relevante poseer un mínimo de competencia en casi todo el conocimiento relevante previo, que elaboradas competencias en algunos aspectos y vacíos en los otros.

El contexto nuevo, más complejo, parece hacer interdependientes a todo el conocimiento previo y a las competencias involucradas; así es que, si algo está faltando en la cadena, todos fallan para operar en el siguiente nivel, pues ninguna es realmente innecesaria.

Concluye Dorier que, en particular para estos conceptos, es necesario que la enseñanza proceda en forma no-lineal, y que se requiera tanto de etapas como de umbrales de competencia mínima.

APOE en teoría de grupos

El grupo RUMEC ha reportado acerca de los conceptos que nos interesan, parte de lo cual ya ha sido reseñado aquí.

Para ello, han trabajado con profesores en ejercicio y con estudiantes de pregrado norteamericanos, cuidando de incluir a individuos que parecían estar en el proceso de aprender los conceptos bajo estudio.

En lo que sigue, relatamos los hallazgos presentados, particularmente por Dubinsky et al. (1994), Asiala et al. (1997) y Brown et al. (1997).

En algunos casos, pero no en todos, se detalla una descomposición genética en términos de las construcciones matemáticas en juego.

Las afirmaciones que se hará acerca de los individuos se refieren principalmente a quienes están en el proceso de aprender estos conceptos.

Para simplificar la exposición, añadimos la siguiente

Notation *Entenderemos siempre que G es un grupo y que H es un subgrupo de G; que a, a' son elementos cualesquiera de G y que $h, h', h_1, h_2, \ldots, h_n$ son*

elementos cualesquiera de H.

Si no hay advertencia en contrario o el contexto no señala otra cosa, G es un grupo multiplicativo.

Para un número natural n, $\mathbb{Z}_n$ denota el grupo de las clases de números enteros módulo n, S_n es el grupo simétrico de n letras, D_n es el grupo diédrico de un polígono regular de n lados.

Grupos

Desde un punto de vista matemático, la comprensión de la noción de grupo comporta, entre otros requisitos: el conocimiento de varias propiedades; algunas construcciones independientes de ejemplos particulares –incluso, grupos de elementos indefinidos–, y una operación binaria que satisface los axiomas. (Cf. Dubinsky et al., 1994).

Grupos y conjuntos

A veces se trata de integrar la idea de grupo al esquema ya existente y más familiar de conjunto, para desde allí construir el nuevo esquema que se necesita.

Esto puede ocurrir por la vía de interpretar primero un grupo como conjunto de elementos y, similarmente, un subgrupo como subconjunto.

Posteriormente, cuando se aprecia que lo anterior es inadecuado, se comienza a incluir la operación en la determinación del grupo; así, grupos y subgrupos son interpretados como conjuntos con operaciones.

En cualquier caso, para ello se necesita concebir los conjuntos no solo como proceso (reunir los elementos) sino como objetos que pueden ser a su vez elementos y sobre los cuales se puede actuar con funciones. De otra manera, se puede tener problemas mayores con muchos conceptos del ámbito de los grupos.

Grupos y operaciones

Tanto desde el punto psicogenético como desde el matemático, una operación en un grupo es una función. Es natural que intervenga, entonces, en la construcción del esquema de grupo, un esquema de función.

Esto requiere la coordinación de varios conceptos generales relativos a funciones con las ideas que aparecen en los grupos. Se necesitan, por ejemplo, las nociones de inyectividad y epiyectividad para el estudio de grupos de permutaciones –y para la noción posterior de isomorfismo–.

En particular, debe entenderse las funciones como procesos (restricción, e.g.) para la operación definida por el grupo en un subconjunto.

Para grupos de permutaciones (y automorfismos, posteriormente), se requiere encapsular construcciones proceso de funciones, para verlas como objetos.

Tal como en el caso de los conjuntos, el no disponer de concepciones relativamente poderosas acerca de funciones puede derivar en problemas mayores con muchos conceptos de grupos.

Descomposición genética

Tal como se dijo, se comienza por la noción de grupo como conjunto.

Se debe agregar luego la operación binaria. Aunque inicialmente se lo haga sin diferenciación de las propiedades constitutivas del concepto de grupo, es un paso importante: se trata de enfocarse en su aspecto funcional.

Eventualmente, se encapsula un conjunto de objetos y alguna operación en ese conjunto en la concepción de ese grupo particular.

Para el concepto general de grupo se encapsula dos objetos, un conjunto y una función (la operación) coordinado en un par que puede ser la primera comprensión real de un grupo.

Tras desencapsular el objeto grupo puede haber otras operaciones que podrían aplicarse al conjunto, pero la que proviene de la desencapsulación es la preferida. (Por ejemplo, –y

salvo *transporte de estructura–*, para la construcción de un grupo de 6 elementos, la operación módulo 6 por sobre la del grupo S_3).

El paso final en la construcción del concepto de grupo el estudiante lo inicia con la constatación de que pueden construirse otros grupos, aparentemente diferentes, pero isomorfos, en sentido ingenuo. (Cf. Brown et al., 1997).

Subgrupos

Hay un fuerte paralelismo en la psicogénesis de los conceptos de grupo y de subgrupo.

Incluso, como dijimos antes, se tiene evidencias en el sentido de que las ideas de grupo y de subgrupo podrían sintetizarse simultáneamente. (Brown et al., 1997).

Operaciones

Se encapsulan en algún momento los subgrupos como conjuntos con operaciones.

Posteriormente, se puede coordinar con la operación inducida por el grupo ambiente: una vez que se aprecia el rol de la operación, se puede entender que se trata de la 'misma' en G y en H, lo que al comienzo puede parecer arbitrario y eventualmente no estar relacionado con la restricción de la operación al subconjunto.

Ocurre luego que, más allá de la consideración de que las operaciones de G y de H concuerden, se realiza la operación mental de restringir la operación a pares de elementos de H.

Se requiere entonces una coordinación del concepto de subgrupo emergente con el concepto de grupo y el concepto de función.

El enlace entre los conceptos de grupo y de subgrupo es el de función: la restricción de la operación.

Finalmente, para el esquema de grupo parece importante la distinción entre un subgrupo como parte de un grupo más grande y como grupo en su propio derecho.

Coclases

Los estudios realizados confirman la idea ingenua de que el aprendizaje de las coclases es extremadamente difícil.

Seguimos aquí a Dubinsky et al. (1994).

Acciones

Puede haber situaciones en las que ya la concepción acción puede sea difícil si no imposible de llevar a cabo, tal como explicitamos a continuación.

Por lo demás, para una concepción acción se requiere no solo realizar las manipulaciones involucradas, sino hacerlas con fórmulas o recetas precisas: para $\mathbb{Z}_n$, por ejemplo, ello es claramente posible, pero no así para S_n, si $n > 4$.

En principio, lo anterior, entonces, parece realizable solo en situaciones familiares y donde hay fórmulas explícitas a disposición, pero, para una coclase genérica, es incluso difícil ver qué podría ser una concepción acción: presumiblemente, ella consistiría en escribir todos los elementos de una situación dada, pero, de nuevo, esto parece difícil si n es demasiado grande, y es definitivamente imposible si el grupo es infinito.

Se aprecia que una concepción acción evoluciona hacia un proceso cuando, en el caso finito, se escribe la clase de a módulo H como $\{ah_1, ah_2, \ldots, ah_n\}$

Procesos

El desarrollo de la comprensión de coclases desde acción a proceso puede ocurrir inicialmente en estructuras ya conocidas. Mientras esto se realiza, ciertas coclases familiares pueden convertirse en procesos ($\mathbb{Z}_n$, para n pequeño, e. g.) pero en otros casos, no necesariamente complejos desde el punto de vista matemático (D_3, por ejemplo), puede presentarse una gran dificultad.

Por otra parte, entender un ejemplo concreto simple no parece ayudar mucho en la extensión al caso general.

En cualquier caso, tras la completación de la interiorización, la teoría sugiere que

construir una coclase se convertiría en un proceso que podría realizarse en una variedad de situaciones.

Una concepción proceso permite pensar acerca de la coclase *aH* imaginando el producto de *a* con cada *h* de *H*, sin tener que realizar los productos. En tal concepción, lo más importante en lo que se piensa es la formación de la coclase.

Es la concepción proceso la que permitiría escribir la coclase precisamente como *aH*, o, inversamente, tal escritura forzaría una concepción proceso.

Para el caso infinito, –dado que, evidentemente, no se puede realizar infinitos pasos– es necesario tener una concepción proceso antes de que uno pueda pensar cualquiera cosa relacionada con coclases.

Objetos

Una manera de percibir que el proceso de encapsulación de coclases no se ha completado se obtiene, por ejemplo, al pedir que se multiplique coclases (cosa que analizaremos por separado, más adelante): el estudiante vuelve atrás para explicar cómo se forman las coclases; esto es, no parece fácil hablar de las coclases sino en términos del proceso de formarlas.

Cuando la noción está encapsulada, es posible realizar una serie de acciones con los objetos: darles nombres simbólicos; comparar sus cardinalidades; contar su número; intentar el producto de dos de ellos; considerar relaciones entre elementos, subgrupos y coclases expresadas en las varias versiones equivalentes para la normalidad en la formación de productos de coclases.

La desencapsulación parece jugar un rol mayor al trabajar con coclases.

Se tiene evidencia de la concepción objeto de coclase cuando se es capaz de realizar cálculos tales como $aHa^{-1} \subseteq H$, o bien $aH \subseteq Ha$. En tal caso, la desencapsulación puede estar indicada explícitamente por el cálculo de una expresión formadora de cualquiera de los conjuntos mencionados. Otra manera de comprobar la encapsulación se tiene cuando se es capaz de construir G/H iterando las clases aH para $a \in G$.

Esquemas

No hemos encontrado muchas referencias a la construcción de esquemas en este ámbito, en la literatura revisada. Esto puede deberse a que esta construcción mental –en abstracto– ha demorado más en desarrollarse.

Una excepción hallada señala que, para el esquema de coclases es necesario disponer de concepciones objeto y proceso de la formación de coclases.

Producto de coclases

El producto de coclases fue analizado en Asiala et al. (1997):

La multiplicación de coclases requiere, naturalmente, de la encapsulación del objeto coclase, de otra manera, hay dificultades mayores para realizar la operación.

Se observa semejanzas en la descomposición genética de la formación de coclases y la de su multiplicación (o suma) –si bien, el procedimiento es ahora más complejo–.

Aquí hay mayor dependencia del dominio: puede darse que se entienda el caso Z_n, para n pequeño, pero no el de D_3. (Tal situación cuestiona, naturalmente, que se haya alcanzado verdadera comprensión).

Desde el punto de vista matemático, para multiplicar aH por $a'H$ hay, por supuesto, los métodos de producto de conjuntos –esto es, hacer todos los productos $(ah)(a'h'), h, h' \in H$–, o el de elegir representantes en las clases. Ambos tienen sus respectivos requisitos: el primero, determinar que se tiene una operación binaria en el sentido de que el producto es todavía una coclase; el segundo, el de comprobar que la definición es independiente de la elección de los representantes elegidos.

Desencapsulación necesaria

Con una concepción objeto de coclase se hace posible aplicar el esquema de operación

binaria.

Los dos métodos de multiplicación señalados requieren de desencapsulación de las coclases al proceso de formación de coclases; hay movimiento de acción a proceso en los dos. Los resultados de cada método deben ser coordinados con el esquema de grupo.

Producto de los conjuntos

El método del producto de conjuntos señalado arriba es útil para la obtención tanto del proceso como del objeto 'producto de clases'; la construcción es muy similar a la de otras operaciones binarias: los objetos que se van a multiplicar son desencapsulados a su proceso de formación, y están coordinados con la operación del grupo para formar el proceso de multiplicar cada elemento de la primera coclase por cada elemento de la segunda; este proceso es encapsulado para formar la nueva coclase –tal encapsulación requiere de aquella confirmación de que el producto de coclases sea también una coclase, lo que es una acción en el producto de coclases interpretado como objeto–.

Uso de representantes

El producto de coclases vía representantes es esencialmente encapsulación: el proceso de operar todos los elementos es encapsulado en el representante único, que es un objeto.

Se aprecia diversos grados de comprensión.

Quienes dan explicaciones razonables de la independencia respecto de los representantes parecen tener más que una concepción acción de la operación binaria del grupo cociente, pues parecen haber interiorizado la acción.

En cualquier caso, para multiplicar coclases vía representantes, se requiere que ellas sean entendidas a la vez como objetos y como procesos: la coclase que contiene el elemento resultante es, a su vez, la coclase resultante.

Normalidad

En las muestras realizadas por Asiala et al. (1997), cuyo análisis seguimos aquí,la mayor parte de los individuos mostró entender las coclases, pero no la normalidad.

La dificultad más seria es confundir normalidad con conmutatividad; esto parece estar relacionado con incapacidad de encapsular el proceso de formación de coclases y con pensar en la normalidad como una propiedad que un subgrupo tiene en cuanto grupo, en forma independiente del grupo que lo contiene.

En general, parece difícil esperar que se construya un concepto de coclase viable para habérselas con el de normalidad.

Como se sabe, hay varias maneras de definir que H sea un subgrupo normal de G. Los estudiantes encuestados manifiestan preferencia clara (pero no mayor comprensión) por la versión $aH = Ha, a \in G$; la reseña que sigue se refiere principalmente a esta versión de la definición de normalidad.

Coordinación de esquemas

El concepto de normalidad consiste de la coordinación de tres esquemas generales: el de subgrupo, el de coclase y la noción general de que un objeto tenga una propiedad.

Etapa preliminar

Hay una etapa a la que podemos referirnos como pre-normal, en la cual no se tiene idea de qué significa el concepto y las ayudas de los instructores no son efectivas. Algunos alumnos solo pueden pensarla en términos de geometría o psicología.

Primera etapa

La idea primera es la de que normalidad es una propiedad del (sub)grupo H, independiente de G.

Segunda etapa

El aprendiz se involucra en un pensamiento que lleva a diferenciar entre acciones en H y en G, y en coordinarlas para llegar a la normalidad como una acción aplicada a un objeto H en cuanto subgrupo de G.

Esta es una acción que tiene su propia descomposición genética, de varios niveles (no nos referimos aquí precisamente a las fases operacionales):

Primer nivel

Este consiste en una acción en los elementos de H y de G con escaso control, que puede ser expresada como $ah = ha$, para a, h cualesquiera, y que puede ser un camino para confundir normalidad con conmutatividad –o tal vez permanezca en esta forma no estructurada–.

Segundo nivel

Ahora se trata de diferenciar entre los elementos de G y de los de H.

Un estudiante en este nivel puede referirse a $ah = ha$ para cada $h \in H$ y considerar a separadamente o no en absoluto.

Todavía la concepción es acción.

Tercer nivel

Ya diferenciados los elementos de G y de H, la acción que refiere a H puede ser interiorizada en un proceso y encapsulada para alcanzar una afirmación tal como $aH = Ha$.

De todas maneras y no obstante el hecho de que la afirmación sea entendida como un proceso que involucra a los elementos de H y a un elemento fijo a de G, puede haber un retraso antes de que se esté listo para iterar a en G.

Cuarto nivel

La relación $aH = Ha$ es encapsulada como una proposición que es un objeto que puede depender del parámetro a.

Este parámetro es iterado sobre G para formar el proceso $aH = Ha$ para cada $a \in G$.

El proceso es encapsulado (cuando ello ocurre) en la aserción de que cada coclase izquierda es igual a la coclase derecha correspondiente.

Esquema

Una vez construido el esquema, se tematiza –el individuo reconoce tanto las relaciones que están incluidas en él como los problemas que pueden resolverse con su auxilio (cf. Trigueros, 2005, p. 22)– y puede ser aplicado a una situación ad hoc que involucre a un grupo y a un subgrupo.

Cocientes

Según los datos obtenidos por Dubinsky et al. (1994), único trabajo que aborda los cocientes (en esta perspectiva) en la literatura reseñada, los grupos cocientes resultan ser una materia de la mayor dificultad: un porcentaje alto de los alumnos parece perdido y puede terminar desconectándose aquí del curso (Ibíd., p. 24).

Incluso quienes pueden distinguir un subgrupo normal de uno que no lo es distan bastante de poder construir un grupo cociente.

Difícilmente alguien identifica el cociente con un grupo conocido, isomorfo.

Aun en el caso de que se comience con un grupo concreto, la transición desde el grupo a uno de sus cocientes cambia la naturaleza de los elementos y presenta dificultad acusada.

El conjunto cociente

Dependiendo, como se dijo, del buen éxito de la encapsulación de coclases, los estudiantes pueden ver que los elementos de G/H se construyen iterando en G: para cada $a \in G$, se construye aH.

Subyacente a esto y accesible si es necesario está el proceso de formar aH iterando en H y formando cada ah.

Coordinación de esquemas

El concepto de grupo cociente consiste en la coordinación de tres esquemas: el de coclases, el de operación binaria y el de grupo. Hay varias construcciones tomadas de esos esquemas de coclase que se aplican a grupos cocientes.

La coordinación consiste en seleccionar construcciones específicas de los esquemas

subsidiarios y aplicarlos a la situación del grupo cociente, según se describe a continuación.

Conjunto de coclases

Desde el esquema de coclases se obtiene la formación de un conjunto de coclases.

Para formar el conjunto G/H, el estudiante debe poder pensar las coclases como objetos.

Construir elementos G/H requiere de desencapsular esos objetos en el proceso de formación de coclases; construir las coclases mismas requiere de encapsular el proceso de formación de coclases para cada una y luego el proceso de iteración sobre los elementos del grupo original para formar coclases para cada uno.

Errores posibles: considerar clases hG, o solo las clases hH ($h \in H$); también ocurre que se trabaje con representantes de cada coclase y se los utilice sin considerar las clases mismas.

Producto de coclases

La construcción del producto de coclases se apoya en los esquemas de operación binaria y de coclase.

El esquema para el producto de clases incluye dos procesos: el método de representantes y el del producto de conjuntos. El esquema de grupo cociente los coordina través del concepto de normalidad.

Grupo

Del esquema de grupos se obtienen la propiedad de normalidad y el hecho de que si H es un subgrupo normal entonces G/H es un grupo.

El esquema de grupo puede ayudar también a identificar el cociente con algún grupo conocido.

La coordinación

El desarrollo tiene varios pasos:

Primero, hay conciencia de la existencia de dos métodos distintos para multiplicar coclases y de que cada uno debe cumplir un requisito particular: el producto de coclases debe ser una coclase; el producto de representantes no debe depender de la elección.

Segundo, hay percepción de la necesidad de que ambos métodos dan la misma respuesta.

Tercero, la demostración de que ambos métodos dan el mismo resultado es una coordinación bastante simple de procesos que involucran asociatividad del producto de clases e igualdad de coclases derechas e izquierdas.

Propiedades de grupo del cociente

Una vez formados los esquemas de coclases y de sus productos y tematizados en objetos, una acción en ellos es formar el par de la operación binaria y chequear las propiedades de grupo.

El concepto de normalidad reaparece como el criterio decisivo para que la operación binaria satisfaga estas propiedades.

Identificación del cociente

Una vez que el esquema de grupo cociente se ha desarrollado hasta el punto de que el aprendiz es capaz de construir uno particular, puede ser coordinado con el esquema de grupo para formar la acción que identifica el cociente.

Concepto de isomorfismo

No hemos encontrado una descomposición genética detallada del teorema del isomorfismo en la literatura.

Reseñamos, sin embargo, brevemente, el trabajo de Leron et al. (1995), que se relaciona claramente con la perspectiva de RUMEC.

Complejidad del concepto

En primer lugar, el concepto de isomorfismo es muy complejo, y está conectado con varios otros que el alumno puede comprender parcialmente: aprender ese puede permitir

comprender estos otros.

En particular, ese concepto es inseparable de la noción abstracta de grupo (según se indicó también, desde otras fuentes, anteriormente).

Noción ingenua versus definición formal

La noción ingenua y la definición formal de isomorfismo, esto es, la relación de que dos grupos son isomorfos respecto del objeto isomorfismo, son muy distintas. La primera es cercana a la intuición inmediata; la segunda es, en realidad, lejana. En la primera, basta con una idea ingenua de relación de equivalencia; en la segunda, hay que considerar que el objeto isomorfismo es direccional, funcional y mucho más difícil de entender, y en su construcción se requiere de la concepción objeto de función, la de isomorfismo y la de cuantificación (y, por supuesto, agregamos, la concepción objeto de grupo) –la cuantificación, en particular, es múltiple (*existe una función tal que… para cada par…*)–.

El proceso de trabajar con un isomorfismo en abstracto es, también, muy diferente de lidiar con uno concreto: el primero se puede describir como preservación de las propiedades abstractas del grupo, pero construir un isomorfismo entre S_3 y D_3, e.g., es un tanto dificultoso (por lo demás, no es fácil percibir, desde el isomorfismo, que ambos grupos son *el mismo*). (Cf. Dubinsky et al., 1996).

Isomorfismo versus no-isomorfismo

Respecto de la existencia o no existencia de un isomorfismo entre dos grupos, señalan que ella es, en principio y en términos de cuantificación, difícil; sin embargo, los alumnos buscan propiedades que ambos grupos puedan no compartir. Desafortunadamente, se suele también usar este procedimiento como razón suficiente para que haya isomorfismo.

Por otra parte, para la confirmación de que dos grupos sean isomorfos, el alumno tenderá a buscar procedimientos de carácter algorítmicos.

Morfismo e isomorfismo

Leron y otros señalan, finalmente, (aunque sin evidencia empírica) que la secuencia natural, desde un punto de vista cognitivo, es morfismo-isomorfismo, y no al revés, según se sugiere en los textos de enseñanza habituales.

Comentario

Como es evidente, al analizar un trabajo, hay dos aspectos muy diferentes que considerar, que son particularmente relevantes en el ámbito educacional:

Uno es el avance de la disciplina científica, que admite poca réplica –salvo en el sentido de los *programas de investigación* de Lakatos (Lakatos, 1993), e.g.–.

Un aspecto diferente es el de las estrategias de práctica pedagógica que pueden derivarse del desarrollo de la teoría, que admiten más distancia de parte del observador.

En lo que sigue, haremos una visión en cierto modo crítica de los planteamientos reseñados en este capítulo, desde nuestra propia perspectiva. Ello es, naturalmente, un tanto osado, particularmente por mostrar algunos puntos de vista disímiles en relación con un grupo respetado de investigadores, pioneros, por lo demás, en el ámbito que nos ocupa. Nuestra justificación –salvo, naturalmente, la de sustentar esos puntos de vista diferentes– es la de exponer algunas ideas que están en el fundamento de nuestra propuesta.

De todas maneras y bien entendido, tenemos claridad acerca de nuestra falta de competencia para evaluar la estrategia general del grupo RUMEC, cosa que no pretendemos; simplemente, explicitamos nuestra postura al respecto.

En cualquier caso, debe tenerse en cuenta que el método propuesto por RUMEC es mucho más novedoso y de mayores alcances que el tradicional.

Coincidencia general

Nos parece que el planteamiento de RUMEC es bastante completo: incluye investigación, estrategias pedagógicas a partir de esa investigación, análisis de datos que

confirma o rectifica los diseños propuestos –todo ello en un ciclo que se reitera–.

Cognición y enseñanza

Una propuesta de descomposición genética bien realizada cualquiera es, naturalmente, indiscutible tanto por la coherencia de la explicación cuanto por el estar avalada por evidencias empíricas –que la van verificando, precisando, corrigiendo, ampliando–.

Los hallazgos del Programa RUMEC en los procesos cognitivos son, por supuesto, un asidero sólido para avanzar en la enseñanza y el aprendizaje de la teoría de grupos. Además, dentro de los trabajos comparativamente escasos que hay en el área de la didáctica del álgebra abstracta –cosa que no le resta mérito a la perspectiva–, se destaca precisamente por su intención declarada y su práctica explícita de asir los diseños instruccionales de la investigación en la enseñanza y el aprendizaje efectivo de los tópicos bajo estudio.

El recurso decidido a auxiliares electrónicos para permitir disponer de una abundancia de cálculos y de situaciones parece particularmente interesante, máxime en un área en la que tal uso específico es bastante desconocido por el público.

Por otra parte, no ponemos en duda el juicio de estos investigadores en cuanto a que su manera de abordar el proceso de enseñanza-aprendizaje es muy promisorio, y que se consigue, en particular: que las versiones institucionalizadas del conocimiento no sean totalmente ajenas al estudiante; que la actitud de los estudiantes respecto de las matemáticas y del álgebra abstracta en particular mejoren y que ello deba largamente al buen éxito que perciben en el curso que están tomando (Clark et al., 1997); que, respecto a normalidad y cocientes, los resultados se estimen mucho mejores que los de cursos tradicionales (Asiala et al., 1997).

Cautela compartida

Hay ciertos aspectos que el propio grupo de investigadores ha manifestado como dificultades en su aproximación, en el caso de los objetos que nos ocupan: grupos y subgrupos, coclases y sus productos, grupo cociente, isomorfismo.

Compartimos sus reservas no solo en términos de la eventual autocrítica realizada por el equipo sino como dificultades que pueden surgir de la naturaleza de los propios conceptos.

Desde nuestra perspectiva, tales dificultades se originan en los aspectos que reseñamos a continuación.

Tamaño de los grupos

En primer lugar, cuando el número cardinal del grupo bajo estudio es grande, la construcción de los conceptos se hace difícil y eventualmente impracticable desde las acciones en adelante.

El caso infinito, en particular, es, en cierto sentido, imposible de abordar.

Complejidad de la estructura interna

Cuando la estructura del grupo es simple ($\mathbb{Z}_n$, pongamos por caso), el alumno puede abordar fácilmente el estudio desde las acciones. Sin embargo, si, por el contrario, el grupo reviste cierta complejidad (el inevitable S_n, por ejemplo), la construcción de las clases se hace difícil aun disponiendo de abundancia de ejemplos y de auxiliares electrónicos.

Computadores y programación

Los sujetos de los estudios declararon que algunas actividades que debían realizar vía programación les parecieron extremadamente difíciles.

Respecto del computador, manifiestan que trabaja con cierta lentitud (por ejemplo, en cuanto a grupos de permutaciones, según los datos de que se dispone, solo habían podido abordar los de menos de 6 elementos), y que ayuda solo indirectamente a hacer demostraciones.

Trabajo en común

No parece sorprendente el que se reporte que aparezca conflictos al trabajar en equipo,

y que, además, se necesite de un profundo cambio de actitud del profesor.

Nuestras reservas

Si bien no estamos en condiciones de juzgar con claridad en los aspectos que detallamos a continuación, nos parece conveniente destinarles una palabra de cautela.

Programación

Aun cuando no podemos juzgar la utilización del programa ISETL para el aprendizaje de grupos, tenemos indicios de que parece posible que el lenguaje de programación quede como, si no una barrera, un paso intermedio para abordar conceptos susceptibles de aproximación directa.

Recurso a la geometría

El grupo D_n representa, por supuesto, un caso interesante de no-abelianidad, en general, distinto de S_n. Para el caso de $n = 3$, ofrece un caso relevante en el aprendizaje de la noción de isomorfismo, y, para n cualquiera, una ocasión de obtener grupos isomorfos a los grupos $\mathbb{Z}_n$.

D_n es, por supuesto, un grupo geométrico, y se puede intentar exhibir la normalidad del subgrupo de rotaciones en términos también geométricos, pero, de acuerdo a nuestra experiencia, ello no nos parece, en realidad, recomendable.

Hay una alternativa en este sentido, pero ella no sería viable, en principio, pues tendría que esperar a un mayor conocimiento del desarrollo de la teoría matemática. Ella consiste en considerar la geometría de una figura en la perspectiva del *Programa de Erlangen* de Klein (Klein, F. (1884): para un subconjunto F del plano (una figura), tomar, dentro del grupo afín del plano, el subgrupo $G_F = G$ de las funciones que dejan globalmente estable F; el subgrupo $H_F = H$ de los elementos de G que dejan fijos todos los puntos de F es normal en G; la geometría de F es la acción de G/H en F.

Divergencia

Señalamos aquí algunos aspectos que nos parece conveniente enfatizar por cuanto representan nuestra mayor divergencia respecto de la aproximación de RUMEC a los cocientes.

Naturalidad de los cocientes

Nos parece que la relación entre las relaciones de equivalencia y las particiones en los conjuntos sobre los cuales están definidas es una idea sumamente natural. De hecho y según argumentamos en el Capítulo 9, la relación de equivalencia es una noción imprescindible para la convivencia civilizada. Considerarla una idea 'sofisticada' es un tanto absurdo, y priva al aprendiz de un instrumento del mayor valor conceptual, y de una herramienta para construir otros conceptos. Por el contrario, no se debería desperdiciar la aproximación natural que se tiene a ellos.

Más aún, creemos que, incluso al interior de la Matemática, mantener el concepto de relación de equivalencia en los límites de la teoría de grupos no es una estrategia conveniente y debe desde el comienzo hacerse conexiones con otras áreas de la Matemática.

Es decir, el tratamiento propuesto por RUMEC, presumiblemente por razones técnicas, aparece desconectado de otras ideas, incluso de la Matemática. Esto nos parece de la mayor relevancia dada la preocupación del propio equipo de investigadores por la permanencia en el tiempo del concepto de cociente de un grupo.

Encapsulación de las clases

En particular, en la óptica que hemos descrito respecto de relaciones de equivalencia, la encapsulación de las clases en cuanto conjuntos (cual es su realidad) no pasaría necesariamente por un proceso algebraico y, llegado el caso de relaciones de equivalencia definidas por un subgrupo normal en un subgrupo, podrían estar disponibles para construir el objeto matemático grupo cociente.

Para ello, habría que lograr primero la encapsulación de un conjunto cociente como el resultado de definir relación de equivalencia en un conjunto *G*, y estudiar luego el caso de relaciones de equivalencia definidas por subgrupos (normales) *H* en un grupo ambiente *G*.

Alcanzar la encapsulación

Un objetivo importante del estudio de los cocientes en álgebra abstracta es, por supuesto, el de ciertas construcciones de los números reales y de los números complejos.

Si el encapsulamiento de los cocientes no se logra, es ciertamente dudoso que el concepto tenga alguna utilidad para esos y otros casos.

La cuestión empeora si se considera que la construcción realizada por RUMEC está hecha básicamente para el caso finito, que permanece bastante remoto de los casos de mayor interés, y, en apariencia, limitada a particiones que tienen clases de cardinal constante, con exclusión de comparaciones con cocientes más generales.

Normalidad y cociente

La presentación que hace RUMEC parece entender que la normalidad debe ir primero que la construcción del cociente.

Si bien desde el punto de vista de la teoría de grupos ello es indiscutible, cabe preguntarse si desde el punto de vista psicológico no resulta más natural la alternativa de construir primero cocientes y luego examinar la posibilidad de inducir en ellos, para el caso de un grupo *G*, una estructura en el cociente que resulte compatible con la operación de *G*. Nuestros datos apuntan en esa dirección.

Cocientes y abstracción

Hay todavía un sentido en que parece conveniente apartarse un poco de la aproximación de los trabajos aquí reseñados acerca de los grupos cocientes:

Tal como hemos descrito, desde un punto de vista propiamente algebraico, la construcción de un grupo (o conjunto) cociente es un trámite que debe hacerse para disponer de un objeto que satisfaga determinadas propiedades. Así, desde un punto de vista teórico, detenerse en la consideración de las clases y la especificidad de las operaciones entre ellas es mantenerse en el aspecto constructivo (en términos de la teoría matemática) en desmedro de las propiedades que se necesitan y respecto de las cuales la construcción es una garantía de existencia. (Cf. 3.3.3).

Tal como señalamos antes, los sistemas numéricos son un buen ejemplo para poner de relieve cuáles son los acentos que se deben hacer –sus propiedades, esto es, cómo funcionan, por sobre su naturaleza o ’*substancia*’–.

Representaciones geométricas

En los estudios de RUMEC no parece haber suficiente mención a registros de representación semiótica en el sentido elemental (no estricto) de representar una situación por la vía de dibujarla de alguna manera.

Hemos mencionado una opinión contraria respecto de representaciones visuales (Nardi 1996, 2000), en 6.3.2; por su parte, RUMEC se inclina por el uso del progtrama ISETL para la aprehensión de los conceptos.

De todas maneras, nos parece que la ausencia de representaciones podría dificultar la encapsulación, por el hecho de que el registro quedaría excesivamente *algebraico*.

Por lo demás, nuestra experiencia en asignaturas de álgebra abstracta nos muestra que los alumnos espontáneamente realizan dibujos de las situaciones bajo estudio.

Por otra parte, la utilidad de un dibujo generado por el profesor y la eventualidad de que ello sea más bien perjudicial para la comprensión del estudiante es un asunto sobre el cual hay evidencias, y, obviamente, en este ámbito no basta con la buena intención.

En cualquier caso, nuestra experiencia nos indica que los dibujos no son un recurso desdeñable, y que conviene volver sobre esta cuestión.

Enfoque alternativo

Tal como hemos venido anunciando, presentamos aquí una aproximación matemática diferente que hemos elaborado para el teorema del isomorfismo para grupos.

Por una parte, tal enfoque surge de nuestra reflexión acerca del teorema, y se asienta en los elementos matemáticos que hemos incluido en los capítulos anteriores –relaciones de equivalencia (y de orden), (álgebra universal), teoría de categorías–; por otra, él se prolonga en otros aspectos de la teoría, esto es, en otros resultados, relacionados con nuestro teorema, que hemos tratado de análoga manera.

En este capítulo nos ocupamos solo del aspecto matemático que anunciamos. La relevancia del enfoque, sin embargo, para nuestro tema central, se podrá realmente apreciar cuando lo utilicemos para proponer una descomposición genética del teorema del isomorfismo de grupos, en el capítulo siguiente.

De acuerdo a la modalidad que hemos elegido desde el comienzo, no nos limitaremos a nuestro Teorema del Ismomorfismo, sino que demostraremos una serie de otros teoremas que no están en la literatura, pero que muestran de manera fechaciente que proceder como lo estamos haciendo tiene consecuencias de largo alcance.

El problema

Describimos aquí el problema matemático que nos ocupa en el contexto de la problemática que queremos atender.

Teorema del isomorfismo

Recordamos brevemente nuestro escenario:

El teorema es

Theorem *Sean G, G' grupos, y sea f un morfismo de núcleo $\mathcal{N}(f) = N$ e imagen* $\mathrm{Im}(f)$. *Entonces, f induce un isomorfismo $\bar{f}$ desde el grupo cociente G/N al grupo* $\mathrm{Im}(f)$.

Hay versiones análogas de este teorema para el caso de anillos, módulos, etc. El quid de la demostración está, en cada caso, en la (buena) definición del isomorfismo $\bar{f}$.

Nuestra propia experiencia enseñando esta materia y la de colegas que la han tenido a su cargo nos dan alguna evidencia inicial de lo siguiente: probar que la función $\bar{f}$ está bien definida es, para el alumno, más difícil de abordar que demostrar que ella es un morfismo e incluso que probar que ella es una biyección; aún más, es frecuente que el estudiante no advierta siquiera la *necesidad* de probar que la función que se define naturalmente está *bien definida.*

La enseñanza habitual del teorema

La presentación habitual del teorema del isomorfismo para grupos consiste en introducir primero las coclases, luego definir el grupo cociente, y es en el ambiente de la teoría de grupos en que los estudiantes se enfrentan por primera vez, formalmente, a la definición y utilización de una función definida desde un cociente.

Tal aproximación sigue de cerca la manera formal en la que se aborda comúnmente el asunto en los textos de Álgebra Abstracta, esto es, en el desarrollo corriente de la teoría, que llena los requisitos desde un punto de vista lógico (o, mejor dicho, axiomático).

Nosotros nos hemos propuesto, sin embargo, descomponer la presentación del teorema del isomorfismo en dos etapas, para trabajar inicialmente en una versión puramente conjuntística y solo en segundo término tratarlo como teorema de grupos.

De esta manera, esperamos (según las evidencias recogidas), el caso para grupos será más sencillo de abordar –de modo análogo al hecho ya mostrado de que, comprendido este

último, los correspondientes para anillos y módulos, por ejemplo, son también más fáciles de tratar (en el sentido de que, una vez conocido el teorema para grupos, la función está definida y es un morfismo de grupos, y lo que resta es solo comprobar que ella 'respeta' el resto de la estructura, cosa que, según explicitamos antes, el alumno hace de forma más bien expedita)–.

Al hacer este recorrido, nos apoyaremos en el hecho de que, de manera informal, toda persona hace uso frecuente de cocientes, y ello con la mayor naturalidad.

Según nuestra revisión bibliográfica, esta manera de abordar el teorema no se ha intentado antes, y nos parece además, que, desde un punto de vista histórico-epistemológico, responde mejor a la significación del álgebra abstracta en el concierto actual de los estudios de matemática. Esto último queda de manifiesto no solo por los antecedentes históricos que hemos dado antes, sino también por la amplitud que posee la generalización de los teoremas de morfismo que realizaremos más adelante.

Teoremas de morfismo para conjuntos: aspecto matemático

Notation *En esta sección y salvo aviso en contrario, C, C' son conjuntos y $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en C.*

Definition *Un morfismo de C en C' es, simplemente, una función*

$$f : C \to C'$$

En particular, $\pi = \pi_{\mathcal{R}}$ es el epimorfismo canónico de C en $G/\mathcal{R}$, cuyas clases anotamos $\bar{a}_{\mathcal{R}}$ o simplemente $\bar{a}$.

Remark *Dado un morfismo $f : C \to C'$, la relación $\mathcal{R}_f$ definida en C por $a\mathcal{R}_f b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$, es una relacion de equivalencia en C.*

El teorema del isomorfismo para conjuntos

Theorem *(Teorema fundamental del isomorfismo). Sean C, C' conjuntos (no vacíos), y sea $f : C \to C'$ un morfismo. Entonces, se tiene que $C/\mathcal{R}_f$ es isomorfo a* $\mathrm{Im}(f)$.

Proof Definimos $\overline{f} : C/\mathcal{R}_f \to C'$ por $\overline{f}(\overline{a}) = f(a)$. Por la definición de $\mathcal{R}_f$, es inmediato que $\overline{f}$ es una función bien definida, y que es inyectiva.

El teorema fundamental para conjuntos

Theorem *(Teorema fundamental del morfismo, TFM). Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en C. Entonces, para cada conjunto C' y para cada morfismo $f : C \to C'$ tal que $\mathcal{R} \preceq \mathcal{R}_f$; hay un único morfismo $\overline{f} : C/\mathcal{R} \to C'$ tal que $f = \overline{f} \circ \pi$*

$$\begin{array}{ccc} C & \to^{f} & C' \\ \pi_{\mathcal{R}} \searrow & \circlearrowleft & \nearrow \overline{f} \\ & C/\mathcal{R}_f & \end{array}$$

Proof Definimos $\overline{f}(\bar{a}) = f(a)$. Se tiene:

1. $\overline{f}$ está bien definida:
   Si $\bar{a} = \bar{b}$, entonces $a\mathcal{R}b$, de donde, por hipótesis, $a\mathcal{R}_f b$, es decir, $f(a) = f(b)$, según la definición
2. $\overline{f}$ *hace conmutar el diagrama* o *factoriza f*. En efecto, sea $a \in A$. Se tiene

$\left(\overline{f} \circ \pi_{\mathcal{R}}\right)(a) = \overline{f}(\pi_{\mathcal{R}}(a)) = \overline{f}(\bar{a}) = f(a)$

3. $\overline{f}$ es única. En efecto, si hay g tal que $g = \overline{f} \circ \pi$, se tiene entonces, para $a \in A$,
$g(a) = \left(\overline{f} \circ \pi\right)(a) = \overline{f}(\pi(a)) = \overline{f}(\bar{a}) = f(a)$

Una presentación más formal nos permite pensar en los cocientes de manera independiente de la construcción que hemos realizado, y considerarlos *salvo (un único) isomorfismo*.

Definition *Dada una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en C, se llama cociente de C sobre $\mathcal{R}$ a todo par $(\widehat{C},p)$, donde:*

1. *C es un conjunto, p es un morfismo de C en $\widehat{C}$*
2. *$\mathcal{R}_{\pi_{\mathcal{R}}} \preceq \mathcal{R}_p$*
3. *Para cada grupo C' y para cada morfismo $f : C \to C'$ tal que $\mathcal{R} \preceq \mathcal{R}_f$, existe un único morfismo $\overline{f} : \widehat{C} \to C'$ tal que $f = \overline{f} \circ p$*

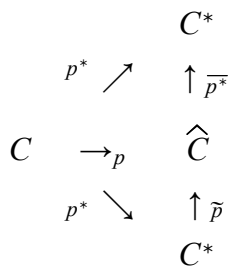
$$\begin{array}{ccccc} & & f & & \\ C & & \to & & C' \\ & p \searrow & \circlearrowleft & \nearrow \overline{f} & \\ & & \widehat{C} & & \end{array}$$

Proposition *Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en C. Entonces:*

1. *Existe un cociente $(\widehat{C},p)$ de C sobre $\mathcal{R}$*
2. *Si (C^*,p^*) es un cociente de C sobre $\mathcal{R}$, existe un único isomorfismo $q : \widehat{C} \to C^*$ tal que $p^* = q \circ p$*

Proof Se tiene:

1. Ya lo hemos terminado de probar: tomamos $\widehat{C} = C/\mathcal{R}, p = \pi_{\mathcal{R}}$
2. Supongamos que hay también un cociente (C^*,p^*). Entonces, $p^* : C \to C^*$ es un morfismo y, para cada morfismo $f : C \to C'$ tal que $\mathcal{R} \preceq \mathcal{R}_f$, existe un único morfismo $\widetilde{f} : C^* \to C'$ tal que $f = \widetilde{f} \circ p^*$. En particular, dado que $p : C \to \widehat{C}$ satisface la condición 2. de la definición de cociente, se tiene que hay un único $\widetilde{p} : C^* \to \widehat{C}$ tal que $p = \widetilde{p} \circ p^*$.
   Además, ya que $(\widehat{C},p)$ es un cociente, y dado que $p^* : C \to C^*$ (por ser un cociente) también satisface la condición 2, se tiene que hay un único $\overline{p^*} : \widehat{C} \to C^*$ tal que $\overline{p^*} \circ p = p^*$
   Entonces, dado que evidentemente $id_{C^*} \circ p^* = p^*$, debe tenerse que $\overline{p^*} \circ \widetilde{p} = id_{C^*}$ (ver diagrama a continuación).
   Similarmente, $\widetilde{p} \circ \overline{p^*} = id_{\widehat{C}}$
   de modo que $q = \overline{p^*} : \widehat{C} \to C^*$ es el isomorfismo pedido



Corollary *Si* $\left(\widehat{C},p\right)$ *es un cociente de C sobre* $\mathcal{R}$*, entonces p es un epimorfismo*

Teoremas de morfismo

Definition *En esta sección y salvo aviso en contrario,* C, C' *son conjuntos y* $\mathcal{R}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$*, son relaciones de equivalencia en C,* $\mathcal{R}'$ *es una relacion de equivalencia en* $C', \pi = \pi_{\mathcal{R}}$ *el epimorfismo canónico de C en* $C/\mathcal{R}$*,* $\pi' = \pi_{\mathcal{R}'}$ *el epimorfismo canónico de* C' *en* $C'/\mathcal{R}'$

Corollary *Sean* $\mathcal{R}$ *una relación de equivalencia en C,* $\pi : C \to C/\mathcal{R}$*,* $f : C \to C'$ *y* $\overline{f} : C/\mathcal{R} \to C'$*, de acuerdo al TFM. Entonces:*

1. *(Imagen)* $\mathrm{Im}\left(\overline{f}\right) = \mathrm{Im}(f)$*; si f es un epimorfismo, entonces* $\overline{f}$ *es un epimorfismo*
2. *('Núcleo'). Si* $\mathcal{R}$ *es equivalente a* $\mathcal{R}_f$*, entonces* $\overline{f}$ *es un monomorfismo*
3. *Si f es un epimorfismo y* $\mathcal{R}$ *es equivalente a* $\mathcal{R}_f$*, entonces* $\overline{f}$ *es un isomorfismo*
4. *En todo caso, (teorema fundamental de isomorfismo),* $C/\mathcal{R}_f \backsimeq \mathrm{Im} f$

Proof Se tiene, dado que f es constante en las clases $\overline{a_{\mathcal{R}}} = \overline{a} \in C/\mathcal{R}$

1. $\mathrm{Im}(f) = \{f(a) : a \in C\} = \left\{\overline{f}(\overline{a}) : a \in C\right\} = \mathrm{Im}\left(\overline{f}\right)$; sigue además que si f es epiyectiva, entonces $C' = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(\overline{f}\right)$, de modo que $\overline{f}$ es también epiyectiva
2. Se tiene que $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$
   entonces: supongamos que $\overline{f}(\overline{a}) = \overline{f}\left(\overline{b}\right)$
   luego, $f(a) = f(b)$, por tanto $a\mathcal{R}b$ y entonces $\overline{a} = \overline{b}$
3. Inmediata de 2. y 3.
4. Inmediata: basta tomar $\mathcal{R} : \mathcal{R}_f$

Hemos agregado el enunciado y la demostración 4. para indicar cómo nuestro Teorema del isomorfismo es una conclusion inmediata del teorema fundamental.

Corollary *Todo morfismo* $f : C \to C'$ *puede factorizarse* $f = \iota \circ \overline{f} \circ \pi$*, donde* π *es un epimorfismo,* $\overline{f}$ *es un isomorfismo y* ι *es un monomorfismo.*

Proof Sea $f : C \to C'$. Tomamos $\pi : C \to C/\mathcal{R}_f$; $\overline{f} : C/\mathcal{R}_f \to \mathrm{Im}(f)$ dada por el teorema fundamental, y consideramos luego $\iota : \mathrm{Im}(f) \hookrightarrow C'$ la inclusión natural de $\mathrm{Im}(f)$ en C'. Es evidente que $f = \iota \circ \overline{f} \circ \pi$, y ya se sabe que π es un epimorfismo y $\overline{f}$ es un isomorfismo; la inclusión ι es, como siempre, una inyección.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ C & \rightarrow & C' \\ \pi\downarrow & \circlearrowleft & \uparrow \iota \\ C/\mathcal{R}_f & \rightarrow & \mathrm{Im}(f) \\ & \overline{f} & \end{array}$$

Corollary *(Primer teorema del isomorfismo)*

Sean $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ relaciones de equivalencia definidas sobre $C, \mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_2$; sean $\pi_i : C \rightarrow . C/\mathcal{R}_i, (i = 1, 2)$. Entonces, $\mathcal{R}_1$ define una relación de equivalencia $\widehat{\mathcal{R}}$ en $C/\mathcal{R}_2$ y se tiene $(C/\mathcal{R}_2)/\widehat{\mathcal{R}} \simeq C/\mathcal{R}_1$

Proof Como $\mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_2$, según el TFM hay una aplicación $\overline{\pi_1} : C/\mathcal{R}_2 \rightarrow . C/\mathcal{R}_1$ tal que $\pi_2 \circ \overline{\pi_1} = \pi_1$. Basta entonces hacer $\widehat{\mathcal{R}} : \mathcal{R}_{\overline{\pi_1}}$, es decir, para $a, b \in C$, $a\mathcal{R}_{\overline{\pi_1}}b \Leftrightarrow \overline{\pi_1}(a) = \overline{\pi_1}(b)$

1. $\overline{\pi_1}$ es epiyectiva.
   Sea $\alpha \in C/\mathcal{R}_1$. Luego, hay $a \in C$ tal que $\pi_1(a) = \alpha$;
   tomamos $\overline{a_{\mathcal{R}_2}} \in C/\mathcal{R}_2$ y se tiene:
   $\overline{\pi_1}(\overline{a_{\mathcal{R}_2}}) = \overline{\pi_1}(\pi_2(a)) = (\overline{\pi_1} \circ \pi_2)(a) = \pi_1(a) = \alpha$
2. $\overline{\pi_1}$ es inyectiva.
   Suponemos $\overline{\pi_1}(\overline{a_{\mathcal{R}_2}}) = \overline{\pi_1}(\overline{b_{\mathcal{R}_2}})$; entonces se tiene sucesivamente
   $(\overline{\pi_1} \circ \pi_2)(a) = (\overline{\pi_1} \circ \pi_2)(b)$
   $\pi_1(a) = \pi_1(b)$
   $\overline{a_{\mathcal{R}_1}} = \overline{b_{\mathcal{R}_1}}$
   $(\overline{a_{\mathcal{R}_2}}) = \overline{b_{\mathcal{R}_2}}$

Corollary *(Pasaje al cociente).*

Sean $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ sendas relaciones de equivalencia en $C, C', \pi = \pi_{\mathcal{R}}, \pi' = \pi_{\mathcal{R}'}$ respectivamente, y sea $f : C \rightarrow C'$ un morfismo tal que si $a\mathcal{R}b$, entonces $f(a)\mathcal{R}'f(b)$, Entonces, hay un único morfismo $\overline{f} : C/\mathcal{R} \rightarrow C'/\mathcal{R}'$ tal que $\pi' \circ f = \overline{f} \circ \pi$

Proof Consideramos $\widetilde{\pi} = \pi' \circ f : C \rightarrow C'/\mathcal{R}'$
Se tiene: sucesivamente
$a\mathcal{R}b \Rightarrow f(a)\mathcal{R}'f(b) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \pi'(f(a)) = \pi'(f(b)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\pi' \circ f)(a) = (\pi' \circ f)(b) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \widetilde{\pi}(a) = \widetilde{\pi}(b)$
de manera que podemos definir bien $\overline{f}(\overline{a_{\mathcal{R}}}) = \overline{f(a)_{\mathcal{R}'}}$
Ahora bien,
$\left(\overline{f} \circ \pi\right)(a) = \overline{f}(\pi(a)) = \overline{f}(\overline{a_{\mathcal{R}}}) = \overline{f(a)_{\mathcal{R}'}} = \pi'(f(a)) = (\pi' \circ f)(a)$
La unicidad es clara por el TFM.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ C & \rightarrow & C' \\ \pi\downarrow & \circlearrowleft & \uparrow\pi' \\ C/\mathcal{R} & \rightarrow & C'/\mathcal{R}' \\ & \overline{f} & \end{array}$$

Remark *Consideremos el siguiente teorema de isomorfismo de grupos:*

Sean G un grupo, $H \leq G, N \trianglelefteq G$, entonces $\frac{HN}{N} \simeq \frac{H}{H\cap N}$

Se observa que, en realidad, el teorema dice que, si se cumplen las hipótesis, se tiene que $\frac{\sup\{H,N\}}{N} \simeq \frac{H}{\inf\{H,N\}}$

El análogo para conjuntos sería necesariamente:

Sean C un conjunto y sean $A, B \subseteq C$; entonces (con alguna hipótesis adicional, digamos, sobre B), se tiene $\frac{\sup\{A,B\}}{B} \simeq \frac{A}{\inf\{A,B\}}$, es decir, $\frac{A\cup B}{B} \simeq \frac{A}{A\cap B}$. Es evidente que, en general, esta propiedad es falsa (una razón consiste en que las relaciones de equivalencia arbitrarias sobre un conjunto no tienen, naturalmente, propiedades específicas que se cumplen en el caso de las relaciones de equivalencia asociadas a subgrupos de un grupo dado –cardinal invariante de las clases, por ejemplo–).

Ahora bien, en general, si $X \subseteq Y$, la relación de equivalencia natural que induce X sobre Y está dada por la partición $\{X, Y \setminus X\}$. Siguiendo esta dirección, el teorema indicaría solamente que hay una biyección entre $\{B, (A \cup B) \setminus B\}$ y $\{A, A \setminus (A \cap B)\}$, lo que no tiene mayor interés.

Una alternativa es tomar la unión disjunta de A y B, pero ello tampoco da un resultado satisfactorio.

(Éste es el único resultado de teoremas de morfismo para grupos –de la lista provista en el Capítulo 3– que no podemos generalizar de forma natural e interesante al caso de conjuntos).

Proposition *(Teorema de la correspondencia) Sean $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en $C, \pi = \pi_{\mathcal{R}}$. Entonces,*

1. *hay una correspondencia biunívoca entre las (clases de) relaciones de equivalencia definidas en $C/\mathcal{R}$ y las (clases de) relaciones de equivalencia definidas en C que son menos finas que $\mathcal{R}$,*
2. *esta correspondencia es compatible con la relación $\preceq$ de finura relativa*
   (esto es, se trata de un 'morfismo de orden' entre los correspondientes conjuntos ordenados)

Proof Sean $C, \mathcal{R}, \pi = \pi_{\mathcal{R}}$ como en el enunciado.

1. Procedemos en dos sentidos
   - **a**. Sea $\mathfrak{S}$ una relación de equivalencia en $C/\mathcal{R}$. Definimos en C
     $a\widehat{\mathfrak{S}}b$ si y solo si $\pi_{\mathcal{R}}(a)\mathfrak{S}\pi_{\mathcal{R}}(b)$
     Es claro que $\widehat{\mathfrak{S}}$ está bien definida y es una relación de quivalencia.

Ahora bien, si $a\mathcal{R}b$, entonces $a_{\mathcal{R}} = b_{\mathcal{R}}$

luego, $\pi_{\mathcal{R}}(a) = \pi_{\mathcal{R}}(b)$; entoces $\pi_{\mathcal{R}}(a)\mathfrak{S}\pi_{\mathcal{R}}(b)$; de donde $a\widehat{\mathfrak{S}}b$

b. Si $\mathcal{S}$ es una relación de equivalencia en C, $\mathcal{S}$ menos fina que $\mathcal{R}$, definimos en $C/\mathcal{R}$

$a_{\mathcal{R}}\overline{\mathcal{S}}b_{\mathcal{R}} : a\mathcal{S}b$

Se tiene, por supuesto, de la hipótesis, $a\mathcal{R}b \Rightarrow a\mathcal{S}b$, de modo que $\overline{\mathcal{S}}$ está bien definida.

c. Ahora bien, sea $\mathfrak{S}$ una relación de equivalencia definida en $C/\mathcal{R}$ y sea $\widehat{\mathfrak{S}}$ la relación definida por $\mathfrak{S}$ en C, como arriba, de modo que $\mathcal{R} \preceq \widehat{\mathfrak{S}}$; es decir, se tiene $a\widehat{\mathfrak{S}}b$ si y solo si $\pi_{\mathcal{R}}(a)\mathfrak{S}\pi_{\mathcal{R}}(b)$

Ahora bien, la relación que define $\widehat{\mathfrak{S}}$ en $C/\mathcal{R}$ es

$\overline{a_{\mathcal{R}}}\overline{\widehat{\mathfrak{S}}}\overline{b_{\mathcal{R}}}$ si y solo si $a\mathcal{S}b$,

de manera que

$\overline{a_{\mathcal{R}}}\overline{\widehat{\mathfrak{S}}}\overline{b_{\mathcal{R}}} \Leftrightarrow a\mathcal{S}b \Leftrightarrow \pi_{\mathcal{R}}(a)\mathfrak{S}\pi_{\mathcal{R}}(b) \Leftrightarrow a_{\mathcal{R}}\overline{\widehat{\mathfrak{S}}}b_{\mathcal{R}}$

2. Es claro:

a. Supongamos que $\mathcal{S},\mathcal{T}$ son relaciones de equivalencia en C, de modo que $\mathcal{S} \preceq \mathcal{T}$, y sean $\overline{\mathcal{S}},\overline{\mathcal{T}}$ las relaciones de equivalencia que $\mathcal{S},\mathcal{T}$ definen en $C/\mathcal{R}$.

Se tiene entonces $a\mathcal{S}b \Rightarrow a\mathcal{T}b$, y por tanto

$\overline{a_{\mathcal{R}}}\overline{\mathcal{S}}\overline{b_{\mathcal{R}}} \Leftrightarrow a\mathcal{S}b \Rightarrow a\mathcal{T}b \Leftrightarrow \overline{a_{\mathcal{R}}}\overline{\mathcal{T}}\overline{b_{\mathcal{R}}}$, de modo que $\overline{\mathcal{S}} \preceq \overline{\mathcal{T}}$

b. Inversamente y de modo enteramente análogo, se tiene que si $\mathfrak{S},\mathfrak{T}$ son relaciones de equivalencia en $C/\mathcal{R}$ y $\mathfrak{S} \preceq \mathfrak{T}$, y $\widehat{\mathfrak{S}},\widehat{\mathfrak{T}}$ son las relaciones de equivalencia que $\mathfrak{S},\mathfrak{T}$ definen en C, respectivamente, entonces $\widehat{\mathfrak{S}} \preceq \widehat{\mathfrak{T}}$

Descomposición genética

En este capítulo, presentamos una descomposición genética para el teorema del isomorfismo de grupos; de acuerdo al enfoque alternativo que proponemos, veremos primero la construcción del teorema del isomorfismo para conjuntos.

Para ello, deberemos hacer propuestas adicionales acerca de algunos conceptos necesarios para la construcción mental del teorema.

Comenzaremos por algunos comentarios y recapitulaciones, indispensables como explicación de la descomposición que proponemos, así como por breves y escuetas reseñas de las evidencias que hemos encontrado, las cuales se traducen más adelante y con mayor propiedad en el fundamento de esa descomposición.

La segunda sección está destinada al estudio de las construcciones mentales asociadas a las relaciones de equivalencia y a las particiones, en las cuales juega un rol determinante el teorema RE/P. Este teorema será un recurso reiterado en nuestra descripción, en lo que se refiere a que una relación de equivalencia determina una partición y de que una partición define una relación de equivalencia: las restantes afirmaciones del teorema, para ser examinadas con precisión, requieren del conocimiento de nuestro teorema de isomorfismo para conjuntos.

Por razones que explicitaremos en su momento, hemos separado el teorema RE/P (en su versión restringida) en una sección aparte.

Continuamos el capítulo con una descomposición genética del teorema del isomorfismo para conjuntos.

En la quinta sección y de acuerdo a nuestro enfoque, concluimos con (el aspecto algebraico de) la descomposición genética del teorema del isomorfismo para grupos.

Preliminares

Una descomposición genética

Nuestro objetivo es diseñar una descomposición genética factible, que apoye la reflexión sobre el aprendizaje del teorema del isomorfismo para grupos y que especifique un modelo cognitivo en el cual se puedan sustentar propuestas de enseñanza.

Diferentes alternativas

Según advertimos antes, puede haber descomposiciones genéticas diferentes para un mismo concepto. Precisamente, la que aquí presentaremos difiere necesariamente de otras que se puedan proponer, dada la escisión que la nuestra comporta en ciertos aspectos matemáticos del teorema mismo; en particular, no trabaja con las clases de equivalencia de la manera en que lo hacen la enseñanza habitual del álgebra abstracta y el propio RUMEC.

En cualquier caso, no conocemos descomposiciones genéticas alternativas del teorema; en particular, RUMEC no da propiamente una descomposición genética explícita del teorema del isomorfismo para grupos, sino más bien elementos para elaborar una, en su estudio de grupos, subgrupos, coclases... –y respecto de los cuales hemos manifestado algunas diferencias en 6.5.3 y 6.5.4–.

El ciclo de investigación

Fundamentos de la propuesta

Nuestra propuesta está construida con base en los fundamentos que hemos ido acumulando en los capítulos anteriores y que repasamos muy brevemente a continuación.

Tales fundamentos estarán siempre presentes, si bien con frecuencia en forma implícita, en las afirmaciones que haremos acerca de las construcciones mentales. Ocasionalmente haremos menciones expresas a ellos, con el detalle necesario para clarificar la discusión –agregando, eventualmente, experiencias relevantes–.

La epistemología

Compartimos el dictamen de Dubinsky (2001) de la relación cercana entre la naturaleza de los conceptos matemáticos y su desarrollo en la mente de un individuo, y el de Trigueros (2005) de la conveniencia de comenzar una descomposición genética desde la reflexión matemática acerca de los conceptos. Hemos elaborado sobre esos juicios y considerado antecedentes de carácter propiamente matemático y epistemológico –tanto en su acepción histórica como genética–.

Aspecto didáctico

Otros antecedentes son de naturaleza didáctica.

Para ello, hemos hecho una revisión de la literatura de enseñanza del álgebra abstracta desde sus inicios, y luego de programas de estudio y utilización de textos específicos en nuestro país.

Además, usamos como referente nuestras observaciones en el aula.

Entrevistas

Hemos utilizado además entrevistas a personas de diversa formación. Parte de esas entrevistas fueron registradas por escrito y/o en video.

La mayoría de esas personas son alumnos de carreras de pedagogía y de licenciatura en Matemáticas en una institución universitaria, la mayor parte de los cuales cursa o ha cursado asignaturas semestrales en las que se imparten materias de álgebra abstracta que incluyen el teorema de isomorfismo para grupos.

De acuerdo a nuestra propuesta, sin embargo, no todos los individuos observados estudian o estudiarán ese teorema. En efecto: hemos incluido alumnos que comienzan su carrera de pedagogía, por ejemplo, para observar sus reacciones ante la presentación de algún concepto o ante alguna reflexión que se les propuso y que comportaba un desarrollo

eventual, todo ello en relación con nuestro teorema; hemos propuesto, además, los temas de relaciones de equivalencia contemplados en nuestra propuesta a media docena de cursos terminales sucesivos de una carrera de Arquitectura.

Hemos entrevistado de manera informal a profesores de varias universidades chilenas, quienes imparten asignaturas que comportan álgebra abstracta, y también a otros de áreas alejadas de esa rama, eventualmente, para observar su (re)construcción del teorema en estudio.

Compleción del ciclo

Las evidencias

Durante la descripción de la descomposición genética que proponemos, incluiremos evidencias que hemos encontrado en su favor. En cualquier caso, tales evidencias no están aún suficientemente completas y sistematizadas, de modo que este trabajo se presenta en su dimensión teórica.

Un ciclo más amplio

Una versión más acabada forma parte de un proyecto de mayor alcance que incluye un análisis detallado del caso del teorema fundamental del morfismo para grupos, que enunciaremos al final del capítulo.

Otros aspectos relevantes

Requisitos

Nos preguntamos qué elementos previos debe poseer un estudiante para poder abordar de manera exitosa el teorema del isomorfismo para grupos, y, a la vez, qué construcciones y mecanismos mentales están asociados a la comprensión del teorema.

En nuestra aproximación se requiere, por supuesto, tratar los grupos, el teorema del isomorfismo para conjuntos y el teorema del isomorfismo para grupos. Ahora bien, podría pensarse en ya sea comenzar por los grupos, seguir con el teorema para conjuntos y luego hacer el teorema para grupos, o bien tratar directamente el teorema para conjuntos, más adelante introducir los grupos y luego ver el teorema del isomorfismo para grupos.

Ahora bien, en los cursos de estructuras algebraicas a nuestro cargo, hemos seguido el segundo orden señalado, que coincide con el programa habitual de la asignatura. Por otra parte, hemos tratado directamente el teorema del isomorfismo para conjuntos con alumnos que no han estudiado ni estudian estructuras algebraicas. Sería interesante comparar ambas estrategias (ambos órdenes), cosa que pensamos realizar (particularmente porque da la oportunidad de introducir en núcleo de un morfismo de una manera que nos parece muy natural, más cercana a la acostumbrada).

Esquemas necesarios

Para nuestra descomposición genética, en particular, es evidente que el estudiante debe disponer de una concepción esquema de grupo –necesita hacer acciones sobre él, como objeto–. Ahora bien, la construcción de ese esquema supone esquemas previos de conjunto y de operación binaria. (Ya hemos reseñado a RUMEC al respecto, en 6.4 y 6.5; Cf., además, para un caso similar, Trigueros y Oktaç, 2005). A su vez, el esquema de operación binaria necesita del de función.

Aun cuando reiteraremos ocasionalmente algunos de ellos cuando lo estimemos conveniente (por ejemplo, para precisar), listamos a continuación los esquemas que requerimos:

- satisfacer una propiedad, axioma;
- implicación;
- cuantificadores universal y existencial;
- igualdad, unión e intersección de conjuntos
- función, operación binaria;
- grupo y subgrupo.

Laxar los requisitos

Por supuesto, ocasionalmente, no se requiere la concepción esquema de alguno de los conceptos señalados en la lista anterior, sino la concepción proceso, pongamos por caso; por este motivo, en la descripción de las construcciones mentales que haremos más adelante, seguiremos a veces el camino acción-proceso-objeto.

El esquema es preferible

De todas maneras, preferiremos, en general, referirnos al esquema, desenvolverlo y luego desencapsular el objeto correspondiente para obtener el proceso subyacente.

Ello se debe a dos razones.

Una consiste en que, a pesar de que ocasionalmente, como decíamos, baste con una concepción proceso de un objeto matemático *X*, digamos, para construir otro *Y*, el hecho es que en otras oportunidades se requerirá necesariamente de una concepción objeto de *X*.

La otra es que, según nuestra observación, podría ser el caso que algún alumno construya trabajosamente una concepción objeto de un determinado objeto matemático, pero que el esquema correspondiente casi no pueda tematizarse por la debilidad de su construcción. Tal sucede, por ejemplo, cuando un alumno procura encapsular el concepto de grupo cociente y no tiene una concepción adecuada de partición.

(En cualquier caso, vale la pena tener presente que la desencapsulación es necesaria en situaciones en las cuales se requiere del concepto a la vez como objeto y como proceso –composición de funciones, e. g.–; cuando solo se precisa del proceso, aunque se posea una concepción objeto, se puede simplemente hacer uso del proceso –sin desencapsular–).

Alternativas para el objeto

De acuerdo a lo expresado en 5.2.2, la construcción de una concepción objeto de una noción puede darse de dos maneras: una es el camino acción-proceso-objeto; la otra es la tematización de un esquema.

Ahora bien, es posible que un estudiante que disponga formalmente de todos los elementos para poseer un esquema dado, no lo haya aun construido (lo tenga en construcción, pongamos por caso). Así, cuando corresponda, junto con referirnos a la tematización de un esquema, aludiremos también, ocasionalmente, a las acciones, la interiorización en un proceso y la encapsulación de ese proceso en un objeto.

Notaciones y convención

Para facilidad de la lectura, fijamos alguna notación y convenimos en restringir el teorema RE/P a su primera parte.

Notation *En lo que sigue, A es un conjunto,* $\mathcal{R}$ *es una relación de equivalencia definida en A,* $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i \in I}$ *es una partición de A;* $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ *es la partición definida por* $\mathcal{R}$ *y* $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ *es la partición asociada a* $\mathcal{P}$*, ambas según el teorema RE/P;*$\pi = \pi_{\mathcal{R}} : A \to A/\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ *es la proyección canónica.*

Remark (**Convención**) *En lo que sigue, llamamos teorema RE/P al teorema 51, partes a., b. y c. (sección 2.3.3 de este escrito).*

La razón de esto último es doble: en primer lugar, no necesitaremos analizar las partes d. y e. del teorema para nuestro trabajo, y, en segundo término, esas partes se expresan y entienden de mejor manera vía el uso de nuestro teorema del isomorfismo para conjuntos (!).

La aproximación

Según hemos venido anunciando, utilizaremos una aproximación distinta de la habitual, que consiste en separar el teorema del isomorfismo para grupos en dos teoremas: uno que corresponde a la teoría de conjuntos, y el otro propiamente a la teoría de grupos.

Aspecto matemático

Esta aproximación es, desde un punto de vista puramente matemático, más apropiada, pues pone de relieve que un aspecto del teorema del isomorfismo para grupos trata de un asunto puramente conjuntístico.

Aspecto cognitivo

Ahora bien, desde una perspectiva cognitiva, la separación es aun más relevante, pues la dificultad que enfrentan los estudiantes con el teorema del isomorfimo radica principalmente –según nuestra experiencia y la de otros profesores de álgebra abstracta– en la buena definición de la función desde el cociente, y, por comparación, la parte relativa a las operaciones es relativamente sencilla.

La buena definición

En la manera tradicional de tratar el teorema, el estudiante debe tomar un morfismo de grupos f de fuente un grupo G, definir una función $\overline{f}$ desde el cociente $G/\mathcal{N}(f)$ y demostrar de inmediato que ella es un morfismo de grupos. Según nuestra observación, el alumno se preocupa principalmente del aspecto 'algebraico' de preservar las operaciones involucradas, pero difícilmente repara en la necesidad de cuidar de que la función $\overline{f}$ esté bien definida.

Por el contrario, cuando utilizamos nuestra aproximación, dado que el aspecto estructural se posterga a una segunda parte del teorema, el estudiante debe enfocarse necesariamente en la buena definición, cosa que es, matemáticamente hablando, más inmediata, y, cognitivamente, más identificable y familiar que en la aproximación tradicional.

Más determinante aún: según las evidencias que hemos recogido, los estudiantes que siguen el camino que proponemos hacen un tránsito sin mayores obstáculos perceptibles desde el caso conjuntístico al de grupos, lo que a su vez les permite manejar en forma más expedita los ejemplos que deben enfrentar y también los restantes teoremas de isomorfismo (y tienden a obviar los gruesos errores conceptuales que se suelen observar en esta materia).

Relaciones de equivalencia y particiones

Aspectos formales e informales

La construcción de los esquemas

Formalidad e ingenuidad

Es claro que las construcciones que nos interesan son las de objetos matemáticos que pertenecen a teorías matemáticas bien delimitadas.

Sin embargo, desde la introducción del concepto de relación de equivalencia (al menos), el estudiante considera permanentemente dos tipos de relaciones: algunas son informales (*ser hermano de*, etc.), y otras son propiamente matemáticas (igualdad de números, de conjuntos; paralelismo de rectas).

Ahora bien, las nociones de relación de equivalencia y de partición son, matemáticamente hablando, muy básicas y no hay una gran cantidad de tipos de acciones formales que se puedan realizar sobre ellas.

Construcción del esquema

Naturalmente, la construcción tanto del esquema de relación de equivalencia como del de partición se ven favorecidas por la recurrencia a situaciones informales elementales, no solo para el caso de la concepción-proceso –en la cual no se trata de hacer demostraciones, sino de comprobaciones mentales–, sino también en la propia concepción-esquema, por cuanto poner en relación esas situaciones informales con la noción de relación de equivalencia es bastante natural (por ejemplo, al tratar de aplicar ese esquema en diversos contextos). Al respecto, la situación de la construcción del esquema de partición es enteramente análoga.

En la vida diaria

Como veremos en el capítulo siguiente, para esos dos conceptos, por oposición a la

escasez de tipos de acciones posibles, las posibilidades de *asimilación* de los correspondientes esquemas son, en la práctica, ilimitadas.

Por ejemplo, hemos podido comprobar, tras reiteradas observaciones, que los alumnos de distintas cohortes de Pedagogía pueden descubrir y explicar relaciones de equivalencia y particiones que aparecen en la vida diaria, en distintas actividades, profesiones o disciplinas, incluyendo los conceptos de mayor o menor finitud.

Por su parte, generaciones sucesivas de estudiantes de Arquitectura explican cómo aparecen relaciones de equivalencia en su trabajo o proyecto de taller, incluyendo también los conceptos de mayor o menor finitud, y cuál es la utilidad que tal conceptuación les presta.

La demostración

Intuir y demostrar

Nos parece necesario tener presente que, a pesar de que los conceptos de relación de equivalencia y de partición sean cercanos a la intuición del estudiante (en los sentidos de ’identificar’ de alguna manera, y de ’clasificar’), su escritura simbólica no lo es.

La capacidad de usar apropiadamente la terminología matemática tiene relación, como se sabe, con la compleción de la encapsulación de los objetos correspondientes.

Para el caso de las particiones, lo anterior representa una dificultad adicional a otras que hay que considerar: ocurre a veces que un estudiante tenga claridad respecto de las razones que fundamentan que una determinada colección de subconjuntos de A constituye una partición de A y, sin embargo, no pueda escribir la demostración en términos formales. Que el escollo es más bien extrínseco queda sugerido por el hecho de que tal demostración puede cambiar considerablemente en orden de dificultad dependiendo de la versión de partición que se esté utilizando (es decir, si acaso se debe hacer la unión de una familia de subconjuntos (2.3.1, definición 45) o bien la unión de un conjunto (2.3.1, definición 43). Al respecto, es conveniente considerar como buenos argumentos matemáticamente correctos expresados en lengua natural, pues ello corresponde a los usos habituales en la disciplina: al fin y al cabo, el rigor de la Matemática no descansa en que *esté* (completamente) formalizada, sino en que *puede ser* formalizada. (Cf. Merklen, 1972).

Visualizar y demostrar

Según nuestra experiencia, es frecuente que el estudiante visualice mejor las particiones que la relaciones de equivalencia, pero que, al mismo tiempo, encuentre más sencillo demostrar que una relación definida en A es de equivalencia que probar que una colección de subconjuntos de A es una partición de A. El teorema RE/P le autoriza, según vimos, a tomar el camino menos empinado, según el caso en cuestión.

Relevancia del teorema RE/P

Formalidad e ingenuidad

Cabe reiterar una vez más que el estudiante puede comenzar con la práctica de pasar de una relación de equivalencia a la partición correspondiente y viceversa *antes* de conocer el teorema RE/P. Ello se manifiesta permanentemente en sus análisis y respuestas: tal como hemos señalado, si se le pregunta por ejemplos de relaciones de equivalencia, pongamos por caso, suele señalar objetos que comparten una característica que se expresa en términos de pertenecer a una misma región de un conjunto, etc.

Lo anterior se repite con mucha frecuencia en las diversas situaciones que debemos analizar.

Uso del teorema

Tal uso ingenuo del teorema RE/P es, según nuestras observaciones, inconsciente.

En una experiencia con estudiantes de primer año, propusimos un juego en que un grupo de ellos se particiona (físicamente) de acuerdo a una relación de equivalencia que él determina reservadamente; otro grupo observa la partición y debe adivinar la relación. Los

alumnos no conocían el teorema RE/P, de hecho, no tenían una noción matemática precisa de ninguno los conceptos involucrados. (Los alumnos trabajaron a ratos en grupos de tres y otras en conjunto. Se les preguntó primero por "*cosas* que utilizamos día a día y que, siendo distintas unas de otras, las tomamos como *iguales*"; ellos dieron una variedad de ejemplos. Se les dio luego el caso de los microbuses, y se les preguntó bajo qué condiciones podían considerarse iguales. Ellos se interesaron en el problema, discutieron, trabajaron con agrado y a distintas velocidades).

Los estudiantes mencionaron espontáneamente la propiedad de simetría; se acercaron a las propiedades de una partición y al concepto de 'más fina que'; les faltó, por cierto, lenguaje para expresar lo que observaban ("no puede estar en dos pedazos"; "es lo mismo, pero no es igual").

Luego se planteó la situación de juego propiamente tal, que los alumnos reiteraron y disfrutaron.

Solo después se dieron las definiciones formales de relación de equivalencia y de partición, y ellos pudieron darse cuenta de que el tránsito entre uno y otro conceptos es natural y aun necesario y de que, de hecho, lo habían empleado en las situaciones planteadas por ellos.

Además y como cabría esperar, la biyección que aquellas correspondencias definen no aparece expresada con mucha frecuencia, y, si lo hace, no se la define, como corresponde, entre un cociente de las relaciones de equivalencia y las particiones sobre A, según señalamos antes. (Es muy interesante constatar de que el error que se comete ocurre precisamente por la falta de claridad en trabajar con cocientes y, en particular, por desconocer la versión conjuntística de nuestro teorema del isomorfismo).

Semántica, teoría, tautología

Como decíamos, al ser requerido a dar un ejemplo de relación de equivalencia, el estudiante suele dar uno de partición ('los que habitan en un mismo barrio') e, inversamente, al pedírsele una partición, el estudiante puede responder con una relación de equivalencia ('la que se tiene por el paralelismo de rectas'). En otras palabras, el teorema RE/P funciona de manera que llamaremos *tautológica*: el estudiante transita de uno a otro conceptos, y no considera que con ello agrega sentido al escenario ni a la cuestión.

Nos parece que el término es doblemente feliz: por una parte, la raíz *tauto* significa lo mismo; la más familiar *logos* está relacionada con *legein*, *decir*, de manera que *tautologos* es repetir lo que se dijo; por otra, desde un punto de vista cognitivo, vale la pena observar que, por lo general, el estudiante no es consciente de que acepta ciertas afirmaciones como verdaderas, sin siquiera reparar en ellas.

En cualquier caso, la situación se puede expresar también en la terminología de Raymond Duval: respecto del teorema RE/P, el *valor epistémico semántico* preexiste al *valor epistémico teórico* y se superpone a él; una consecuencia de esto es que el estudiante puede tender a no creer que necesita la demostración del teorema, pues le parece más bien obvio. (Esto es, una vez que entiende su enunciado. Cf. Duval, 1995, Cap. 5).

(Anti)Janus

Estimamos que, desde un punto de vista cognitivo, el teorema RE/P de algún modo presenta a las relaciones de equivalencia y a las particiones que ellas determinan como si fueran dos caras de un mismo objeto, dos facetas que, según las observaciones que hemos hecho y reiterado antes, terminan por superponerse en la mente, y que representamos en la figura siguiente:

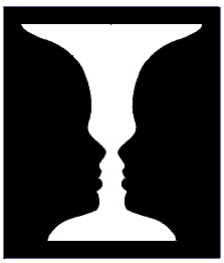


Figura 5. (Impropia

Figuras que se superponen

La imagen anterior es externa, impropia e imprecisa.

Es impropia por su condición de sola analogía y sugerencia de un fenómeno más definido, y es imprecisa por cuanto oculta el hecho de que no es el caso que las relaciones de equivalencia definidas en *A* estén en correspondencia biunívoca con las particiones, sino que lo están las clases de equivalencia de relaciones de equivalencia definidas sobre *A* (*módulo* equivalencia lógica).

Un fenómeno relevante

Como sea, esta idea de superposición no es inusual en Matemáticas.

Ejemplos de ello son, en su medida, las funciones lineales y las matrices correspondientes –fijada una base–; el teorema (relevante en nuestro estudio histórico) de Cayley que identifica un grupo cualquiera con un grupo de permutaciones y, más en general, las representaciones de grupos; la identificación de un espacio vectorial con el dual de su dual, etc. En cada uno de esos casos, mientras se desarrolla la teoría e incluso para abordar problemas, es frecuente que se pueda escoger una entre dos vías alternativas.

Es este un fenómeno de cierta profundidad para la Matemática, de consecuencias importantes en cada ocurrencia.

En cualquier caso, la superposición de la que hablamos tiene mayor hondura que las de algunos de los ejemplos que hemos mencionado: por una parte y dependiendo del caso, para algunas finalidades, no se puede hacer ese reemplazo de una vía por otra; en segundo término, en casos como el de las funciones lineales y matrices, un cambio en la elección de la base genera una alternativa adicional.

Por el contrario, cuando se trata del teorema RE/P, no hay elección que hacer, y las alternativas son decididamente *naturales* y no están sujetas a restricciones de tipo alguno.

Acerca de la descomposición genética

Encapsulación simultánea

Como es natural, una acción sobre una relación de equivalencia definida en un conjunto *A* es (por ejemplo) encontrar la partición en *A* que aquella induce, e inversamente.

Lo anterior y los trabajos de los estudiantes nos han llevado a concluir que los esquemas de relación de equivalencia y de partición se construyen de manera sincrónica e imbricada.

Ahora bien, según la relación que hemos hecho en capítulos anteriores, tal sincronía no es, realmente, un fenómeno extraño: históricamente, los conceptos de grupo y de grupo cociente cristalizaron en forma simultánea, y lo propio ocurre con la encapsulación de las nociones de grupo y de subgrupo.

Direccionalidad doble

Nuestro caso, sin embargo, según nuestra observación, tiene una complejidad adicional, que lo hace diferente de los otros:

Por una parte, para hacer el tránsito de relaciones de equivalencia a particiones e inversamente, los estudiantes se apoyan en una noción ingenua del teorema RE/P; por otra, ya el enunciado de este teorema requiere de disponer de concepciones objeto de relaciones

de equivalencia y de partición.

Por cierto, se puede realizar la acción de encontrar la partición asociada a una relación de equivalencia sin tener una versión formal del teorema RE/P (e inversamente), pero no parece posible afirmar sin más que sean esas acciones y construcciones como ellas (o acciones 'inversas' a ellas) las que sugieran el enunciado del teorema.

En otras palabras, nos parece que, al menos en su dimensión ingenua, los tres conceptos –relación de equivalencia, partición y teorema RE/P– se generan en el aprendiz de manera sincrónica.

Dos versiones

Hemos comenzado nuestra descomposición genética de relaciones de equivalencia y de particiones describiendo acciones, procesos, objetos y esquemas. La sección 8.2.3, a continuación, reporta esa primera aproximación.

Sin embargo, la estrecha relación entre los tres conceptos, que hemos señalado, nos ha llevado a agregar una descomposición genética del propio teorema RE/P como complemento a la anterior. Se la encontrará en la sección 8.2.4.

Se notará que no hay oposición entre ambas aproximaciones, pues una acentúa la versión ingenua del teorema y la otra su versión formal.

Las construcciones mentales

Lo que sigue es una primera aproximación a las construcciones mentales relacionadas con los conceptos de relación de equivalencia y de partición. No se cuenta con antecedentes sobre este tema.

Equivalencia: acciones y procesos

El estudiante puede hacer las acciones de comprobar si, para una relación matemática específica dada $\mathcal{R}$ en un conjunto A, se cumplen la reflexividad, la simetría y la transitividad; para ello, debe utilizar los esquemas de cumplir una propiedad (de axioma), de implicación y de cuantificador universal. (Si la relación dada es informal, las acciones correspondientes no son demostraciones, sino reflexiones guiadas por el instructor: ¿Te parece que la relación *hermano-de* es reflexiva?).

Luego, el estudiante interioriza en concepción-proceso, al conseguir reconocer que una relación matemática cualquiera dada es o no de equivalencia, sin realizar los cálculos. En particular, puede considerar el cumplimiento de las propiedades para todos los elementos de un conjunto. (Para el caso de relaciones informales, no es necesario hacer cálculos y las comprobaciones se realizan mentalmente; la diferencia respecto de las acciones está solo en la independencia del sujeto para abordar la respuesta).

Partición: acciones y procesos

Para el caso de las particiones, de manera similar al de las relaciones de equivalencia, las acciones se realizan sobre casos particulares: dado un conjunto determinado A, el estudiante puede hacer las acciones de comprobar que una familia específica $\mathcal{P}$ de subconjuntos de A cumple las propiedades de una partición. Para ello, debe utilizar los esquemas de satisfacer una propiedad, de implicación, de cuantificadores universal y existencial, de unión, intersección e igualdad de conjuntos.

El estudiante puede además realizar la acción de hacer una partición cuando A es finito y pequeño. (Si A es finito y 'grande', no podrá hacer todas las acciones necesarias, y, si A es infinito, es imposible realizar acciones). Para esto, necesita solo de los esquemas de igualdad y de unión e intersección de conjuntos; para comprobar, requiere además de los esquemas de satisfacer una propiedad, de implicación, de cuantificadores universal y existencial.

Para la concepción proceso el estudiante puede pensar en todos los elementos de un conjunto o una familia. Puede interiorizar entonces las acciones y así ser capaz de reconocer y, eventualmente, realizar particiones sobre conjuntos finitos "grandes" (de

números naturales, de personas de un país, e. g.) e infinitos (de los números reales en intervalos, e. g.).

Objetos

El funcionamiento que hemos calificado de tautológico del teorema RE/P sugiere, como decíamos, que las nociones de relación de equivalencia y de partición se encapsulan de manera simultánea, (e imbricada), y que el 'proceso' de encapsulación de una ayuda al de la otra.

Muestras de encapsulaciones sincrónicas de ambos conceptos se tienen al considerar que construir una relación de equivalencia a partir de una partición es hacer acciones sobre esta última, e inversamente, construir una partición desde una relación de equivalencia dada es hacer acciones sobre la relación.

Comprobaciones adicionales son: que, una vez encapsulados el objeto relación de equivalencia y el objeto partición, el estudiante pueda determinar si una relación de equivalencia es más fina que *otra* y si una partición es más fina que *otra* partición, y, además, que, a partir de relaciones de equivalencias y particiones dadas, pueda construir otras que sean, respectivamente, más, o bien menos, finas que aquellas.

La encapsulación simultánea e imbricada que señalamos plantea al menos un par de problemas interesantes, vale decir: cómo es que una encapsulación no terminada se puede considerar como teniendo objetos que ayudan a la construcción de otros objetos, y, además, cómo están relacionados los respectivos procesos.

Nuestra opinión, basada en la evidencia observada, es diversa para cada uno de esos problemas:

En primer lugar, las nociones de relación de equivalencia y de partición son tan naturales que –según explicitaremos largamente en el capítulo 9– aun individuos que carecen de nociones de matemáticas superiores disponen de una idea ingenua de equivalencia y una de partición (las que se perciben –por ejemplo–, por una parte, en las diversas acepciones en la vida diaria del término "igual", y, por otra, en la profusión de situaciones en que se requiere de algún tipo de "clasificación"), y dado, por otra parte, que, en general, se transita de un concepto al otro sin mayor consciencia de que se trata de conceptos diferentes, la construcción de los correspondientes objetos matemáticos se apoya indistintamente en aquellos objetos ingenuos.

En cuanto a los procesos, nos parece que la cuestión es más profunda y requiere de mayores evidencias: las ideas ingenuas de relación de equivalencia y de partición se obtienen a edad temprana (la noción de "igual" y la de "clasificar" de algún modo, reiteramos) y sin mayor consciencia de las propiedades que deben cumplirse (de hecho, la reflexividad no aparece de inmediato, para el usuario, como propiedad de una relación de equivalencia); así, el estudio de los procesos y sus relaciones parece, en este caso, menos accesible

Esquemas

Presencia implícita del teorema RE/P

Las construcciones de los esquemas de relación de equivalencia y de partición tienen una característica enteramente similar a la recién descrita: el *proceso* de hacer coherente el objeto relación de equivalencia con una situación determinada suele pasar por el de hacer coherente la partición correspondiente, y viceversa. (Por ejemplo, al pedírsele cómo puede utilizar relaciones de equivalencia en su vida diaria, un estudiante responderá con una serie de particiones, unas más finas que otras –que los lápices negros *son todos iguales* y que *se guardan en el mismo lugar* en la librería, y luego describir que suponen particiones más finas al separarlos según la marca o el tipo –número tanto, e. g. –; inversamente, al ser requerido a explicar cómo utiliza particiones en la vida diaria, puede responder, por ejemplo, citando que los hermanos y otros tipos de parientes suponen particiones de

diferentes finuras –sin propiamente visualizar o reparar expresamente en las correspondientes particiones–).

Se notará en esto nuevamente la presencia implícita, no solo del enunciado del teorema RE/P, sino también de su demostración.

Construcción de los esquemas

Ahora bien, para la construcción del esquema de relación de equivalencia se necesita de los esquemas de conjunto (igualdad, intersección); axioma (satisfacer ciertas propiedades); implicación; cuantificaciones universal y existencial. Por su parte, el esquema de partición necesita de los anteriores y de la unión de conjuntos.

El esquema de relación de equivalencia incluye la coordinación del proceso de reconocimiento de satisfacción de, a la vez, las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad de la relación en un conjunto dado. Similarmente, el esquema de partición tiene que ver con la coordinación del proceso de satisfacción de las dos propiedades que la definen.

Tratándose, como dijimos antes, de nociones muy básicas, la coherencia de sus respectivos esquemas no dice necesariamente relación con la resolución directa de un problema, sino eventualmente con la comprensión de una situación o con el establecimiento del escenario (*mise en scène*) para abordarlo: un esquema suficientemente elaborado permite determinar la finura apropiada de la relación de equivalencia o de la partición ante una situación, y, desde allí, proceder a su resolución. (Por ejemplo, en un problema de cálculo de fuerzas, podría necesitarse de una u otra definiciones de igualdad de vectores).

La coherencia de los esquemas de partición y de relación de equivalencia está presente, naturalmente, en la clasificación de objetos en cualquiera de sus expresiones. En esto, vale la pena recordar que la relación *ser más fina que* determina un orden filtrante (no total) en el conjunto cociente de relaciones de equivalencia definidas sobre un conjunto *A módulo* equivalencia lógica. (Cf. 2.3.2, proposición 48).

Niveles operacionales de los esquemas

Debido a que es posible afirmar que los esquemas de relación de equivalencia y de partición se construyen de manera simultánea e imbricada, y haciendo uso del teorema RE/P, nos ha parecido apropiado hacer la descripción de los niveles operacionales a partir de ese teorema.

El teorema RE/P

Es natural pensar que el teorema RE/P se construye por la coordinación de los esquemas de relación de equivalencia y de partición: la desencapsulación de los correspondientes objetos permitiría tener acceso a los respectivos procesos, etcétera. El esquema del teorema RE/P debe articular los dos conceptos anteriores vía los esquemas de satisfacción de una propiedad y de función, y, naturalmente, de los de relación de equivalencia y de partición.

Sin embargo, según dijimos, ambos objetos, relación de equivalencia y partición, se encapsulan con ayuda del otro, vía el propio teorema RE/P: para el estudiante, ellos parecen ser dos caras de un mismo objeto.

Más aún, el funcionamiento *tautológico* del teorema lleva a que la tematización eventual de los esquemas de relación de equivalencia y de partición se articula por el RE/P: al enfrentar situaciones matemáticas o informales que requieran de relaciones de equivalencia, el estudiante recurre espontáneamente a particiones; a su vez, el trabajo con particiones tiene siempre asociada la idea de que no se distingue entre los objetos que pertenecen a un mismo elemento de la partición. (Hay que diferenciar, como dijimos, entre el teorema formal RE/P y el uso que el estudiante le da ingenuamente, sin reparar en él).

Explicitamos a continuación lo dicho hasta aquí en términos de las construcciones mentales.

Las construcciones mentales

Se podría pensar que la construcción del teorema comience por acciones como las siguientes: fijado un conjunto determinado A (pequeño) y una relación de equivalencia explícita $\mathcal{R}$ definida sobre A, el estudiante asocia la partición $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ que $\mathcal{R}$ induce en A de manera natural; e, inversamente, dada una partición expresa $\mathcal{P}$ en A, él le asocia la relación de equivalencia $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ definida por *estar en la misma clase* de la partición.

Sin embargo y de acuerdo al tenor de las evidencias que hemos reseñado, el estudiante ocupa ya el teorema y, más que avanzar *ab initio* desde ejercicios como los precedentes, requiere considerar aquello que utiliza sin reparar en ello.

Particularmente en casos informales, la tendencia natural que hemos advertido en los estudiantes es a trabajar directamente según concepciones proceso.

Por ejemplo, en casos en que un grupo de alumnos en un aula se particiona según equivalencias que sus miembros conocen y un grupo testigo ignora y debe 'adivinar', ocurren dos fenómenos, inversos entre sí: quienes se particionan enuncian de común acuerdo una relación de equivalencia ('tener el mismo color de pelo', 'tener una misma estatura', 'usar una misma prenda de vestir en el torso', etc.) y se particionan según ella y sin mediar 'un cálculo'; por su parte, quienes tratan de 'adivinar' observan, naturalmente, la partición, pero enuncian sin más la relación de equivalencia. Ninguno de los estudiantes observados realiza acciones.

El teorema RE/P se construye mediante la encapsulación del pasaje entre relaciones de equivalencia y particiones, de la manera en que venimos describiendo.

En un nivel informal, los estudiantes, una vez enunciado y demostrado, lo reconocen con facilidad en distintas situaciones, y, por sobre la demostración del hecho, parece imponérseles una concepción puramente semántica.

Una evidencia de que se posee una concepción objeto del teorema RE/P se obtiene cuando un estudiante procura develar en forma explícita, en el ámbito propiamente matemático, una relación de equivalencia asociada a una partición, o inversamente.

Esquema

Dirección del morfismo

Cuando se trata de un teorema que establece que hay una correspondencia biunívoca, suele ocurrir que una de las funciones sea más natural o inmediata, y que su inversa aparezca en segundo término. En el teorema del isomorfismo para conjuntos, por ejemplo, en la manera en que habitualmente se construyen las particiones, nos parece que la aplicación desde $G/\mathcal{R}_f$ hacia $\mathrm{Im}(f)$ es más inmediata que su inversa –y hay ejemplos más manifiestos de esta situación–.

En el caso del teorema RE/P, el rápido tránsito entre los conceptos de relación de equivalencia y partición y viceversa, que se viene haciendo en el estudiante desde *antes* del enunciado del teorema, parecería indicar que no hay una dirección privilegiada o más inmediata para la biyección. Ello no obstante, la biyección del teorema RE/P (en su versión completa) no es entre relaciones de equivalencia y particiones, sino, en realidad, entre clases de relaciones de equivalencia y particiones, de manera que la situación es análoga a la del teorema del isomorfismo para conjuntos, y hay, por tanto, una dirección más natural que la otra.

Nivel intraoperacional

De acuerdo a lo señalado en 4.7.5 (párrafo 'Los niveles operacionales'), por el hecho de que, en el teorema RE/P no se trata simplemente de considerar una correspondencia explícita entre dos conjuntos de elementos, sino de, partiendo de un objeto en el primero, fabricar uno correspondiente en el segundo y, con ello, definir la función, el nivel intraoperacional del esquema posee ya cierta complejidad: por la naturaleza misma del

teorema, los objetos no pueden estar todos desconectados. Podría entonces pensarse que el nivel intra del teorema RE/P corresponde a un nivel trans de los conceptos de relación de equivalencia y de partición; sin embargo y como venimos diciendo, la evidencia nos sugiere que los esquemas de relación de equivalencia y de partición se forman en conjunto con ese teorema. De tal manera, nos parece que, en este caso y dada las características señaladas, el nivel trans del teorema posee desde ya cierta complejidad..

En cualquier caso, la construcción del esquema del teorema RE/P se inicia con la constatación de que se tiene un conjunto A y una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ definida sobre A. Utilizando sus esquemas de relación de equivalencia y de partición, el estudiante debería construir una partición en A asociada a $\mathcal{R}$, y darse cuenta de que diferentes relaciones de equivalencia definen la misma partición en A. Debe coordinar todo ello en la afirmación de que esa construcción es reversible (*sensu lato* y según lo indicado antes) y de que se puede hacer en general.

Ahora bien y como sabemos, si el teorema no se relaciona con otros conceptos, se está en la etapa trans del teorema.

Nivel interoperacional

La etapa interoperacional se caracteriza por las relaciones (adicionales) que se establecen entre las componentes del esquema: la colección de clases de relaciones de equivalencia definidas sobre A y el conjunto de particiones en A, vía la función que el teorema establece: $\mathcal{R} \mapsto \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ y $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{R}_{\mathcal{P}}$.

Por otra parte, si, por ejemplo, se tiene un conjunto A y relaciones de equivalencia $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ definidas sobre $A = A$ y de modo que $\mathcal{R} \preceq \mathcal{R}'$, y el estudiante puede advertir que la partición $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ es más fina que $\mathcal{P}_{\mathcal{R}'}$ (o inversamente –desde las particiones a las relaciones de equivalencia–), entonces el esquema del teorema se relaciona con el concepto de "ser más fino que", y ello es, por tanto, una señal clara de que se tiene un nivel interoperacional.

(De manera similar, si el alumno puede tomar una relación de equivalencia definida en un grupo G por un subgrupo normal N de G y dotar a la partición G/N de una estructura de grupo, claramente estamos en presencia de un nivel interoperacional del teorema RE/P –sin embargo y aun cuando esto último es abordado con mayor frecuencia en la enseñanza, parece, según nuestras observaciones, más remoto que el ejemplo anterior–).

Nivel transoperacional

Esta etapa se caracteriza por la coherencia, que pone en evidencia las relaciones internas del teorema, de las cuales el estudiante se hace consciente y que le permiten saber si, dada una situación determinada, el esquema le permite abordarla. La coherencia, por tanto, queda de manifiesto cuando el estudiante puede poner en juego el teorema en situaciones no familiares y en la solución de problemas.

(Según lo explicitado antes, la coherencia del teorema, en su versión tautológica e ingenua, comienza *antes* de que sea enunciado; por ese motivo, podría pensarse que la definición de una relación de equivalencia informal asociada a una partición informal determinada, e inversamente, manifestara alguna traza de nivel transoperacional; sin embargo, es necesario remitirse a que el esquema es una construcción de un teorema formal, explícito –construcción a la cual ayuda, por cierto, la disponibilidad de ilustraciones informales).

Una ocasión formal es, según veremos, la de su uso precisamente en los teoremas del isomorfismo.

El estudiante puede utilizar el teorema también en sus estudios de cualquiera disciplina, y, en realidad, en toda situación en que dos objetos que no son idénticos sean considerados como equivalentes. (Un caso elemental es el de un alumno que considera diversas relaciones de equivalencia definidas de manera taxonómica –unas más finas que otras– en

un conjunto de seres vivos, o bien la evolución de la economía desde el trueque hasta las tarjetas de crédito. En el capítulo final, nos ocupamos de una profusión de otras situaciones en las que puede ocupar este teorema –y en las cuales, de hecho, lo hace–).

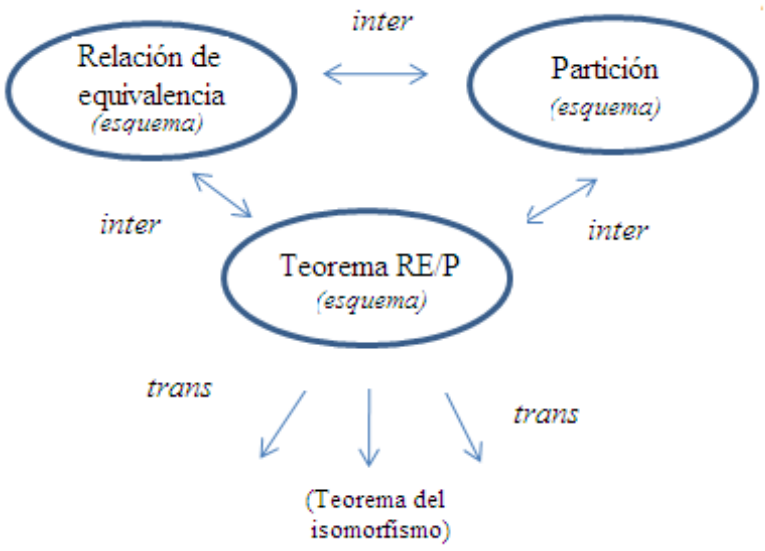


Figura 6. Teorema RE/P

Teorema del isomorfismo para conjuntos

Indagación preliminar

(Reunimos aquí sucintamente observaciones que realizamos en distintos ámbitos).

Hemos propuesto el (problema del) teorema del isomorfismo para conjuntos a personas con distinta formación matemática.

Los alumnos más novatos, que no han tenido oportunidad de estudiar grupos (sic), prefieren tratar situaciones concretas en la que se manifieste el teorema en lugar de su enunciado general. Así, por ejemplo, para analizarlo, se enfocan en objetos con los cuales tienen alguna familiaridad, tales como espacios vectoriales o números reales.

Para casos finitos pequeños y, algunos, para los casos familiares, se dan cuenta de que una función $f : A \to A'$ define una relación de equivalencia $\mathcal{R} : \mathcal{R}_f$ sobre A y de que pueden definir bien una función desde el cociente $A/\mathcal{R}$

Un dibujo para el caso finito suele a la vez iluminar y velar un tanto la situación: si bien él muestra bien la biyección, el hecho de que en un mismo dibujo figuren A y $A/\mathcal{R}$ dificulta escribirla con propiedad.

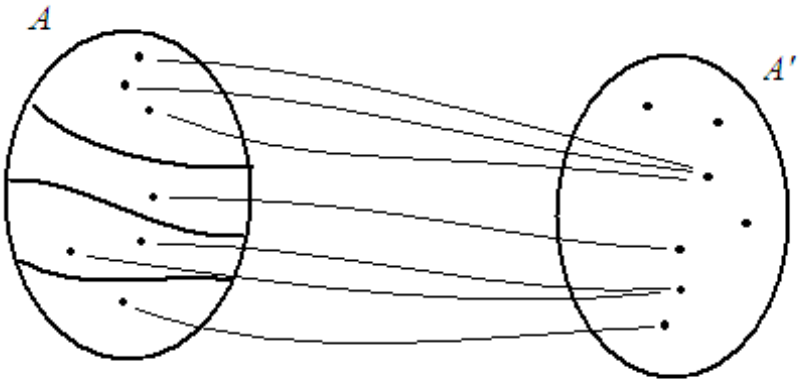


Figura 7. Función.

Una experiencia particularmente interesante fue la de un docente que no se especializa en el área y el cual, al planteársele el problema, pudo reconstruir cuidadosamente el teorema para el caso de los grupos topológicos, pensando a partir de la topología cociente, y a partir de allí el teorema general. En particular, pudo reemplazar la condición sobre el núcleo de un homomorfismo por aquella más general acerca de la partición que la función f determina sobre A.

Escenario

Debido a que los conjuntos carecen de estructura, un morfismo en la teoría de conjuntos es, natural y simplemente, una función.

Suponemos dados conjuntos $A, B,$ una relación de equivalencia cualquiera $\mathcal{R}$ definida en A, y un morfismo $f : A \to B$.

Asumimos que el estudiante posee concepciones esquema de partición, de función y de biyección, y, en particular, que dispone de una concepción objeto del cociente $A/\mathcal{R}$ construido sobre A a partir de una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ definida en A, es decir, la concepción objeto de la partición $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ que $\mathcal{R}$ induce en A.

La relación de equivalencia $\mathcal{R}_f$

Dada una función cualquiera $f : A \to B$, el estudiante debe primero comprobar que f define una relación de equivalencia en A por: $a\mathcal{R}_f b$ ssi $f(a) = f(b)$.

Hay dos maneras de abordar esa construcción; las separamos en lo que sigue.

Vía tematización

Una modalidad consiste en tematizar el esquema de relación de equivalencia para el caso de la definición de $\mathcal{R}_f$: al objeto

Se notará que esta definición tiene alguna semejanza con la de la relación de equivalencia $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ asociada a una partición $\mathcal{P}$. Así, si bien la noción de relación de equivalencia asociada a una función f puede ser novedosa para el alumno, en razón de ese parecido, creemos, no muestra mayor problema en hacer aquella comprobación –en general, cada vez que enfrenta una relación de equivalencia definida por una igualdad, trabaja en forma expedita–.

La tematización del esquema de relación de equivalencia para el caso de $\mathcal{R}_f$ se puede apoyar en situaciones ya conocidas: se desencapsula el objeto relación de equivalencia y se trabaja con el proceso correspondiente; coordinando mediante el cuantificador universal, se genera un nuevo proceso para este caso específico, el cual, a su vez, se encapsula como $\mathcal{R}_f$.

Encapsulación

Si f está dada por una fórmula, la concepción acción del hecho de que $\mathcal{R}_f$ es una relación de equivalencia es (dependiendo un tanto, aunque no de manera determinante, de

la complejidad de la fórmula) sencilla. En el caso general, y dado que se trata, como dijimos, de una relación de equivalencia definida por una igualdad, el alumno procede de manera semejante a la que hemos descrito para el caso de la relación de equivalencia $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ asociada a una partición $\mathcal{P}$.

Se observa que la construcción de la concepción proceso de $\mathcal{R}_f$ es expedita, lo que parece deberse al hecho de que es una relación de equivalencia definida vía la relación de igualdad, y que se asemeja, por tanto, a una cantidad de otras relaciones de equivalencia que el estudiante ha encontrado por sí mismo de manera natural (y que ha expresado mediante la condición de, por ejemplo "tener una misma característica" –pendiente, forma, magnitud, lugar de habitación, asignatura que se cursa, color de pelo...–).

Para encapsular el proceso en un objeto, el alumno requiere aún de la noción genérica de satisfacer una propiedad, y de coordinar las concepciones proceso de la reflexividad, la simetría y la transitividad mediante el cuantificador universal.

La partición de A según $\mathcal{R}_f$

Dado que nos adentramos ahora en los cocientes, vamos a expresar aquí aspectos que en las secciones anteriores estaban implícitos. Luego, vemos alternativas de construcción del objeto.

Nota preliminar

Como es habitual, trabajar inicialmente en un caso concreto presenta menor dificultad.

Por otra parte, si A y B son finitos y pequeños, un dibujo como el de la Figura 7 es una ayuda no desdeñable: el alumno puede observar primero directamente que la función f induce una partición $\mathcal{P}$ en A, al reunir los elementos que llegan a una misma imagen, y expresar luego la relación de equivalencia $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$, que no es otra que $\mathcal{R}_f$.

Observación

Desde un punto de vista matemático, visualizar $\mathcal{P}$ parecería más sencillo que definir $\mathcal{R}_f$ ab initio, pero, en nuestra experiencia con estudiantes, demostrar que $\mathcal{R}_f$ es una relación de equivalencia es más fácil que probar que $\mathcal{P}$ es una partición. Ello explicaría que, en general, el estudiante prefiera: encontrar $\mathcal{P}$ –asociada a f–; utilizar a continuación la sugerencia del teorema RE/P para definir $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$, es decir, $\mathcal{R}_f$; probar luego que $\mathcal{R}_f$ es una relación de equivalencia, y entonces, notar (o asumir, de acuerdo al funcionamiento tautológico del teorema RE/P) que $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_f}$ es la colección $\mathcal{P}$ inicial, de modo que es efectivamente una partición.

Establecida $\mathcal{R}_f$ como relación de equivalencia, el estudiante debe observar que ella define una partición $A/\mathcal{R}_f$ en A, la cual reúne los elementos de A que tienen una misma imagen según f.

Alternativa y, en principio, más naturalmente, puede observar primero que la función f induce una partición $\mathcal{P}$ en A, al reunir los elementos que llegan a una misma imagen y expresar luego la relación de equivalencia $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$, que no es otra que $\mathcal{R}_f$.

Encapsulación

Una concepción acción de $A/\mathcal{R}_f$ se manifiesta por la escritura expresa y según instrucciones precisas del conjunto de las clases correspondientes para el caso de un conjunto y una función específicos.

La concepción proceso requiere de considerar funciones y conjuntos variables, y se reconoce en una descripción oral o escrita aproximadas del cociente.

La observación muestra que la encapsulación de las clases en el conjunto $A/\mathcal{R}_f$ no es inmediata. Para casos finitos pequeños y para algunas funciones determinadas (por ejemplo, rotaciones en el plano), el estudiante puede imaginar el conjunto de las clases, con dificultad variable (según sus propias expresiones y los obstáculos que enfrenta para explicitarlo); puede, además, dibujar sin mayor hesitación el caso finito pequeño. Sin embargo, suele ocurrir que le cueste plantear el caso de una función f cualquiera, y que

declare preferir continuar haciendo casos de funciones familiares.

Para realizar la encapsulación, no necesita de otros conceptos que los ya requeridos para construir los esquemas de relación de equivalencia y de partición; además, nuevamente el teorema RE/P coordina (o puede coordinar, si su noción funciona tautológicamente) el proceso.

En el caso (formal) finito pequeño, para una función f definida en A, el estudiante puede escribir los cocientes $A/\mathcal{R}_f$ por extensión –si bien, como de costumbre, alumnos de cursos elementales encuentran obstáculos al escribir conjuntos cuyos elementos son conjuntos, y las dificultades en la escritura manifiestan la falta de encapsulación del cociente–.

La encapsulación se obtiene cuantificando universalmente en $A, \mathcal{R}$ y f, y se reconoce cuando el alumno puede escribir correctamente $A/\mathcal{R}_f$ tanto por comprensión como por extensión (si cabe) para el caso de A y f cualesquiera, y puede (escribir correctamente y) explicar la situación general. En tal caso, puede, por ejemplo, definir una función de fuente $A/\mathcal{R}_f$ y, si conoce el concepto de "ser más fina que" entre particiones, obtener una partición en A que sea más fina o bien menos fina que $A/\mathcal{R}_f$.

La proyección canónica

La *proyección canónica* $\pi = \pi_{\mathcal{R}}$ es la epiyección que a cada elemento a de A le asocia su clase de equivalencia $\overline{a_{\mathcal{R}}} = \overline{a}$ en la partición $A/\mathcal{R}$.

Su estatus teórico ha sido debidamente explicitado con anterioridad: esa proyección es muy importante para establecer con claridad la naturaleza del cociente (es decir, su propiedad universal, según examinamos en 3.1.11, proposición 84, y luego en 3.3.3, definición 112 y ejemplo 114). En adición a lo anterior, la proyección es también de mucha relevancia para la comprensión del teorema del isomomorfismo que nos ocupa.

Para obtener una concepción objeto de la proyección canónica, el estudiante puede recurrir a su concepción objeto de función para el caso en que el conjunto de partida es A y el de llegada es el cociente $A/\mathcal{R}$ construido sobre A: puede desencapsular el objeto función, y generar un proceso para construir el concepto de proyección canónica $a \to a_{\mathcal{R}}$, y reunir todo mediante el cuantificador universal.

Que $\pi_{\mathcal{R}}$ sea epiyectiva es inmediato para el estudiante, quien acostumbra a tomar como preimagen de una clase el elemento que la nombra.

El teorema del isomorfismo

El teorema del isomorfismo afirma que, con las notaciones anteriores, hay una biyección $\overline{f}$ entre $A/\mathcal{R}_f$ e Im(f).

Recursos visuales

Para el caso en que los conjuntos involucrados son pequeños, muchos estudiantes espontáneamente recurren a un dibujo en el cual la situación se manifiesta en forma transparente. Alternativamente, se puede sugerir que se haga un dibujo, que invariablemente no solo aclara el enunciado del teorema sino que, además, se convierte en un recordatorio estable acerca de él. El tipo de dibujo aludido es, en nuestra experiencia, siempre una variación del que mostramos en la figura 7.

La función desde el cociente

El estudiante puede recurrir a su concepción objeto de función para este caso: tiene A, B y f y debe pensar ahora en una función cuyos elementos del dominio son subconjuntos (disjuntos) de A.

Para ello debe desencapsular las clases: el proceso de formación del objeto clase le da acceso a los elementos que la constituyen y puede pensar, sin reparar en cada uno de ellos, en una función que tiene la misma imagen para todos los que habitan la clase. Dada la definición de $\mathcal{R}_f$, tal comprobación es inmediata.

A continuación, debe encapsular el conjunto de las clases para hacer una

correspondencia biunívoca $\overline{f}$ entre los conjuntos $A/\mathcal{R}_f$ e Im(f).

La construcción del esquema: nivel intra

La construcción del esquema del teorema del isomorfismo para conjuntos comienza con la constatación de que se tiene: un par de conjuntos A, B; una función bien definida f; una relación de equivalencia $\mathcal{R} : \mathcal{R}_f$; el conjunto Im($f$); la partición $A/\mathcal{R}_f$ la proyección $\pi_{\mathcal{R}} = \pi$ de A en $A/\mathcal{R}_f$.

El estudiante muestra una concepción acción del teorema cuando, para el caso de A y f expresamente determinados, puede escribir la biyección en forma explícita.

La concepción proceso del teorema se manifiesta cuando él puede describir con precisión, en palabras y/o con ayuda de símbolos, lo que sucede para A, B y f cualesquiera.

La construcción del esquema del teorema del isomorfismo en el nivel intraoperaciona requiere de la coordinación de los procesos subyacentes a esa descripción mediante la afirmación y verificación de que hay una biyección $\overline{f}$ de $A/\mathcal{R}_f$ a Im(f), para lo cual precisa de cuantificar universalmente en A, B y f.

Lo anterior se manifiesta cuando el estudiante puede escribir con precisión y explicar también con precisión la biyección $\overline{f}$ para el caso de A, B y f arbitrarios. (La mayor dificultad, según nuestra observación, sigue siendo la naturaleza de los elementos de $A/\mathcal{R}_f$).

Esquema: nivel interoperacional

La etapa interoperacional se caracteriza por las relaciones que se establecen entre las componentes del esquema: la relación $\mathcal{R} : \mathcal{R}_f$ como definida por f; los conjuntos A, B conectados por f; Im(f) como subconjunto de B; A y $A/\mathcal{R}_f$ conectados por la proyección $\pi_{\mathcal{R}} = \pi$; $A/\mathcal{R}_f$ relacionado con Im(f) por el isomorfismo $\overline{f}$; la proyección $\pi_{\mathcal{R}} = \pi$ y f conectados por el isomorfismo $\overline{f}$; sobre todo, la puesta en escena que hace aparecer el isomorfismo $\overline{f}$ para factorizar f (o conmutar el diagrama). En este nivel el estudiante es consciente de que no se trata de una colección de enunciados que terminan en el del isomorfismo, y puede darse cuenta de que si alguna condición falla, la conclusión del teorema no se cumple –por ejemplo si Im(f) se reemplaza por otro subconjunto de G'; o si $\mathcal{R}$ no está definida por f (en cuyo caso $\overline{f}$ puede no estar bien definida), y similares–.

Nivel transoperacional del esquema

Esta etapa se caracteriza por la coherencia: el estudiante percibe los diferentes constituyentes del teorema organizados precisamente por el enunciado de este; si bien la complejidad del teorema no facilita su aprehensión en una sola mirada, se puede recorrer internamente su estructura e identificar diversas instancias del mismo bajo un solo nombre.

Tal coherencia se nota, como de costumbre, cuando puede poner en juego el teorema en situaciones no familiares y en la solución de problemas. Por ejemplo, ello puede darse al demostrar otros teoremas de morfismo para conjuntos; más adelante, podrá usarlo para construir el teorema del isomorfismo para grupos u otras estructuras. Un uso más directo es la identificación de que un determinado grupo cociente con otro grupo más conocido (digamos, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ con el grupo de los restos al dividir por 6, o, posteriormente, el plano complejo con el grupo $\mathbb{R}/\langle x^2 + 1\rangle$, etc.).

Comentario

Parece conveniente poner aquí en relieve tres aspectos en relación con nuestra aproximación al teorema del isomorfismo para grupos, según hacemos a continuación.

La función está bien definida

Como decíamos antes, es necesario observar que no se plantea aquí como algo extrínseco el problema (habitual en la presentación los diferentes teoremas de isomorfismos de grupos) de que $\overline{f}$ esté bien definida, pues la construcción misma zanja de manera explícita el asunto. Esto es muy relevante, pues la buena definición de las funciones definidas en cocientes de grupos que se necesitan para los diversos teoremas de

isomorfismos de grupos (según fueron detallados en 3.1.10 y 3.1.11) es algo que el estudiante suele omitir, a pesar de que ella sea la parte verdaderamente relevante en la demostración de cada uno de esos teoremas: por comparación, las otras partes son triviales, o rutinarias (se trata de comprobar algunos cálculos bastante directos). Tal omisión, por otra parte, es una señal evidente de que el alumno no puede trabajar con claridad con las clases de equivalencia –y, por lo tanto, con los cocientes–.

El teorema fundamental del morfismo

En segundo término, es también oportuno reparar en que la ventaja que provee esta aproximación al teorema, recién descrita, se da también en el ámbito más general que describimos brevemente a continuación.

Para el caso del teorema fundamental del morfismo (7.2.2, teorema 123) , cuyo enunciado, más abstracto que el del teorema del isomorfismo es más difícil de aprehender, puede observarse una circunstancia interesante:

El estudiante tendrá una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ sobre A, que define un cociente $A/\mathcal{R}$, y una función de fuente A, que define a su vez otro cociente $A/\mathcal{R}_f$. Al plantearse si acaso se puede definir una función de $A/\mathcal{R}$ a $A/\mathcal{R}_f$, la pregunta, natural en realidad, es cómo se comparan ambas particiones para que aquello resulte, y surge de inmediato la hipótesis de que al menos una de ellas debe ser más fina que la otra. Esto último será un paso importante, que alertará posteriormente a que una función definida desde el cociente debe estar *bien definida* (condición permanentemente ignorada por los estudiantes).

Un interés adicional de lo anterior reside en que este teorema fundamental del morfismo provee de manera inmediata de funciones (bien definidas) sobre los diversos cocientes acerca de los cuales se habla en los restantes teoremas de morfismo, en oposición al hecho de que, al no contar con él, habrá que preocuparse de encontrar cada vez un candidato a morfismo y luego demostrar que está bien definido y que es efectivamente un morfismo.

Representación gráfica

Finalmente, no parece fácil sobre-estimar la importancia del tipo de dibujo que se explicitó en la figura 7. En efecto, el esquema de cociente parece ser uno de los más difíciles de adquirir en un curso de álgebra abstracta y es frecuente encontrar personas que manifiestan con facilidad su falta de comprensión del asunto ($\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ es subgrupo de $\mathbb{Z}$, por ejemplo). Por el contrario, este tipo de imagen acompaña, según nuestra observación, al alumno en el aprendizaje ulterior de teoremas de isomorfismo.

Con ello no queremos decir que los restantes teoremas se puedan reducir a la situación sugerida por la imagen de la figura 7, sino más bien que el concepto de cociente adquiere mayor claridad, y que el alumno manifiesta mejor comprensión de los problemas que debe enfrentar en ese y en otros teoremas de morfismo.

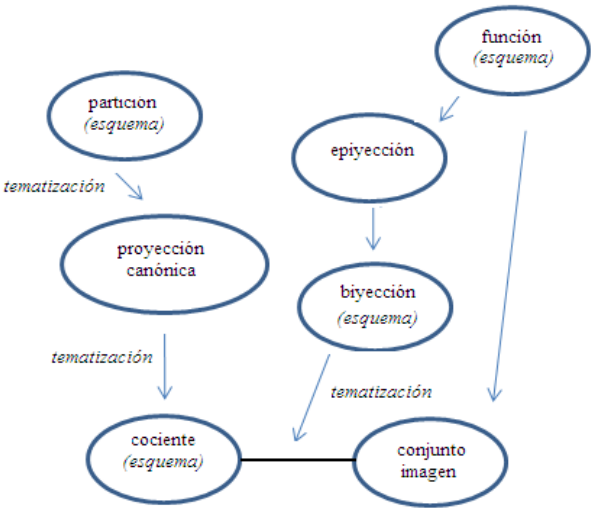


Figura 8. Teorema del isomorfismo de

Teorema del isomorfismo para grupos

Con todos los elementos descritos hasta aquí, iniciamos la construcción de la descomposición genética del teorema del isomorfismo para grupos.

Notation *En lo que sigue,* G, G' *son grupos de neutros* e, e'*, respectivamente;* $H \leq G$*,* $f : G \to G'$ *es un morfismo.*

Remark *Antes de comenzar, debemos hacer tres advertencias, de orden diverso pero todas importantes para la lectura:*

1. *Morfismo significa aquí morfismo de grupos.*
2. *Suponemos que el estudiante dispone de concepciones esquema de las nociones función, de grupo, de subgrupo y de subgrupo normal.*
3. *Dada la abundancia de objetos matemáticos, conceptos y resultados que debemos invocar,*
   - **a**. *utilizaremos simbología formal para referirnos a algunos de esos objetos, e*
   - **b**. *interrumpiremos breve y ocasionalmente la descripción de los procesos cognitivos para traer a colación desarrollos matemáticos necesarios para la claridad de aquella.*

Morfismos

Los morfismos son funciones

Dado un morfismo de grupos $f : G \to G'$, el estudiante puede considerarlo en primer lugar como una función particular, cuyos fuente y blanco son grupos, esto es, asimilar el concepto de grupo por el esquema de función. Así, podrá advertir que los morfismos son fundamentalmente funciones. De esta manera, puede desencapsular el objeto función y aplicarlo en este ambiente distinto al que ha conocido, y tanto la concepción proceso como la concepción objeto correspondientes estarán disponibles para su uso.

Acciones

Una acción es, por ejemplo, tomar una función f y un par de elementos $a_\circ, b_\circ,$ y luego calcular $f(a_\circ), f(b_\circ), f(a_\circ b_\circ)$ y luego examinar si acaso se tiene, para ellos, $f(a_\circ)f(b_\circ) = f(a_\circ b_\circ)$.

Procesos

Una concepción proceso del concepto de función conlleva una transformación dinámica de objetos, en la cual un objeto inicial dado se modifica (Breidenbach, Dubinsky, Hawks &

Nichols, 1992). De tal manera, al desencapsular el objeto función, el estudiante podrá determinar la imagen de los elementos de G bajo ella, y concebirla como un todo que toma objetos y les hace algunas transformaciones, originando otros objetos.

Desde allí puede recorrer dos caminos distintos para construir su concepción de morfismo. (Derroteros análogos han sido descritos antes en Roa & Oktaç, 2010, para el caso de aplicaciones lineales): el primero de ellos se caracteriza por la coordinación de procesos, y el segundo, por la interiorización de una acción.

En cualquiera de ellos se podrá apreciar la importancia de los conceptos de función y de grupo en la construcción del nuevo concepto. Esto es, por supuesto, natural, pero, además, muy relevante, pues muestra que el concepto de morfismo de grupos se construye con base en elementos que el estudiante ya ha construido, lo que a su vez le hace posible establecer relaciones específicas con esos elementos anteriores, a partir del reconocimiento de que un morfismo es primordialmente una función que tiene ciertas características especiales.

Describimos esos caminos a continuación.

Procesos: coordinación

Esta primera vía se caracteriza por la coordinación de procesos.

El esquema de grupo permite al estudiante tener acceso, vía la desencapsulación del objeto grupo, a su operación binaria, la cual a su vez puede desencapsular en el proceso correspondiente. Ahora bien, esto significa que él puede pensar en una operación binaria genérica como un proceso con dos objetos de entrada, en el cual se realiza algo sobre esos objetos y se obtiene un nuevo objeto de salida (Brown, DeVries, Dubinsky & Thomas, 1997).

Ahora bien y como decíamos, al desencapsular el objeto función, puede además trabajar con el proceso correspondiente de fuente G y blanco G'.

Al coordinar este proceso y el de operación binaria mediante el cuantificador universal, puede generar un nuevo proceso, por el cual puede determinar si la función f preserva la operación del grupo.

Una comprobación de lo anterior se tiene cuando el estudiante manifiesta que considera: que f puede aplicarse a todo elemento de G; que si $a, b \in G$ entonces ab es un elemento de G y por lo tanto se puede calcular $f(ab)$ (ab como un solo elemento); que similarmente $f(a)f(b)$ es un elemento de G' y que, finalmente, $f(ab)$ y $f(a)f(b)$ son iguales. Si él puede considerar que esto último se cumple para cada par de elementos a, b de G, podemos, entonces, decir que tiene una concepción proceso de la preservación de la operación por f.

Procesos: interiorización

El segundo camino se caracteriza por la interiorización de una acción.

Una alternativa al proceso anterior se presenta de la siguiente manera:

El objeto grupo es asimilado por el esquema de función, y el estudiante, por tanto, generaliza ese esquema y acepta que haya funciones definidas entre grupos.

Por medio de esa asimilación, el estudiante puede determinar, además: que f puede aplicarse a todo elemento de G; que si $a, b \in G$ entonces ab es un (solo) elemento de G y que por lo tanto puede determinar su imagen en G'.

De esta manera hará consciencia de que, siendo la fuente y el blanco de f grupos, ellos son cerrados respecto de las operaciones binarias respectivas.

Utilizando concepciones acción, el estudiante puede entonces tomar dos elementos particulares $a_\circ, b_\circ$ de G y operarlos en G, obteniendo $a_\circ b_\circ$ y luego determinar su imagen $f(a_\circ b_\circ)$ bajo f como elemento de G'; puede también determinar las imágenes $f(a_\circ), f(b_\circ)$ de esos elementos y operarlas en G', obteniendo $f(a_\circ)f(b_\circ)$. Ahora bien, bajo la concepción objeto de los tres elementos determinados en G', puede comparar $f(a_\circ b_\circ)$ y $f(a_\circ)f(b_\circ)$ y comprobar que son iguales.

Si el estudiante utiliza únicamente concepciones acción, solo puede verificar el cumplimiento de la preservación de la operación de G para casos específicos de elementos de G, bajo la función f, pero no de manera general sobre todos esos elementos.

Si, por el contrario, el estudiante comienza a pensar en la forma general de los elementos de G, podemos decir que aquellas acciones se han interiorizado y por tanto posee una concepción proceso de la preservación de la operación de G. Este proceso le permite determinar si una función de G en G' cumple o no con aquella propiedad sin hacer acciones –sin hacer cálculos–, pensar en la satisfacción o no satisfacción de la propiedad para todos elementos del grupo G y en la forma en que f actúa sobre ellos.

Roa y Oktaç (2010) nos advierten que, para el caso de funciones lineales, han sugerido un estado intermedio entre la construcción de la concepción acción y la del proceso, que ellas, para este caso, llamarían posiblemente 'transición entre las concepciones acción y proceso de la propiedad de preservación de la operación' (Roa & Oktaç, 2010, p. 105). El equivalente aquí sería que un estudiante pudiera verificar la propiedad sobre la forma general de los elementos de G sin pensar en todos los elementos de G, y estar haciendo mecánicamente solo acciones sobre un objeto familiar; en tal caso, podría tener muchos procesos pero no lograr coordinarlos mediante el cuantificador universal.

Si el estudiante tiene la concepción objeto de operación binaria y una concepción proceso de morfismo de grupos, puede considerar que el elemento genérico ab puede ser transformado por f en un elemento de G', y puede también darse cuenta de que $f(a)f(b)$ es un (solo) elemento de G'. Al comparar, en G', $f(ab)$ y $f(a)f(b)$, puede determinar si f preserva la operación binaria.

Una vez que se da cuenta, usando el cuantificador universal, de que f preserva la operación, estaría en condiciones de encapsular ese proceso en un objeto.

Objetos: construcciones

Como de costumbre, la encapsulación ocurre cuando se necesita aplicar acciones sobre los procesos: el estudiante puede pensar en el morfismo como un todo, y hacer conscientemente transformaciones sobre él.

Para determinar si tal encapsulación ha ocurrido, tenemos varias alternativas:

- Tomar morfismos $f, g : G \to G'$ y averiguar si el estudiante puede construir fg definido de acuerdo al producto inducido por la operación de G' : $(fg)(a) = f(a)g(a)$, $(a \in G)$.

  (Para ello, el estudiante, a partir de su esquema de operación binaria, debería desencapsular el objeto función en el proceso que lo originó, recurrir a su esquema de función y considerar el proceso por el cual se define el producto fg de dos funciones f, g; ahora bien, a través de la aplicación del proceso por el cual se determina que una función preserva las operaciones, podrá también determinar que fg preserva, a su vez, la operación de G. Alternativamente, puede desencapsular las dos funciones y coordinar los respectivos procesos en uno nuevo cuya encapsulación determina una nueva función, un nuevo objeto. Cf. Dubinsky, 1991 a y 1991 b; Ayers, Davis, Dubinsky & Lewin, 1988).
- Tomar morfismos $f : G \to G', g : G' \to G''$, y examinar si el estudiante puede construir el morfismo $g \circ f$. (Para ello, él debería tener una concepción objeto de morfismo de grupos, y procedería de manera análoga a la anterior).
- Preguntar al estudiante si, de ser f un morfismo biyectivo, acaso la función inversa de f^{-1} es también es un morfismo. (En este caso, necesitará pensar en las propiedades del concepto y requerirá, por tanto, de una concepción objeto de morfismo).

Como hemos visto, en todos los casos se requiere una concepción objeto de morfismo. Esto es muy relevante para nosotros, dado el contenido del teorema del isomorfismo.

Objetos: características

Una opción alternativa para determinar si el estudiante dispone de una concepción objeto del concepto de morfismo de grupos es hacer el análisis de sus respuestas a preguntas específicas acerca de las propiedades o características de este concepto.

En efecto, se pueden caracterizar los morfismos de grupos como elementos que pertenecen a un determinado conjunto, en este caso, $\mathfrak{mor}(G, G')$, por ejemplo. Esta caracterización no parece sencilla para los estudiantes que se inician en el álgebra abstracta, pero puede servir para generar en ellos el desarrollo de una concepción objeto de este concepto.

Se podría averiguar, además, siguiendo las alternativas que presentamos en el parágrafo anterior, si acaso el estudiante puede considerar $\mathfrak{mor}(G, G')$ como cerrado bajo el producto, o bien $\mathfrak{mor}(G, G)$ como cerrado bajo la composición, aun cuando, según la experiencia, ello es más difícil de conseguir.

Subgrupos normales

Continuamos con nuestra descomposición genética del teorema.

Para precisar debidamente la alternativa que tomamos, haremos un breve recuento de algunos aspectos matemáticos que fueron tratados en el capítulo 3, secciones 1.4, 1.5 y 1.6. y traeremos a colación, además, parte de algunas de sus demostraciones, para utilizarlas en la discusión.

En lo que sigue, H es un subgrupo de G.

Relaciones de equivalencia y cocientes

Relaciones de equivalencia

Todo subgrupo H de G define dos relaciones de equivalencia en G, según las siguientes fórmulas:

$a\mathcal{R}_{H,d}b \Leftrightarrow a\mathcal{R}_d\, b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ (relación derecha definida por H), y

$a\mathcal{R}_{H,i}\, b \Leftrightarrow a\mathcal{R}_i\, b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ (relación izquierda definida por H).

La concepción objeto de estas relaciones de equivalencia requiere de tematizar el esquema de relación de equivalencia para el caso de las definiciones correspondientes. Ello requiere a su vez de desencapsular el objeto relación de equivalencia y de coordinar la concepción proceso de relación de equivalencia con la de subgrupo, de manera de aprovechar las propiedades de este para demostrar las de aquella: existencia de neutro, para la reflexividad; existencia de inversos de cada elemento, para la simetría, y clausura, para la transitividad.

Cocientes

Las clases de equivalencia respectivas son (según se calculó en 3.1.4), para $a \in G$:

$\overline{a}_{\mathcal{R}_{H,d}} = \overline{a}_{\mathcal{R}_d} = Ha$; $\overline{a}_{\mathcal{R}_{H,i}} = \overline{a}_{\mathcal{R}_i} = aH$,

de manera que los cocientes respectivos son

$G/_{\mathcal{R}_{H,d}} = G/_{\mathcal{R}_d} = \{Ha : a \in G\}$; $G/_{\mathcal{R}_{H,i}} = G/_{\mathcal{R}_i}\{aH : a \in G\}$.

Como se sabe, es costumbre anotar $G/\mathcal{R}_d = H\backslash G$, y $G/\mathcal{R}_i = G/H$, y llamarlos *cocientes*, en lugar de *particiones*.

Para obtener concepciones objeto de estos cocientes basta tematizar el teorema RE/P para los casos de las relaciones de equivalencia $\mathcal{R}_d$ y $\mathcal{R}_i$.

Subgrupos normales

Los enunciados

En atención a lo anterior, la definición de subgrupo normal se puede expresar de varias maneras equivalentes entre sí (Cf. 3.1.3, definición 70, y 3.1.5, proposición 72).

$H \trianglelefteq G$ si y solo si:

a. $(\forall a \in G)(aH = Ha)$

b. $\mathcal{R}_{H,d} \Leftrightarrow \mathcal{R}_{H,i}$.

c. $(\forall a \in G)(\forall h \in H)(a^{-1}ha \in H)$

d. H es invariante bajo los automorfismos interiores de G. (Cf. definición 70 en 3.1.3).

e. $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{H,d}} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}_{H,i}}$, esto es, $H\backslash G = G/H$.

Equivalencia entre los enunciados

Las dos primeras se traducen casi directamente: dos relaciones de equivalencia definidas en un conjunto G son equivalentes si y solo si determinan las mismas clases en G.

Por su parte, las dos últimas son traductibles, también, directamente, una en la otra.

La primera es también equivalente a la tercera: dado $a \in G$, $aH = Ha$ quiere decir que para cada ah, $(h \in H)$, hay $h' \in H$ tal que $h'a$, de modo que, para cada $a \in G$, para cada $h \in H$, se tiene que hay $h' \in H$ tal que $ah = h'a$; de allí sigue de inmediato de modo que $aha^{-1} \in H$ o también, lo evidentemente es lo mismo, $a^{-1}ha \in H$.

Finalmente, que e. es equivalente a b. sigue de inmediato del teorema RE/P.

Las demostraciones

Probar que $H \trianglelefteq G$ es sensiblemente diferente si se lo trata al tenor de a., b. o e. que si se lo hace con c. o h. Ello es debido, naturalmente, a la doble cuantificación en estas últimas.

En el enfoque tradicional, se usa las versiones a. o bien c.

Si se utiliza a., se requiere desencapsular el concepto de clase de equivalencia construida como encapsulación del proceso de coleccionar, para $a \in G$, los elementos ah, con $h \in H$.

Por el contrario y como se puede apreciar de inmediato, si se usa c. hay sólo que trabajar con elementos; ello no obstante, el costo es que el alumno suele no relacionar esa propiedad con clases de equivalencia ni con cocientes.

En nuestra aproximación, las clases han sido encapsuladas directamente como elementos de sendas particiones, que deberán compararse entre sí. Es esa la aproximación que usamos a continuación, de manera que, para reconocer si se tiene $H \trianglelefteq G$, el alumno debe comparar directamente las clases y, con ello, los cocientes respectivos.

El trabajo de los estudiantes

Con las definiciones a la vista, el alumno puede comparar $H\backslash G$ y G/H en casos concretos.

Por ejemplo, puede tomar primero $\mathbb{Z}$ y alguno de sus subgrupos pequeños, y cotejar directamente ambas particiones. A continuación, es natural sugerirle que compare los cocientes para el caso del grupo S_3 de permutaciones de tres elementos y el subgrupo alternante N correspondiente (esto es, el de las rotaciones), y luego un subgrupo de reflexiones, digamos H. Ahora bien, H es el caso más pequeño para el cual se encuentra que $H\backslash G \neq G/H$, y la observación en clases que hemos hecho de estudiantes de distintas cohortes muestra que, para el alumno, resulta muy instructivo, tanto por ese hecho como para separar el concepto de subgrupo normal del de conmutatividad.

Para casos de grupos finitos no conmutativos de cardinal mayor a 8 los cálculos se vuelven largos y, en nuestra experiencia, aportan mayor complicación pero no necesariamente mayor claridad conceptual.

Por supuesto, el caso conmutativo es fácil de manejar, pero no resulta esclarecedor en el orden conceptual: si G es conmutativo, todo subgrupo de G es normal en G.

Concepción acción

Un alumno manifiesta una concepción acción del concepto de normalidad subgrupos si, dados un grupo G y un subgrupo H específicos, puede escribir las correspondientes clases aH y Ha y determinar si son iguales, en los siguientes casos: si el grupo es abeliano; si el grupo es no abeliano y es 'razonablemente pequeño' o bien dispone de una *presentación* de él, no demasiado compleja (si se trata de un grupo diédrico, pongamos por caso).

Concepción proceso

El alumno dispone de una concepción proceso del concepto de subgrupo normal si acaso puede imaginar con claridad y expresar con alguna precisión, sin realizar los

cálculos, si acaso un subgrupo H de un grupo G es normal en él: describir y escribir las clases, relacionarlas con las relaciones de equivalencia que las definen, y explicitar el proceso de comparación de las clases y de las correspondientes relaciones de equivalencia. Todo ello tanto para grupos específicos como para el caso general.

Para ello, puede tematizar el esquema de relación de equivalencia para el caso de G y H dados y obtener $\mathcal{R}_{H,i}$ y $\mathcal{R}_{H,d}$; tematizar, además, el esquema del teorema RE/P, de modo de obtener los objetos G/H y $G\backslash H$ y luego desencapsularlos en el proceso de reunión de las clases de modo de tener acceso a las correspondientes colecciones y compararlas entre sí. Esto requiere de tener una concepción objeto de subgrupo, de manera de poder reunir todos los elementos de G equivalentes, en cada caso, con $a \in G,$ y luego desencapsular el esquema de conjunto para reunir las clases de todos los $a \in G$, vía el cuantificador universal.

Mantener la conexión entre las clases y las relaciones que las definen es importante en esta aproximación: lo que se compara son los cocientes directamente y, por lo tanto, las relaciones de equivalencia; trabajar con las clases es solo una manera de garantir la igualdad de los cocientes. (Lo cual parece obvio, pero, en la práctica, en la aproximación habitual se puede observar cómo el estudiante calcula las clases sin tener alguna noción de cuál es la finalidad de hacerlo).

Concepción objeto

La encapsulación requiere de pensar en las respectivas colecciones de todas las clases (izquierdas, derechas) mediante el cuantificador universal, y luego comparar esas colecciones entre sí.

Una manera de comprobar la encapsulación se obtiene tomando un grupo no abeliano G y uno de sus subgrupos no triviales H, proponiendo definir una operación $\overline{a}_{H,i}\overline{b}_{H,i} = \overline{ab}_{H,i}$ en los cocientes, y requerir comprobar si queda bien definida.

Para ello, puede tomarse, por ejemplo, $G = S_3$ y alguno de sus subgrupos de orden 2.

Cocientes

Es claro que, encapsulado el objeto subgrupo normal, queda también encapsulado el cociente correspondiente. Se necesita, sin embargo, que el cociente sea un grupo.

Fijamos aquí $G, H, N,$ con $H \leq G, N \trianglelefteq G$

Dificultad variable

Se definirá $(aN)(bN) = abN,$ y se tomará eN y, para cada $a \in G, a^{-1}N$.

Habrá que probar que la operación está bien definida, que es asociativa, que eN es el neutro y que, para cada $a \in G,$ $a^{-1}N$ es el inverso de aN.

Ahora bien y como se ha advertido antes, la buena definición de la operación es un asunto complejo y delicado y, por oposición a ello, las restantes propiedades son triviales.

El trabajo de los estudiantes

Lo que sigue resume algunas de nuestras observaciones hechas en clases y/o en entrevistas, y registradas en forma escrita y/o en video.

Alumnos sin experiencia

Individuos que no tienen experiencia previa en el tema pueden:

- distinguir las relaciones de equivalencia derecha e izquierda definidas por un subgrupo que no es normal en G, en un caso finito, y escribir las clases y los cocientes respectivos;
- hacer el caso $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$ para $n \leq 6$;
- examinar con algún esfuerzo casos como el del grupo simétrico $G = S_3$ cocientado por el subgrupo R de las rotaciones, y por un subgrupo H generado por una reflexión, y determinar con esfuerzo las clases y los cocientes respectivos, pensados directamente como una partición; notar que ni $S_3/\mathcal{R}_{H,d}$ ni $S_3/\mathcal{R}_{H,i}$ son grupos, pero que sí lo es S_3/R;

- trabajando en grupo, conjeturar que, para que $G/H, H\backslash G$ sean grupos, debe tenerse que las clases correspondientes sean las mismas, y que se obtiene un mismo grupo en ambos casos.
- encontrar alguna versión de la propiedad de normalidad, aunque les cuesta trabajar con ella.

De todas maneras, definir la operación del grupo cociente no es enteramente inmediato: hay aún cierta tendencia a ignorar el problema y a abalanzarse a demostrar que se cumplen las propiedades que satisfaría una operación de la cual asumen, sin mayor reflexión, que disponen.

En cualquier caso, en todo ese trabajo, una proporción apreciable de estos estudiantes sin experiencia previa parece detenerse, en general, en concepciones acción de los conceptos involucrados, y no parecen desarrollar las concepciones proceso correspondientes.

Por otra parte y como cabría esperar, la gran mayoría de los estudiantes se inclina notoriamente a trabajar en casos concretos y no le entusiasma tanto ver el caso general, abstracto

Alumnos que estudiaron el tema

Por su parte, alumnos que cursan o han cursado la asignatura o bien la cursan y han visto ya el teorema, enfrentados a candidatos a grupos cocientes, presentan tres conductas diferentes:

- muchos no reparan en la necesidad de la buena definición de la operación de un grupo cociente, y se abalanzan a realizar "demostrar" propiedades de pretendidas operaciones;
- otros recuerdan que para que el cociente sea un grupo se requiere de un subgrupo normal, pero no siempre saben cuál es la razón de ello;
- unos pocos entienden que hay que tomar en cuenta la buena definición de la operación.

Las proporciones varían (según nuestras observaciones, dependiendo un tanto del énfasis que da el profesor de la asignatura, que suele ser variable). En todo caso, encontramos pocos ejemplos de esquemas bien construidos.

El cociente es un grupo

Acciones

Una acción consiste en darse N, G específicos, de manera que $N \trianglelefteq G,$ y, ante la definición general $(aN)(bN) = abN$, tomar $a_\circ, b_\circ$ determinados en $G,$ y preguntar si acaso $a_\circ N b_\circ N$ es un único resultado.

Otras son preguntarse si se tienen, para una operación así definida y aun para elementos determinados: si se cumple la especificación correspondiente de la propiedad de asociatividad; si, se tiene $eNa_\circ N = a_\circ N,$ y si se tiene $a_\circ N a_\circ^{-1} N = eN.$ (Como hemos indicado antes, estas últimas acciones no revisten tanto interés como la primera).

Procesos

Para ver si la operación en G/N está bien definida, se puede, por el contrario, comenzar por tematizar el esquema de operación binaria para el caso de una operación definida en las clases.

Sin embargo, aquí se necesita verificar si acaso la operación no depende de los representantes elegidos en las clases. Para ello, se puede tematizar además el esquema de cociente.

Esstas tematizaciones permiten desencapsular los objetos operación binaria y cociente, de manera de tener acceso a los procesos correspondientes. Ahora bien, se debe tomar representantes en las clases, utilizarlos en la definición de la función y comprobar si se obtiene los mismos resultados cada vez. No hablamos aquí de hacer los cálculos para cada par de elemento $a, b \in G,$ sino de la forma general de las comprobaciones que deben

realizarse.

Los procesos correspondientes a las otras propiedades son más sencillos, pues se trata de reiterar ciertas igualdades determinadas por una fórmula que –supuesto que está bien definida– es simple, para cada elemento, o par o trío de elementos, de G.

Objetos

La encapsulación requiere de pensar en la colección de todas las clases mediante el cuantificador universal y reunir la satisfacción de las propiedades descritas en una afirmación compleja que abarca a todos los elementos del cociente, y aun a todos los pares y aun ternas de elementos del cociente.

Una manera de comprobar la encapsulación se obtiene definiendo un morfismo de fuente un grupo cociente G/H; en ese caso, nuevamente, la buena definición de la función correspondiente es el aspecto determinante, y la preservación de la operación de G/H es, por comparación, más sencilla y menos iluminadora al respecto.

Una alternativa es comprobar si, dados $N \trianglelefteq G$ y $H, H' \leq G$, de modo que $N \subseteq H \subseteq H'$, se tiene que $H/N \leq H'/N$; o bien, tomar G/N y particionarlo según el primer teorema del isomorfismo (Cf. 3.1.12). Habría que considerar, sin embargo, que estos ejemplos entrañan sus propias dificultades.

Núcleo de un morfismo

Dado un morfismo $f : G \to G'$, su núcleo $\mathcal{N}(f)$ es el conjunto de los elementos de G cuya imagen es e'.

Conjunto

Para aprehender el objeto núcleo, primeramente, el esquema de conjunto se tematiza en este conjunto particular: el conjunto subyacente al grupo G debe desencapsularse para explicitar el conjunto $\mathcal{N}(f)$ de los elementos de G cuya imagen, según f, es e'.

Subgrupo y normal

Ahora bien, en la teoría de grupos no interesa solo el conjunto $\mathcal{N}(f)$, sino el subgrupo normal $\mathcal{N}(f)$ –de modo que $G/\mathcal{N}(f)$ sea un grupo–.

Que $\mathcal{N}(f)$ sea un subgrupo de G comporta tematizar el concepto de subgrupo al caso $\mathcal{N}(f)$ utilizando el cuantificador universal; para un alumno que haya efectivamente encapsulado el concepto de subgrupo, el caso no ofrece mayor dificultad, dada, en particular, la definición de $\mathcal{N}(f)$.

Ahora bien, en cuanto a la propiedad específica de normalidad, es este un caso en que es más inmediata la demostración vía elementos: si $a \in G$ y $n \in \mathcal{N}(f)$, entonces $f(a^{-1}na) = f(a^{-1})f(n)f(a) = f(a^{-1})e'f(a) = f(a^{-1})f(a) = f(a)^{-1}f(a) = e'$, lo cual es, también, una instancia sencilla de tematización del concepto de normalidad.

Conexión con el caso conjuntístico

A pesar de que en el caso conjuntístico no hay núcleos de las aplicaciones, la conexión de la relación de equivalencia que define $\mathcal{N}(f)$ y la que determina f es inmediata: para $a, b \in G$, se tiene:

$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow ab^{-1} \in \mathcal{N}(f) \Leftrightarrow f(ab^{-1}) = e' \Leftrightarrow f(a)f(b^{-1}) = e' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(a)f(b^{-1}) = e' \Leftrightarrow f(a)f(b)^{-1} = e' \Leftrightarrow f(a) = f(b).$

Grupo cociente

El grupo

Demostrado que se tiene que $\mathcal{N}(f) \trianglelefteq G$, se concluye sin más trámite que $G/\mathcal{N}(f)$ es un grupo. De hecho, *a posteriori* se puede decir que se ha definido la normalidad para obtener que el cociente por un subgrupo normal sea un grupo.

Esta es una tematización inmediata del esquema de grupo cociente para el caso en que el subgrupo normal es el núcleo de un morfismo.

La proyección canónica

El objeto proyección canónica ya ha sido construido para el caso del teorema del

isomorfismo para conjuntos.

Basta ahora comprobar que ella es un morfismo de grupos, lo que ha sido descrito en la sección de morfismos.

El teorema del isomorfismo para grupos

El teorema

El teorema del isomorfismo para grupos garantiza que, en las notaciones ya fijadas, $G/\mathcal{N}(f)$ es isomorfo a la imagen $\mathrm{Im}(f)$ de f, esto es:

- hay una función inyectiva $\overline{f} : G/\mathcal{N}(f) \to G'$ definida por $\overline{f}(\overline{a}) = f(a)$;
- $\overline{f}$ es inyectiva, y
- $\overline{f}$ es un morfismo de grupos.

Notemos que la demostración de la última afirmación consiste en un cálculo simple: $\overline{f}\left(\overline{a}\,\overline{b}\right) = \overline{f}(\overline{ab}) = f(ab) = f(a)f(b) = \overline{f}(\overline{a})\overline{f}\left(\overline{b}\right)$.

El trabajo de los alumnos

De acuerdo a lo que ya hemos hecho explícito, en relación con el teorema del isomorfismo para grupos, estudiantes que han cursado o están cursando una asignatura de álgebra abstracta que lo contemple en su programa dan por sentada la buena definición de la función desde el cociente, o bien recuerdan que esa buena definición es algo importante (y que tiene que ver con algo relacionado con ciertos representantes), pero suelen no saber muy bien qué es. Ahora bien, quienes han estudiado el teorema particionado en sus aspectos conjuntísticos y de operaciones no necesitan preocuparse de esta cuestión en esta etapa.

En lo que a la preservación de la operación de G se refiere, trabajan en forma expedita y sin obstáculos.

Que la función (bien) definida sea una biyección sobre $\mathrm{Im}(f)$ es una consecuencia inmediata de nuestro teorema de isomorfismo para conjuntos, y quienes han seguido nuestra aproximación no tienen dificultad en así expresarlo.

Preservación de la operación

(Alteramos, según se aprecia, levemente el orden de la exposición).

Para mostrar que la función $\overline{f}$, supuestamente bien definida por $\overline{f}(\overline{a}) = f(a)$, preserva la operación de $G/\mathcal{N}(f)$, se requiere solo de la noción del esquema de morfismo, que se tematiza al caso de una función definida sobre un cociente.

Para ello, mediante la asimilación del grupo por el esquema de función, el estudiante puede afirmar que si $\overline{a}, \overline{b} \in G/\mathcal{R}_{\mathcal{N}(f)} = G/\mathcal{N}(f)$, entonces $\overline{ab} \in G/\mathcal{N}(f)$, y por tanto es posible determinar su imagen en G'. Por otra parte, ya conoce que al operar dos elementos en G' su imagen también está en G'. Así, está consciente que los conjuntos de partida y de llegada de la función $\overline{f}$ son grupos y por tanto cerrados respecto de sus respectivas operaciones binarias.

Para esto último, dado que tiene el esquema de función, puede desencapsular el objeto función: mediante la coordinación entre el proceso de función y el de operación binaria vía el cuantificador universal, debe generar un proceso para determinar que la aplicación $\overline{f}$ cumple con $\overline{f}(\overline{ab}) = \overline{f}(\overline{a})\overline{f}(\overline{b})$ al aplicarla a cualquier par de elementos de $A/\mathcal{R}$.

Para los estudiantes, como dijimos, esta demostración es bastante sencilla y la hacen en forma expedita.

La buena definición

Que la definición de $\overline{f}(\overline{a})$ por $f(a)$ no dependa de los representantes elegidos en la clase $\overline{a}$ es una cuestión que nuestra aproximación zanja con entera claridad, y es una consecuencia inmediata del teorema del isomorfismo para conjuntos.

Es una biyección

Que $\overline{f}$ sea biyectiva sobre el subgrupo $\mathrm{Im}(f)$ es otro resultado inmediato de nuestro

teorema de isomorfismo para conjuntos.

Niveles del esquema

Nivel intraoperacional

La construcción del esquema del teorema del isomorfismo comienza con la constatación de que se tiene: un par de grupos G, G'; una función bien definida f, que es un morfismo; el núcleo $N = \mathcal{N}(f)$ de f, que es un subgrupo normal de G; el cociente G/N, que es un grupo; la proyección $\pi_N = \pi$ de G a G/N, que es un morfismo; el grupo $\mathrm{Im}(f)$. Si el estudiante coordina todos esos elementos mediante la afirmación-verificación de que hay una biyección $\overline{f}$ de G/N a $\mathrm{Im}(f)$, que se preserva la operación, posee la construcción del esquema del teorema del isomorfismo en el nivel intra.

Puede ocurrir que realice cada constatación, pero que aun no las relacione entre sí ni las pueda reconocer en una situación concreta.

Nivel interoperacional

Esta etapa se caracteriza por las relaciones que se establecen entre las componentes del esquema: el morfismo f y su núcleo $N = \mathcal{N}(f)$; los grupos G, G' conectados por f; $\mathrm{Im}(f)$ como subgrupo de G' y determinado por f; G y G/N conectados por la proyección π_N; G/N relacionado con $\mathrm{Im}(f)$ por el isomorfismo $\overline{f}$; sobre todo, la puesta en escena que hace aparecer el isomorfismo $\overline{f}$ como factor de f, junto con π_N.

En este nivel el estudiante es consciente de que no se trata ya solo de una colección de enunciados que terminan en el del isomorfismo, y puede darse cuenta de que si alguna condición falla, no se tiene el teorema –por ejemplo, si f no es un morfismo (no hay núcleo), si N no es el núcleo de la aplicación (en cuyo caso f puede no estar bien definida), si $\mathrm{Im}(f)$ se reemplaza por otro subconjunto de G', y similares.

Etapa transoperacional

Esta etapa se caracteriza por la coherencia, la cual se nota cuando el estudiante puede poner en juego el teorema en situaciones no familiares y en la solución de problemas.

Por ejemplo, ello puede darse:

- en la verificación de que dos grupos son isomorfos por medio de la utilización del teorema; por ejemplo, $\mathbb{Z}_6/3\mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2$; $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, vía el morfismo $x \mapsto e^{2\pi i x}$;
- en la demostración de los restantes teoremas de morfismo para grupos;
- en la identificación de grupos tales como $(\mathbb{R} - \{0\})/\{1, -1\}$.

  Esquemas más desarrollados permiten demostrar isomorfismos de grupos tales como $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ (en este caso, también isomorfismo de cuerpos), y también calcular cocientes tales como $\mathbb{Z}[x]/\langle x\rangle$ o bien $\mathbb{R}^2$ sobre el núcleo de la función (lineal) $(x, y) \to x - y$)).

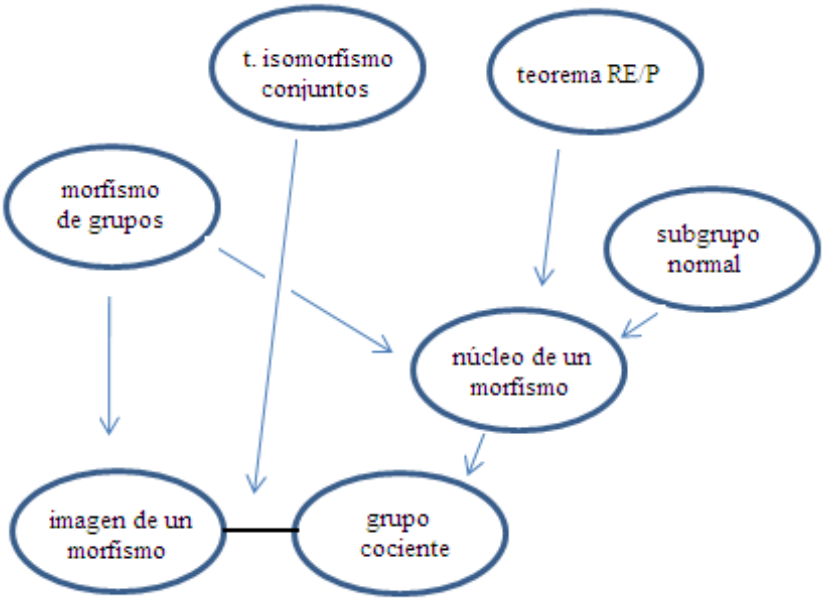


Figura 9. Teorema del isomorfismo para grupos

Scholium

A lo largo de este estudio, hemos tenido oportunidad de analizar el *teorema del isomorfismo para grupos*, en particular, de situarlo en sus ambientes teórico y epistemológico –tanto en la variante histórica como en la psicogenética–.

Desde un punto de vista puramente algebraico, ese teorema es consecuencia inmediata del *teorema fundamental del morfismo para grupos*, esto es, de la propiedad universal del cociente de un grupo sobre un subgrupo normal –o, mejor aún, de la proyección canónica del grupo sobre ese cociente–.

Por otra parte y según pudimos examinar, variantes –*mutatis mutandis*– del teorema del isomorfismo para grupos se encuentran también en categorías tales como anillos, *A*-módulos, grupos topológicos, etc., y, además, ese teorema se generaliza para la categoría de los conjuntos. Ahora bien, en todas esas categorías se puede enunciar y demostrar un teorema fundamental del morfismo y, en cada caso, el teorema del isomorfismo es una concecuencia inmediata de ese teorema fundamental, como lo son una serie de otros teoremas de morfismo en las correspondientes categorías.

Esto último manifiesta no solo la relevancia de estos hechos –por cuanto se relacionan con *propiedades universales* y *teoremas fundamentales*–, sino también el interés que tiene el analizar todo el asunto desde una perspectiva psicogenética, en particular, con la teoría APOE.

Ello constituye un proyecto de mayor alcance que el presente estudio, el cual incluye un análisis detallado del teorema fundamental del morfismo para *conjuntos*, a partir de cuya descomposición genética, estimamos, se puede tanto reconstruir la del teorema que hoy nos ocupa como realizar las de los restantes teoremas de morfismos de grupos, y también las de los correspondientes teoremas en otras categorías con estructura.

En ese proyecto se utilizarán las caracterizaciones, sugerencias y preguntas que se incluyen en nuestro análisis teórico de hoy, para la obtención y análisis de los datos empíricos que nos permitan concluir de qué manera los estudiantes pueden construir el teorema del morfismo, las nociones que inmediatamente le preceden y su desarrollo ulterior, de modo de completar el ciclo de investigación correspondiente y poder así diseñar propuestas de enseñanza apropiadas a la dificultad que los conceptos involucrados

presentan para su adquisición.

Podemos aceptar que los teoremas de morfismo en otras categorías que las de conjuntos, de grupos y de anillos no son el centro de atención de los currículos actuales. Ello no obstante, recurriendo a ellos hemos podido substanciar que nuestros teoremas, en las categorías de conjuntos y de grupos (y de anillos y, en alguna medida, de K-espacios vectoriales y de A-módulos) son hechos importantes de la Matemática, y que representan una etapa de desarrollo profundo de la disciplina. Cuándo y de qué manera será la versión conjuntística incorporada a los currículos, es algo difícil de aventurar hoy en día. Nosotros creemos que esos teoremas hablan de situaciones muy básicas y relevantes y que, pese a una eventual dificultad cognitiva en lo que se refiere a algunas de las demostraciones, se trata de conceptos que vale la pena construir.

La práctica de las relaciones

En este capítulo, nos detenemos para considerar a las relaciones de equivalencia (y otras) como práctica corriente, tanto en la matemática como en los usos sociales, en distintos ámbitos.

Nuestra intención es reiterar aquí la naturalidad de una noción que se suele desperdiciar en la enseñanza –y que, en particular, según hemos explicitado, se puede utilizar a propósito de la construcción del teorema del isomorfismo–.

Relaciones

El esquema general de estudio de la Lógica ocurre en etapas sucesivas: proposiciones; funciones proposicionales en una letra (cuantificadores, conjuntos); funciones proposicionales en dos letras o *relaciones binarias* –o simplemente relaciones– .

Desde un punto de vista formal, casi toda la Matemática que uno puede conocer descansa y se apoya sobre alguna versión de la Teoría de Conjuntos, pero debe hacerse casi siempre expresa mención de las relaciones entre los objetos de cada teoría; en otras palabras, es prácticamente inevitable la conexión con alguna Teoría de Relaciones.

Ahora bien, lo anterior no bastaría –no debería bastar– para incluirlas en un trabajo como éste. Sin embargo y como tataremos de mostrar a continuación, estos conceptos que la Matemática recoge, precisa y ubica en un mayor nivel de generalidad, están en realidad presentes en prácticamente todo lo que hacemos o pensamos. Ello incluye, por cierto, nuestra descomposición genética.

Se podría decir que lo anterior no es aún razón suficiente para dedicarles parte de este estudio; pero, tal como hemos declarado antes, las relaciones de equivalencia son parte substantiva de nuestra descomposición genética.

En lo que sigue, usaremos una multiplicidad de ejemplos, ilustraciones, comentarios. Claro está, los objetos del llamado *mundo real* no son, en rigor, necesarios para desarrollar una teoría matemática, pero nos interesa declarar, al respecto, ciertas *prácticas sociales* que parecen estar en la génesis de estas nociones matemáticas –desde muchos siglos antes que su definición formal en la Matemática, si bien con las mismas propiedades que ésta abstrajo–.

Ejemplos de relaciones de equivalencia

Hemos hecho un acopio abundante aunque rápido de ejemplos de relaciones de equivalencia en el capítulo 2, movidos por nuestro afán de mostrar cómo ese tipo de ejercicio contribuye a la formación de esquemas de cocientes ricos y coherentes.

En este acápite, señalamos en mayor detalle algunos de esos ejemplos y agregamos algún otro en ánimo de completitud.

Example *Sean $A = \mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, n un número natural fijo.*

Entonces, la relación $\mathcal{R}_n$ definida en A por $x\mathcal{R}_n y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(y - x = kn)$ es una relación de equivalencia.

La relación $\mathcal{R}_n$ se escribe también $x\mathcal{R}_n y \Leftrightarrow x \equiv y (\mathrm{mod}\, n)$, y se lee *"x es congruente con y módulo n*"

Remark *Es interesante considerar el conjunto $\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}_n : n \in \mathbb{N}\}$ y hacer un diagrama de Hasse de $\mathfrak{R}$ 'ordenado' por $\preceq$*

Example *Si se estudia vectores en el plano, primero hay que decidir cuándo dos vectores son iguales, lo que, en realidad, significa convenir qué vamos a entender por vector. Supongamos que comenzamos tomando segmentos dirigidos $x = \overline{AB}, y = \overline{CD}$, es decir, distinguimos el punto inicial (A, respectivamente. C) y el punto final B, respectivamente. D) de cada segmento. Hay varias relaciones de equivalencia a disposición:*

$x\mathcal{R}y$: la longitud de $\overline{AB}$ es la misma que la de $\overline{CD}$.

$x\mathcal{S}y$: la dirección de $\overline{AB}$ es la misma que la de $\overline{CD}$; (esto es, $\overline{AB}, \overline{CD}$ tienen la misma inclinación)

$x\mathcal{T}y$: el sentido $\overline{AB}$ es el mismo que el de $\overline{CD}$; (esto es, $\overline{AB}, \overline{CD}$ tienen la misma inclinación, y A, C están 'del mismo lado').

$x\mathcal{U}y$: $A = C$; (esto es, $\overline{AB}, \overline{CD}$ tienen el mismo 'punto de aplicación').

Se tiene entonces que

1. *Para la relación $\mathcal{R}$, todos los segmentos que comienzan en el centro de una circunferencia y terminan en su perímetro son iguales; es decir, sería como tener una 'magnitud escalar', y no serviría para analizar, por ejemplo, velocidades (si se tratara de una carrera de caballos, no se distinguiría cuando uno corriera hacia fuera de la pista).*
2. *Para la relación $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$, dos vectores son iguales aunque apunten en sentidos contrarios (un caballo podría ir devolviéndose y la relación $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ no lo distinguiría).*
3. *La relación $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$ es la acostumbrada de igualdad de vectores: $x = y$ si y solo si tienen igual longitud, dirección y sentido. Esta relación es apropiada para velocidades (si dos caballos tienen siempre el mismo vector, seguramente empatarán la carrera).*
4. *La relación $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{U}$ sirve para analizar fuerzas: para que x e y sean iguales se requiere que tengan igual longitud, dirección, sentido y 'punto de aplicación'. (En efecto, si se aplica una fuerza en un cuerpo cualquiera, es fácil apreciar que para longitud, dirección y sentido iguales, el efecto dependerá, precisamente, del punto de aplicación: rotaciones en uno u otro sentido, traslaciones con una componente de rotación, etc. –la relación $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$ puede usarse, a condición de que las fuerzas se apliquen siempre en el centro de masas de los cuerpos involucrados–).*

Example *(Geometría de la visión) Considere el conjunto $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ y la relación $\mathcal{R}$ definida por*

$$(x,y,z)\mathcal{R}(x',y',z') \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R})(x' = \lambda x \wedge y' = \lambda y \wedge z' = \lambda z).$$

La relación $\mathcal{R}$ identifica dos puntos que están en una misma dirección desde el $(0,0,0)$, punto que podemos pensar como el ojo que observa. En cada dirección, la visión ya sea escoge un único punto de visión o bien se desplaza hasta el infinito.

Si se elige un sentido (digamos, el positivo del eje OX), un plano perpendicular al eje OY (digamos, $x = 1$) contiene todos los puntos de visión; si se lo recorta a un rectángulo conveniente, puede considerarse el plano de una fotografía.

La reacción de los alumnos en clase ante este ejemplo es interesante. Hemos propuesto este tema en reiteradas ocasiones a estudiantes de pedagogía en matemáticas y de arquitectura: presentamos el enunciado y dejamos que trabajen comunitariamente en él. La respuesta ha sido similar: al comienzo, lo toman como un ejercicio 'a ciegas'; hacen luego los cálculos y muestran que se trata de una relación de equivalencia; con ayuda, llegan a la conexión con la visión, y declaran espontáneamente que les resulta interesante e instructivo. La diferencia que hemos apreciado entre unos y otros estudiantes es que los de matemáticas proceden con mayor rapidez en los cálculos, y que los de arquitectura lo encuentran más importante –estos últimos son alumnos que curricularmente deben hacer mucha observación (de la ciudad) y que son invitados a 'mirar el ojo que mira' desde un punto de vista diferente al de este ejercicio–.

Orden y equivalencia

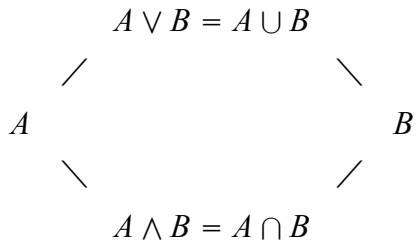
Órdenes y equivalencias

Tal como cabría esperar, a veces coexisten relaciones de equivalencia y de orden en un mismo conjunto; más aun, ocasionalmente están, a su vez 'relacionadas':

Example *Consideremos $E = \mathbb{P}(X)$, donde X es un conjunto cualquiera. Se tiene:*

1. *La relación $=$ es un orden en E*
2. *La relación $\subseteq$ es un orden filtrante en E*
3. *Para $A, B \in E$, se tiene $A = B \Rightarrow A \subseteq B$: la igualdad es más fina que la inclusión*

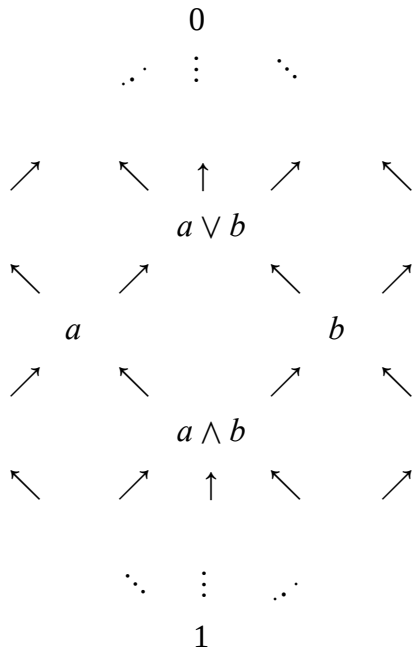
Tenemos nuevamente un diagrama de Hasse sugerente, para subconjuntos de un conjunto dado:



Example *De manera similar, se tiene, en $\mathbb{N}$:*

1. *$x = y \Rightarrow x \leq y$, de modo que la igualdad es más fina que la relación de menor o igual;*
2. *(además) Si, en $\mathbb{N}$ anotamos $x|y$ por $(\exists k \in \mathbb{N})(xk = y)$, se tiene que $x|y \Rightarrow x \leq y$, de manera que la relación divide a es más fina que la relación menor o igual que.*

Insistimos en nuestro diagrama de Hasse, dado que él nos sugiere una perspectiva que podremos utilizar más adelante ($a \vee b = \text{mcm}(a, b); a \wedge b = \text{mcd}(a, b)$):



Órdenes tras equivalencias

Lo anterior no obstante, nos interesa más el hecho de que, sobre un determinado conjunto A, puede definirse primero una relación de equivalencia y, sobre el correspondiente cociente, una relación de orden, como hicimos en 2.3.2:

Dada una colección $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}$ de relaciones de equivalencia definidas en un conjunto A, la relación $\mathcal{R} \preceq \mathcal{S}$ es reflexiva y transitiva en A, pero no antisimétrica; sin embargo, si se considera el cociente $\mathfrak{R}= \mathfrak{R}/\approx$, donde $\mathcal{R} \approx \mathcal{S}$ si y solo si $\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{S}$, se tiene entonces una relación de orden en (que seguimos anotando) $\preceq$ en el cociente $\mathfrak{R}$.

Ahora bien, ese orden es filtrante a izquierda, pero no a derecha en $\mathfrak{R}$; tampoco lo es el orden en $\mathfrak{R}$.

En efecto, si $\mathcal{R},\mathcal{S}$ son relaciones definidas en A, se tiene que $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ es una relación de equivalencia –lo que es inmediato–, pero $\mathcal{R} \vee \mathcal{S}$ no es una relación de equivalencia: el intento de demostración se frustra, si se quiere decirlo así, debido a la no-distributividad del cuantificador universal sobre la disyunción. Lo mismo ocurre para en orden en $\mathfrak{R}$.

Example *Un ejemplo elemental de lo anterior se tiene en las congruencias de números enteros (mcm denota el mínimo común múltiplo): $\mathcal{R}_n \wedge \mathcal{R}_m$ es equivalente a $\mathcal{R}_{mcm(m,n)}$; sin embargo, el gráfico de $\mathcal{R}_2 \vee \mathcal{R}_3$, e. g., no es una partición de $\mathbb{Z}$.*

Remark *Esta situación es análoga al caso de diferentes estructuras algebraicas definidas sobre conjuntos:*

Dadas una estructura algebraica sobre un conjunto E (digamos, un grupo, un anillo, un K-espacio vectorial) y dadas dos subestructuras A,B, es frecuente que $A \cap B$ sea una subestructura, pero es igualmente frecuente que $A \cup B$ no lo sea.

Para sugerir la conexión entre ambas situaciones, damos un ejemplo enteramente similar al anterior:

Example *En el grupo (o, si se quiere, en el anillo, dominio de factorización única, dominio de ideales principales o dominio euclidiano) $\mathbb{Z}$, se tiene que $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = mcm(m,n)\mathbb{Z}$, sin embargo, $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ no es un subgrupo de $\mathbb{Z}$.*

(Tal vez convenga observar que hay un antiisomorfismo de orden entre las estructuras involucradas:

$$\mathcal{R}_n \preceq \mathcal{R}_m \Leftrightarrow m|n$$

Relaciones como práctica social

Las relaciones de equivalencia y de orden nos han servido para analizar bien la matemática de nuestro teorema del isomorfismo para grupos, nos permitieron situarlo debidamente en un contexto teórico más amplio.

Además, fue desde las relaciones de equivalencia que pudimos diseñar una aproximación alternativa al teorema, que separa los aspectos conjuntísticos de los puramente algebraicos que el teorema contempla. Esto último pone de relieve la importancia de contar con esquemas suficientemente ricos de relaciones de equivalencia.

Nos proponemos ahora hacer una reflexión acerca de las relaciones de equivalencia –con alguna referencia indispensable a las relaciones de órdenes, para completar la visión–.

Con ello buscamos, según enunciamos con anterioridad, reunir elementos que podrían ser útiles para la construcción de un *esquema* rico y coherente del concepto de relación de equivalencia. La reflexión nos llevará en forma natural a considerar a las relaciones de equivalencia en una perspectiva de *práctica social*.

Ahora bien, así enunciado, esta sección podría aparecer como una digresión notoria del objetivo fundamental de nuestro trabajo; más aún, la sola noción de *práctica social* es ajena al marco teórico que hemos elegido para la tesis central que nos motiva. Lo anterior no obstante, nos parece que las consideraciones que vamos a realizar a continuación mostrarán por sí solas la pertinencia de esta parte de nuestro escrito.

Matemática y vida

Que la Matemática sea relevante para la vida diaria está, por supuesto, absolutamente fuera de duda.

Desde el punto de vista del estudio, sin embargo, la cuestión es más compleja.

Es, por una parte, completamente evidente que se estudia mucha matemática para aplicarla en el mundo real, de manera de poder conocer y actuar sobre situaciones determinadas.

Pensando en abstracto, sin embargo, uno puede observar que tales aplicaciones no son, formalmente hablando, indispensables para la construcción de una teoría y que, por otra parte, el fundamento de la teoría no radica en la eventualidad de que ella pueda ser utilizada en situaciones 'prácticas'.

De análoga forma, el que un concepto matemático esté relacionado con situaciones concretas puede ser parte de su historia –por ejemplo, puede indicar las circunstancias bajo las cuales se lo generó– pero, una vez correctamente enunciado, aquellas situaciones son un aspecto dispensable en el estudio.

De todas maneras, hacer conexiones apropiadas entre los objetos abstractos y los ejemplos cotidianos suele iluminar el estudio, no solo de los objetos matemáticos mismos, sino de las materias con las cuales ese estudio se relaciona. Puede ocurrir que los conceptos que esos ejemplos muestran sean precisamente los que la Matemática ha recogido e incorporado a un sistema formal, más preciso, más poderoso (proceso, este último, que pudo, a su vez, comportar varias etapas de abstracción sucesiva –de manera tal que los ejemplos iniciales hayan ido progresivamente desvaneciéndose–).

Intentaremos, por tanto, presentar alternativas para la realización de aquellas conexiones, particularmente, para el tema de las relaciones de equivalencia, centrales a

nuestra propuesta.

Trataremos de mostrar, además, cómo estos conceptos que la Matemática recoge, precisa y ubica en un mayor nivel de generalidad, están en realidad presentes en prácticamente todo lo que hacemos o pensamos.

Aspecto formal

El esquema general de estudio de la Lógica Formal, incluida su versión matemática, ocurre en etapas sucesivas: proposiciones; funciones proposicionales en una letra (cuantificadores, conjuntos); funciones proposicionales en dos letras o *relaciones binarias* –o simplemente relaciones– .

Ahora bien, es posible afirmar que la mayor parte de la Matemática está construida sobre la noción de *relación*, y hace uso permanente de los tipos de relaciones que reseñaremos.

Si examinamos con mayor detención, sin embargo, veremos que la mayor parte de la Matemática que conocemos hace uso explícito de relaciones de equivalencia, pues ha de juzgar, de manera inevitable, cuándo dos objetos son, precisamente, equivalentes.

La presentación

En lo que sigue, haremos una presentación, largamente descriptiva, cuyo propósito es substanciar que las relaciones de equivalencia constituyen una *práctica social*.

En cuanto al resto de este escrito, pretendemos con esto insistir en la idea de que es completamente natural aproximarse a los grupos cocientes desde las particiones de conjuntos, esto es, desde las relaciones de equivalencia.

Obviamente, no pretendemos que los ejemplos que proponemos sean importantes en sí, ni que constituya cada uno un asunto que concierne al estudio que hacemos. Por otra parte, declaramos en forma expresa que no pretendemos tener competencias en los temas no-matemáticos que tocamos.

Uso de Relaciones de equivalencia

Las relaciones de equivalencia se utilizan muchas veces en un día, todos los días. Esta afirmación, que podría parecer exagerada, tiene un asidero profundo en lo que llamamos realidad.

A continuación, pasaremos revista a una variedad de relaciones de equivalencia de apariencia bastante natural, elegidas un tanto al azar y que muestran que podemos seguir indefinidamente encontrando tales relaciones, en cualquiera dirección en que miremos. Así, acumularemos evidencia en favor de la afirmación de que las relaciones de equivalencia no solo están presentes en cada disciplina, no solo son elementos indispensables en la construcción de la cultura y la civilización, sino que aparecen inevitablemente cuando analizamos, cuando sintetizamos, es decir, cuando pensamos.

Por supuesto, es muy posible que una persona no haya escuchado –y tal vez no escuche jamás– la expresión *relación de equivalencia.* Ello no le impide considerar que dos objetos cualesquiera *son equivalentes*; dirá, tal vez, que *son iguales* –tal vez sepa que no lo son– o quizás no lo diga o no lo piense, pero los *identifique*.

Más aún, es muy frecuente –según se verá– que se trabaje o se piense en realidad no directamente con los elementos de un conjunto sino con clases de equivalencia en conjuntos cocientes, esto es, con particiones de conjuntos.

El caso cotidiano

En la vida diaria, se usa muchas más relaciones de equivalencia de las que podemos enunciar en unos cuantos días. Nos limitaremos a señalar una dirección de búsqueda.

Personas

Las personas suelen, por distintos propósitos, clasificar a conjuntos específicos de otras

personas, definiendo así diferentes relaciones de equivalencia: *tener la misma estatura que*, *tener la misma edad que*, *tener la misma nacionalidad que*, *vivir en el mismo barrio que*, *estar en el mismo curso que*, etc. En estos casos, las relaciones están definidas a partir de la *igualdad* en alguna característica.

Este ejemplo manifiesta, además, que la separación entre la relación y la partición correspondiente no siempre es clara (tener la misma nacionalidad se puede pensar como vivir en o ser originario de un mismo sector del mapa, etc.)

Objetos

Cuando se adquiere un producto, hay una serie de relaciones de equivalencias en juego. Por ejemplo, se puede comprar ya sea un lápiz, un lápiz de determinados color, marca, etc., lo que comporta varias relaciones de equivalencia, unas más finas que otras. (Al tenor de $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$, etc.).

La práctica social

El ámbito matemático.

Los ejemplos que hemos señalado antes (en 2.4) constituyen solo una muestra del hecho que la Matemática usa relaciones de equivalencia en forma permanente. En realidad, si así no fuera, el estudio de la Matemática en general no podría progresar como lo hace: en efecto, es siempre necesario discernir cuándo dos situaciones aparentemente disímiles tienen un denominador común, cuándo poseen una estructura abstracta similar, equivalente (esto es, cuándo son isomorfos); ello permite analizarlas en conjunto y de acuerdo a un propósito definido; variar ese propósito comporta cambiar la relación de equivalencia, eventualmente, por otra más fina.

Otras disciplinas

Respecto de las relaciones de equivalencia, el caso de la Matemática no difiere mucho del de otras áreas del conocimiento, si bien el ropaje es, naturalmente, diferente.

Biología

Un biólogo, pongamos por caso, estudia a veces los vertebrados; otras, los mamíferos; otras, los primates; lo que supone hacer particiones cada vez más finas, con mayor precisión. Desde los mamíferos, puede volver a una menos fina, por ejemplo, los cordados, o bien a otra más fina (que la de mamíferos), los ungulados. Si se observa lo que está sucediendo, se encontrará un *árbol* de relaciones 'ordenadas' por $\preccurlyeq$.

Poblaciones humanas

Ahora bien, un especialista que estudie la variación humana –es decir, que trabaja en una clase de equivalencia específica de una partición de un biólogo–, define y/o descubre algunas formas de identificar o distinguir aspectos de la población humana para examinar mejor algunos aspectos evolutivos.

Lingüística

En el caso de un lingüista que se ocupa de comparar distintos idiomas es evidente que realiza procesos de identificación, y que procura medir el grado de equivalencia o acercarse lo más posible a la identidad en el significado –debiendo a menudo conformarse con menos que eso–.

Las disciplinas

En general, cada disciplina cuenta con un conjunto de particiones, variables en el tiempo. El estudio consiste ya sea en examinar una clase como tal (digamos, los marsupiales, los metales, la literatura española), o subdividirla –a menudo de diversas maneras– y estudiar entonces una clase de una partición más fina (por ejemplo y respectivamente, los canguros; el cobre; el cuento hispanoamericano y/o la novela española del siglo XIX). Establecer qué propiedades deben satisfacer los objetos de estudio, esto es, los elementos de las clases, comporta la definición más o menos expresa de la relación de equivalencia correspondiente.

La cultura

Superpuesto al caso de las disciplinas está el hecho que la cultura entera funciona a través de relaciones de equivalencia.

Economía

Un ejemplo interesante, al respecto, nos lo puede traer un economista ocupado de la Historia. Nos dirá tal vez que la primera etapa económica es la del trueque (digamos, una oveja equivale a un saco de trigo). Etapas posteriores son sucesivamente: la de la moneda –objeto que equivale a cierto número de bienes de diversa naturaleza–; la del papel-moneda –que equivale a algunas monedas–; la del crédito –que funciona con papel que representa papel-moneda supuestamente depositado en el banco–; del plástico –que cancela con dinero que eventualmente se tendrá en el futuro–. (La abstracción que todo esto supone es, diríamos, confluyente hacia la Matemática: en la última etapa, se trabaja, insistimos, no ya con sustitutos o símbolos de valores, sino con valores inexistentes en la actualidad del cambio).

Las palabras

En realidad, cada cultura manifiesta bastante de sí en las particiones de mayor o menor finura. Por razones determinantes en cada caso y fáciles de barruntar, un inca tenía varias palabras para decir maíz; un árabe del desierto dispone de una fina clasificación de los camellos; un esquimal utiliza varias palabras distintas para señalar diversas tonalidades de blanco; un miembro de la tribu whapi de Nuevo México, (usaba) solo tres nombres para distinguir colores. (Note que los dos últimos ejemplos sugieren alguna consecuencia en la manera de *percibir* los objetos).

Nuestra propia cultura occidental contemporánea tiene *muchas* palabras para decir *automóvil*, –lo que contrasta significativamente con la relativa parquedad de vocablos para conceptos declarados como más importantes, como, por ejemplo, *amor* (si bien hay que considerar la natural resistencia de algunos fenómenos a ser traducidos en palabras, y es de notar la acepción extremadamente amplia que puede tomar el último vocablo, por oposición a las muchas y muy finas particiones del anterior)–.

La política

El carácter público de la actividad política, por su parte, permite examinar con facilidad diversas particiones de seres humanos de acuerdo a distintas definiciones, y también la finura diversa de esas particiones conforme al usuario. (Por ejemplo, es inmediato observar cómo en alguna medida se identifican sin más trámite a tendencias de opinión diversas; en particular, que, en cuanto la propia convicción se incline hacia uno de los extremos, disminuya la precisión en el otro).

La vida cotidiana

Los anterior se traduce en realidad en que toda nuestra vida diaria está organizada sobre relaciones de equivalencia.

De compras

Comprar un lápiz –nuevamente– supone una mayor o menor finura en la elección (color, marca, estilo, grosor y/o dureza de la mina; un dibujante utilizará particiones más finas que un alumno de enseñanza básica); pero siempre se adquiere un elemento de una clase de equivalencia (esto es, por ejemplo *cualquier* lápiz de tal marca y denominación).

Adquirir huevos, o manzanas, comporta varias particiones superpuestas, definidas éstas ya sea por el color, el tamaño o el peso.

De viaje

Un viaje entre dos puntos de una ciudad probablemente se puede hacer utilizando varios medios de locomoción, –una clase más o menos grande en la cual elegir–. Consideraciones de tiempo pueden limitar la elección, –digamos, a ciertos recorridos de buses–. Una vez elegida la línea número *n* (o de nombre *Tal*) cualquiera de su elementos será equivalente,

en principio.

La moneda

Una misma cantidad de dinero se paga ya sea en billetes o en monedas, o en mezclas *ad libitum*. (Por supuesto, ni siquiera dos monedas del mismo valor son exactamente iguales).

El intercambio monetario es un ejemplo atinente pero largo de describir.

La familia

Los procesos de distinción-identificación son bastante aparentes al interior de una familia: los familiares hacen particiones más finas entre sus miembros que los extraños –por ejemplo, no confundirán a dos hermanos–; ello contrasta vivamente con el hecho de que una abuela encuentre a su nieto más parecido a su hijo que a su nuera (¡tiene la nariz de Fulanito!).

La música

La expresión *música clásica* variará de sentido según quien la diga. La persona no iniciada tenderá, probablemente, a decir *los valses de Strauss* frente a algo que suene remotamente a música docta; de manera similar, alguien dirá (aún) *música colérica* donde otro dirá *rock-and-roll* y el entendido expresará *power-metal* (la dificultad de este ejemplo está en la pérdida de actualidad de los vocablos: las particiones varían en el tiempo).

Otras ocupaciones

Respecto de un libro, un literato será mucho más riguroso que la media en su estimación –la exigencia de un gramático será un tanto diversa–.

El artista plástico observa aspectos que otros no ven en una pintura.

Observando un combate de boxeo, un especialista verá tal vez una combinación de ocho movimientos que para el resto no es en absoluto aparente.

Un campesino puede llamar a cada caballo por su nombre.

Cuesta –y, en cierto modo, es imposible–, hablar un idioma extranjero.

A nadie le bastará la afirmación de que a un determinado cirujano algunos pacientes se le mueren y otros no; preferirá, seguramente, saber qué porcentaje (es decir, querrá una partición más fina).

Urbanidad

En cuanto a los modales, hablamos precisamente de mayor o menor finura.

Lo que aportan los oficios

Un ejemplo interesante es suponer que una persona entra a un lugar cualquiera –digamos, una sala de clase–: de acuerdo a su oficio, su mirada realizará particiones diversas (por ejemplo, un electricista, un constructor civil, un especialista en salud pública, un ingeniero, un pintor de brocha gorda... advertirán sin esfuerzo, cada uno, aspectos que los otros no percibirán).

Lenguaje y pensamiento

La acumulación de instancias nos indica que en realidad, tanto el lenguaje como el pensamiento mismo están, en cierto modo al menos, estructurados en clases de equivalencia.

Las palabras, nuevamente

En realidad, un sustantivo define una relación de equivalencia en un determinado conjunto; un adjetivo afina la relación: el nombre *perro* define una partición en, digamos, el conjunto de los mamíferos, o bien de los animales domésticos (aquí hacemos referencia al axioma de especificación); *perro boxer* alude a una relación de equivalencia más fina; si su perro boxer se llama *Cephas*, por ejemplo, a ese nivel de finura se ha llegado a la igualdad.

Análisis y síntesis

Siguiendo a Aristóteles, se habría dicho, al respecto: a relación de equivalencia más fina, clases más pequeñas, e inversamente. (La frase escolástica: *a mayor comprensión, menor extensión,* e inversamente).

La Evolución

La propia Evolución nos muestra un diseño que se elige o se manifiesta en relaciones de equivalencia (y la disciplina apropiada descubre y reconoce), esto es, en particiones más o menos finas.

El árbol de la vida

El ejemplo principal es, naturalmente, el del gran *árbol de la vida* en el que cada especie, género, familia, etc., ocupa un lugar, en subdivisiones (es decir, particiones, es decir, relaciones de equivalencia) cada vez más finas.

Orientación

El sentido de la orientación aparece en versiones que van desde bacterias magnetizadas que pueden orientarse solo hacia el norte o hacia el sur –para subir o bajar en el sedimento marino de su hábitat–, hasta el refinado equipamiento de, digamos, una paloma.

Análogos más inmediatos: un niño se contentará con aprender los cuatro puntos cardinales (N, W, E, S), pero un piloto de avión deberá ser mucho más preciso, y la 'rosa de los vientos' $(N, NNE, NE, NEE, E, \ldots)$ ya no alcanza para sus necesidades.

La visión

Consideremos nuevamente el caso de la visión, como sugerencia de lo que pasa con el (numeroso) resto de los otros sentidos:

En los diferentes animales, encontramos un rango que va desde el blanco-y-negro (y tonalidades), hasta otras que incluyen los colores que nosotros distinguimos y aun franjas ultravioleta (como abejas), o infrarrojos (como serpientes del desierto); aparatos visuales que distinguen solo algunos tipos de movimientos, (como el de la rana); visiones tan agudas como las de las aves de rapiña y tan obtusas como la de un topo.

Las relaciones de equivalencia implícitas en los casos anteriores pueden expresarse en términos bastante precisos (por ejemplo, rangos de longitudes de onda). Asimismo, el conjunto total de frecuencias para una especie puede identificarse con claridad (por ejemplo, para el ser humano, están determinadas por el tamaño de *conos* y *bastoncitos*: longitudes de onda más grandes no alcanzan a ser registradas, más pequeña se confunden en la percepción).

Por lo demás, el funcionamiento diario del aparato visual de un ser humano, por ejemplo, muestra desde el casi deliberado ignorar la mayoría de los objetos que caen en el campo de visión hasta la posibilidad de percibir y registrar un pequeño endurecimiento del semblante de alguien situado a varios metros de distancia (lo que puede indicar, por ejemplo, que está enojado).

La percepción

En lo que se refiere a la percepción en general, el sistema nervioso alcanza diversas finuras en diferentes áreas.

Una ilustración bastante sugerente se consigue con un par de tijeras: dos (¡suaves!) punciones simultáneas separadas por una pulgada serán percibidas como una sola en la espalda, pero como diferentes en el brazo; se puede achicar la amplitud de la tijera hasta que el brazo perciba solo una punción y la yema del dedo, dos; amplitudes muy pequeñas confunden las punciones en el dedo pero son discernibles, aún, en la lengua.

Podemos también observar nuestra evolución personal en el uso de nuestros aparatos sensoriales: nuestro actual sentido del gusto es menos fino del que tuvimos en la infancia, tal vez por entrenamiento en un reducido número de direcciones.

El ámbito personal

De lo que llevamos dicho surge con fuerza la conveniencia o más bien necesidad, para cualquiera, de contar con relaciones de equivalencia apropiadas, en una gran variedad de ámbitos de la actividad humana.

Reacciones

El convencimiento propio acerca de esta cuestión se manifiesta en la calidad de nuestra reacción ante la presión aun implícita para trabajar o pensar con relaciones de equivalencia que no nos son aceptables. Tales reacciones son fáciles de percibir. Imagine la suya al leer alguna de las frases siguientes (las dos primeras fueron tomadas de letreros en la calle; las otras, más corrientes, podrían también ser menos problemáticas): *comunismo = esclavitud; capitalismo = fascismo; si no es blanco, es negro; ¡da lo mismo!* (para mejor puesta en escena, imagine que a usted *no* le da lo mismo, y, para inspiración adicional, que está en medio de una discusión acalorada).

Si no es blanco, es negro

Nuestra opinión atribuye a otros una variedad de categorías que va desde estar desprovistos de matices hasta quedarse en los detalles. No saber de qué se habla indica usar clases de equivalencia insuficientemente subdivididas; por el contrario, una persona de criterio cambia las particiones con rapidez y oportunidad.

Las competencias

Desde el punto de vista profesional, o social, es interesante considerar que tal vez uno ocupa un lugar de acuerdo a la colección de relaciones de equivalencia que maneja. Compare, en una empresa, el caso de un gerente con el de una persona encargada del aseo.

El experto.

Para quien cultiva una disciplina, en lo que respecta a la finura relativa de las relaciones de equivalencia que usa, hay consecuencias más cotidianas que lo señalado hasta ahora.

Precisión y soltura

Es claro que una mayor capacidad de precisión lingüística en una determinada disciplina está anexa a un conocimiento más elaborado. Hay, de todas maneras, una cierta sutileza de concepto que no siempre se expresa y es más bien un entendido de los ’iniciados’, y que puede aparecer como contradictoria: por ejemplo, un especialista en nutrición dirá a menudo *harinas* donde el neófito preferirá *farináceo*.

General y particular

La necesidad de considerar a la vez los aspectos particulares y generales de una cuestión se expresa claramente cuando corresponde preparar o bien hacer un juicio crítico de una obra especializada (por ejemplo, una memoria, una exposición).

Legos y entendidos

El lenguaje habitual recoge el aspecto anterior de diversas maneras: la palabra *experiencia* suele entenderse como mera acumulación de datos; el término *experto* alude invariablemente a un bagaje de conocimientos estructurado. Pero la mayor diferencia entre el lego y el entendido consiste en que este último no queda atrapado en una determinada partición y puede transitar libremente ya sea afinando o bien engrosando las relaciones de equivalencia que ocupa, o cambiándolas si es preciso; ese tránsito es su privilegio, fruto de su conocimiento acabado.

Frente a un problema concreto, un verdadero experto será capaz no solo de sintonizar con la partición apropiada, sino que podrá manejar la situación en ese nivel. Este aspecto se hace manifiesto, por ejemplo, al comparar las distintas lecturas que se puede hacer sobre un mismo documento, en mayor o menor profundidad –y de acuerdo a la *expertise* del lector–.

La mirada

Desde la perspectiva que venimos desarrollando, lo que ocurre es que, cada quien y en diversas áreas, construye permanentemente, de acuerdo a su estudio, reflexión, ocupación y experiencia, una *mirada*, un cierto criterio que va armando con la correcta incorporación de cada pieza de conocimiento en la amplitud o finura que le corresponde, proceso que necesita también de su activa participación personal.

(Insistencia) Al ingresar a un recinto habitado, las *miradas* profesionales de, digamos, un arquitecto, un constructor civil, un pintor de brocha gorda, un especialista en salud

pública, un sociólogo, se configuran de manera diversa, advierten detalles o incluso estructuras que no son inmediatamente perceptibles a otros.

La multi-disciplina.

Lo uno y lo múltiple

El trabajo interdisciplinario puede beneficiarse grandemente de una buena inteligencia de lo que venimos exponiendo, lo que resulta relevante dado el requerimiento de trabajo multi o interdisciplinario se hace día a día más ubicuo.

La aspiración de la corriente filosófica neopositivista de comienzos del siglo XX, de encontrar un lenguaje único para toda la ciencia, ha dejado paso a una visión más modesta pero también más comprensiva, y que considera la necesidad de abordar los diversos fenómenos en una multiplicidad de maneras.

Los desencuentros

Sin embargo, ocurre que esta diversidad de lenguajes, de conceptuaciones, de miradas –de relaciones de equivalencia, en suma–, no es enteramente aparente y puede ser fuente de desencuentros. El siguiente ejemplo es una sugerencia acerca de este fenómeno.

Lenguajes diversos

Tomemos la expresión *hace poco tiempo*. La frase no tiene mayor complejidad, cada vocablo nos es familiar.

Consideremos, sin embargo, cómo se la estimaría al interior de distintas disciplinas: para un periodista, significa tal vez unos cuantos meses; un historiador pensará en unas decenas de años; un arqueólogo dirá *solo* unos cuantos siglos; para un paleontólogo significará, probablemente, *solo* algunos cientos de miles de años; para un geólogo, posiblemente unas cuantas decenas de millones de años; un cosmólogo dirá, tal vez, *solo* algunos cientos de millones de años.

Las relaciones

Una reflexión sobre esta línea de pensamiento sugiere que la posibilidad real de hacer trabajo multidisciplinario se juega precisamente en la capacidad de afinar o engrosar las relaciones de equivalencia que ocupamos, más allá de los límites de la propia especialidad, a una virtual tierra de nadie en la que no hay especialista autorizado.

Los árboles, el bosque.

En lontananza

Imagine que ud. viene en barco, acercándose al puerto de Valparaíso, en Chile. Acodado(a) en una baranda más o menos virtual, usted percibe, como se dice en estos casos, en lontananza, un punto que, alguien le informa, es Valparaíso. El punto se agranda hasta que usted distingue, por sí mismo(a), que se trata, efectivamente, de su querido puerto. Entonces comienza nuestro ejercicio:

Hay primero una percepción del todo, como tal, sin partición (*'el bosque'*). La relación de equivalencia es la menos fina posible. Solo es Valparaíso, como un todo: la partición es $\{V\}$.

Los contornos

Conforme se avanza, empiezan a parecer los contornos y, si somos suficientemente entusiastas –en beneficio de la explicación, por ejemplo–, podremos distinguir los diferentes cerros característicos del puerto, $C_1, C_2, \ldots, C_n$, y el plan P. Lo que percibimos es, entonces, el cociente (la partición) $\{P, C_1, C_2, \ldots, C_n\}$.

Más adelante, ya se distinguen manchones de árboles, conjuntos de edificios: una nueva partición.

Asumamos, (nuevamente), que llega un momento en que se distingue el contorno de cada edificio y cada casa. Nuestra partición es ahora considerablemente más fina.

Los objetos

El barco avanza, ya distinguimos las personas; más adelante, los rasgos de alguien que

espera en el muelle...

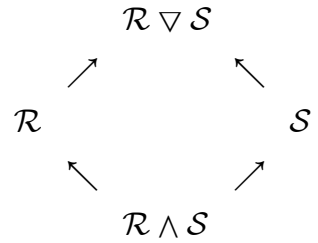
El ejercicio se puede prolongar de manera un tanto hipotética, descomponiendo cada vez lo que percibimos como unidad en componentes más finas: una clase se subdivide, un elemento se convierte en conjunto de partes. Así podemos seguir, digamos, descomponiendo los seres vivientes en sus diferentes aparatos y órganos, y a todos en moléculas, átomos, partículas elementales, quarks...

El orden total

La anterior es una descripción de cómo se puede refinar sucesivamente una relación de equivalencia; ello no obstante, hay que advertir que no es, realmente, ése, necesariamente el proceso, pues la descripción peca de excesivamente restringida: ella expresa un fenómeno análogo al que ocurriría si tomamos un microscopio y vamos cambiando sucesivamente las lentes por otras de mayor poder de ampliación: se trataría de un orden total.

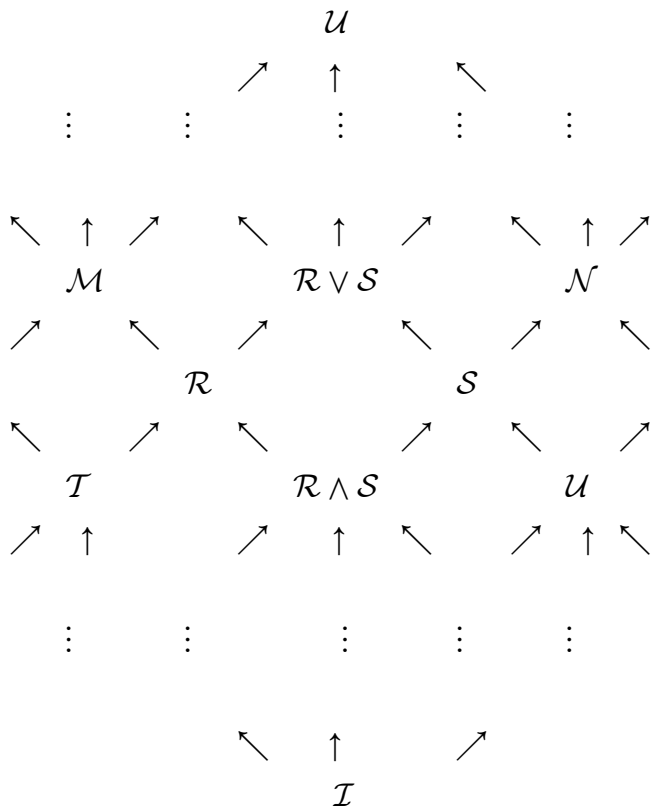
Los órdenes filtrantes

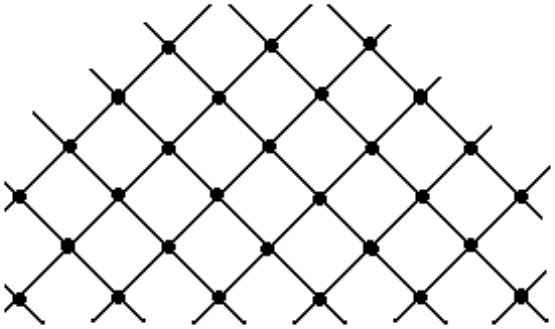
Una manera más apropiada de expresar lo que ocurre es vía los órdens filtrantes. Comenzamos por el diagrama de Hasse



donde $\mathcal{R} \bigtriangledown \mathcal{S}$ denota la más fina entre las relaciones de equivalencia que son a la vez menos finas que $\mathcal{R}$ y que $\mathcal{S}$.

Las miradas se estructuran, en realidad, según un diagrama más complejo que el de un orden total, a la manera de





Retículo de miradas

en la cual $\mathcal{U}$ es la relación menos fina, que no hace distinción alguna, e $\mathcal{I}$ es la más fina, que no hace, ninguna, identificación.

En realidad, lo que ocurre, en general, es que, sobre un mismo objeto o colección de objetos se superpone una cantidad de miradas diferentes, que significan maneras distintas de aproximarse, de particionar el objeto.

El proceso de acercamiento que describimos arriba corresponde simplemente a elegir un camino descendente dentro del retículo que hemos dibujado: en cualquier instante en que no estemos en los bordes de la estructura que contiene todas las posibles particiones (es decir, no utilizando la identidad ni la ausencia de discernimiento), la partición que estamos ocupando se nos aparece como precedida de otras menos finas y seguida de otras más finas.

Cuando hablamos de árboles y bosque, o de análisis y síntesis, es a esta situación que nos referimos.

Summa del conocimiento

Ubicación en el todo

Siguiendo la línea de pensamiento de la sección anterior, se observa que las diferentes disciplinas constituyen, como se sabe, un mosaico de diversas particiones, algunas imbricadas, otras superpuestas, fenómeno que se repite con las diversas teorías al interior de cada una.

Una correcta inteligencia de este fenómeno permite tener una conciencia apropiada del puesto que cada quien ocupa en la búsqueda de conocimiento y por tanto una cierta liberación de la servidumbre que significa sentirse cada vez más apartado, en los extramuros de otras corrientes de pensamiento, o mudo ante reflexiones más generales –o más particulares–.

Mayor nitidez

En cierto modo, el proceso del conocimiento acontece al modo en que una suerte de intuición primaria, una visión un tanto amorfa, sufre un proceso de *'nitidización*, que permite la comprensión y con ello el uso para el desarrollo, pero también para la contemplación.

Finuras de las disciplinas

Tanto la Matemática como las ciencias y la tecnología contienen miradas de finura extrema que les permiten obtener resultados de diversa naturaleza: vagas descripciones iniciales terminan por ser reemplazadas por formulaciones a veces ni siquiera imaginables al comienzo, pero considerablemente más precisas –y, en principio, inaccesibles al lego–.

Habitar el mundo contemporáneo

Así, la suma del conocimiento acerca la posibilidad de habitar el mundo contemporáneo, tarea que supone una dificultad mucho mayor que en el pasado: en un

sentido, estamos obligados a hacer precisiones antes no vislumbradas; en el otro, conseguir una mirada personal realmente integradora de las áreas del conocimiento es virtualmente imposible.

El arte

Aunque sea de manera incompetente, nos parece necesario agregar una última precisión:

La unicidad de cada obra de arte manifiesta que es solo la identidad la relación de equivalencia que utilizamos al apreciarla. (Ello no logra evitar que luego la mente agrupe ciertos aspectos y trate de organizar el conjunto de tales obras en clases: de diferentes artes, tendencias, períodos, etc.).

Equivalencia y orden

Ilustramos aquí lo que, en términos abstractos, reseñamos en 2.3.2.

Orden en equivalencia

Es bastante frecuente que se trate de establecer un orden en un conjunto y se termine haciendo un orden entre clases de equivalencia dentro del conjunto.

Los siguientes ejemplos indican lo habitual del proceso.

¡A formarse!

Tomemos el frecuente y simple caso de formarse los alumnos –en el colegio– en fila, por orden de estatura.

Es bien posible que algunos alumnos tengan la misma estatura (digamos, en cm.). Es claro, entonces, que si la estatura de x es la misma que la de y, ellos podrán situarse en el orden (x,y) o bien en el (y,x). Si hay tres alumnos de igual estatura, ellos pueden situarse, entre sí, de 6 maneras distintas. De esta forma, la relación de orden necesaria para formarse por orden de estatura no está hecha sobre el conjunto A de los alumnos, sino sobre una partición de A en clases de equivalencia (la relación de equivalencia en este caso es, precisamente, $x\mathcal{R}y$ si y solo si x tiene la misma estatura que y, en centímetros).

Otras formaciones

Algo análogo sucede al querer ordenar un conjunto de objetos según el peso.

Podemos intentar ordenar según el volumen, etc., etc.

En otras palabras, suele ocurrir que se declare primero qué objetos se considerará equivalentes (iguales) y luego se establezca una relación de orden, ya no entre los objetos primitivos sino entre clases de equivalencia de objetos. (Tales son, por ejemplo, los casos de la definición del orden en los diferentes sistemas numéricos).

Equivalencia en orden

En el otro sentido, se considera a veces un conjunto ordenado y se define una relación de equivalencia a partir del orden dado.

Esto ocurre hasta de manera inopinada; por ejemplo, cuando se separa a los mayores de los menores en una fiesta y se discrimina a los segundos sentándolos en una mesa aparte. Pero veamos un ejemplo menos traumático:

Cuando se separa huevos, o manzanas, para la venta, en realidad se los considera ordenados, según el peso (por ejemplo).

La máquina que hace la separación tiene un sistema de soportes que ceden frente según el peso. Es claro que tales soportes están ordenados de mayor a menor (para que caigan primero las más pesadas), pero lo interesante es que el soporte no cede solo frente a un determinado peso p, y lo que importan son clases de equivalencia de pesos: dos manzanas x,y de pesos p_x,p_y caen en el mismo soporte si x,y pertenecen a un determinado rango de peso, digamos, $p_1 \leq p_x \leq p_2; p_1 \leq p_y \leq p_2$ (Claro, los pesos posibles de manzanas son acotados: desde 0 gr. hasta unos 5 kgr. bastaría).

Equivalencias y órdenes iterados

Es bastante obvio que se suele definir relaciones de equivalencia sobre clases de

equivalencia. (Ya hemos considerado algunas, la más importante de las cuales es un teorema de isomorfismo).

De análoga manera, es también frecuente que se defina órdenes al interior de conjuntos ordenados.

En realidad, lo anterior no presenta ninguna sorpresa: se trata de obtener una relación de equivalencia menos fina que otra, un orden menos fino que otro.

El diario vivir

La simultaneidad de relaciones de equivalencia y relaciones de orden aparece en el habla habitual, –por ejemplo, en una discusión–, en términos fácilmente identificables, como sugerimos a continuación:

Considere las siguientes expresiones:

esto es igual a eso, indica que se ignora las diferencias que pueda haber y se establece, por tanto, una relación de equivalencia;

esto no importa define aún una relación de equivalencia: se junta en una clase aquello a lo que no se atribuye valor;

esto es menos importante que eso otro o *menos relevante,* o bien *esto es más barato que eso* definen sendas relaciones de orden (la última en un conjunto cociente, de acuerdo a nuestra discusion preliminar).

En otras ocasiones, las relaciones están más veladas: *no me hablen de eso* expresa claramente que el asunto está en una clase de equivalencia descartada; hay también juicios de valor implícitos sobre las variables que se ocupa.

Que uno elige, hasta donde le es posible, las relaciones de equivalencia que usa, queda de manifiesto, por ejemplo, en el caso de la suegra que vimos más arriba.

Algunas evidencias

Durante algunos años, hemos propuesto a distintas cohortes de nuestros estudiantes, como tema de reflexión, las relaciones de equivalencia y las particiones.

Les hemos explicado cada vez ambos conceptos, el teorema RE/P (restringido), los conceptos de mayor o menor finura de un par de relaciones de equivalencia, y los operadores $(\mathcal{R},\mathcal{S})\mapsto\ \mathcal{R}\wedge\mathcal{S}, (\mathcal{R},\mathcal{S})\mapsto\ \mathcal{R}\vee\mathcal{S}$

Los futuros pedagogos

Los futuros pedagogos encuentran interesante el tema, y que les ofrece una oportunidad de contextualizar –cosa que solicitan a menudo–.

Si se les da instrucciones para emplear la conceptuación explicada en diversos ámbitos: oficios, actividades, clases, desplazamiento hacia la universidad, revisión de trabajos de otros. Sin excepciones, esos alumnos presentan trabajos en los cuales la susodicha conceptuación a la vez se emplea y resulta clarificadora para el análisis.

El tema representa para ellos una fuente inexhaustible de relación entre sus estudios de Matemáticas, sus necesidades pedagógicas –o, más bien, didácticas– y su vida cotidiana.

Estudiantes de Arquitectura

A estudiantes de la etapa final del currículo de Arquitectura, de media docena de generaciones, se les ha solicitado escribir ensayos acerca de la presencia de las relaciones de equivalencia (y las particiones) en su labor de estudiantes y en otros ámbitos.

Ellos respondieron, usando las categorías descritas arriba (incluso, orden en equivalencia), para los siguientes casos, escogidos por ellos mismos:

- la mirada a los diversos ámbitos (público, privado, etc.);
  la ciudad, diversas escalas de aproximación a ella;
  el espacio y la luz;
- quebradas y puntos cardinales;
  dependencias del sector donde se emplazará la obra;

viviendas sociales;
barrios de alta densidad;
asentamientos precarios;

- sus propios proyecto arquitectónicos;
  tipos de materiales; instrumentos de trabajo;
  planos y maquetas;
  calificaciones de los profesores;
- estadios, piscinas, salas de juegos, saunas, camarines, graderías;
- techos, puertas, atrios y balcones;
  niveles en piscinas de natación, ubicación de los usuarios;
- edificios;
  departamentos de un edificio;
  piezas de una casa;
- el discurso, la música;
  refinamiento de la mirada;
- casa para personas que cultivan un oficio determinados (músico, e. g.);
  ocupaciones y estados civiles de los futuros usuarios de los proyectos;
- etcétera.

Epílogo

Un estudio epistemológico

Hemos llamado a este trabajo “Estudio Epistemológico del teorema del isomorfismo”.

El estudio

Hemos elegido el vocablo estudio por su acepción etimológica, *studium*, de *análisis*, *indagación*, *investigación*, y de aplicación, diligencia o incluso entusiasmo (de la mente a la adquisición del conocimiento).

La epistemología

El término epistemología es, como sabemos, más complejo.

James F. Ferrier, en 1856, lo fabricó con las raíces *episteme, conocimiento*, *ciencia* y *logos*,*conocimiento*, *información*: conocimiento, pues, acerca del conocimiento –teoría del conocimiento– y, como tal, parte de la filosofía.

La palabra epistemología nace, entonces, tensionada por las teorías del conocimiento hasta entonces conocidas: el racionalismo (Platón, Descartes, Leibniz et alia) y el empiricismo (Francis Bacon, Berkeley, Hume).

Lo anterior podría parecer alejado de nuestras preocupaciones necesarias, pero tiene, sin embargo, consecuencias teóricas y prácticas de importancia para nuestro trabajo. Sugerimos una a continuación, mencionamos otra más abajo.

El gran y polémico matemático Jean Dieudonné nos da una primera muestra de la importancia del tema anterior para el trabajo didáctico, cuando dice:

“Espero que se me crea si añado que no tengo ningún interés personal en estos temas de la enseñanza secundaria ... yo sólo he querido dejar para el historiador del futuro un ejemplo de lo que se podría hacer en este ámbito si se quisiera actuar de manera racional". (Dieudonné, 1964, xi).

Ahora bien, y según hemos explicitado en el cuerpo de este escrito, en el ámbito de la matemática educativa, el término epistemología toma acepciones un tanto distintas.

Para nuestro estudio, hemos utilizamos esa palabra en su sentido histórico –aun cuando

no idéntico con la historia–, en su dimensión cognitiva –epistemología genética à la Piaget y, aún, descomposición genética de Dubinsky y RUMEC– y en su acepción primordial propiamente matemática –frecuente en expresiones tales como ’obstáculo epistemológico’–.

En cualquier caso, estamos de acuerdo con Dorier (2000, p. 10): la epistemología (en esa acepción amplia, agregamos) es un término mediador, que conecta el trabajo histórico y la labor didáctica.

Las varias facetas

Hemos examinado, pues, el teorema del isomorfismo en sus distintas facetas: la puramente formal, matemática; el aspecto cognitivo, su desarrollo histórico…

Aspecto cognitivo

El centro de este estudio ha sido la propuesta que hacemos, basada en nuestras evidencias, acerca de cómo el estudiante construiría el teorema del isomorfismo: una *descomposición genética*. Para ello, hemos hurgado en la literatura ad hoc y procurado mostrar lo que, en nuestra perspectiva, son fortalezas y debilidades de lo que el grupo RUMEC y otros autores han aportado acerca de los aspectos cognitivos de los conceptos matemáticos involucrados –subgrupo normal, grupo cociente, isomorfismo (no conocemos trabajos cognitivos explícitos acerca del teorema del isomorfismo)–.

Desde nuestra perspectiva, un estudio cognitivo serio de un concepto o de un resultado matemático demanda un conocimiento de profundidad y amplitud suficientes acerca de aquellos. Este, por supuesto, requiere de la comprensión de la teoría en la cual el concepto o resultado se inscribe –para apreciar su estatus teórico, diría tal vez Duval (1995, cap. 5)–, pero nos parece también deseable que se conozca el entorno matemático mediato –la teoría matemática formal, por supuesto, cobra para uno mayor sentido al situarla en el desarrollo general de la disciplina–.

El marco histórico

De tal manera, hay motivos tanto de orden cognitivo como puramente formales para afirmar que las consideraciones de orden histórico no pueden estar ausentes en un estudio de esta naturaleza. En realidad, la Matemática se desarrolla históricamente de una manera muy diferente a la presentación axiomática que se suele hacer de ella –lo que es particularmente notorio en el álgebra abstracta–, lo cual tiende a alejar al estudiante de formas naturales de acceso a los objetos bajo estudio.

Por cierto, pretender reproducir la historia en la enseñanza es bastante ingenuo (por razones tanto teóricas como lingüísticas, cognitivas y simplemente prácticas), pero situar una materia –particularmente, si se barrunta que no presenta un acceso fácil y/o si la motivación teórica o práctica no es cercana– puede permitir al enseñante no solo ofrecer introducciones apropiadas, sino también, como hemos señalado expresamente para nuestro tema, una mejor comprensión de las dificultades que los estudiantes pueden enfrentar.

En este caso, hemos extendido ese estudio histórico de una manera decidida, resistiéndonos a quedarnos en su sola creación, y prolongándolo, por el contrario, de manera de situarlo en el ámbito más amplio y preciso en que se lo puede ubicar en la matemática contemporánea.

Nos parece que el cuidado que hemos tenido respecto del aspecto histórico –esto es, buscar los antecedentes del teorema del isomorfismo, detenernos momentáneamente en el momento de su aparición, seguir su desarrollo ulterior hasta precisar su ubicación precisa y abstracta en la matemática contemporánea– es muy saludable; incluso, en algunos casos, necesario.

La claridad matemática

Es de suyo indispensable que un estudio didáctico tenga claridad en la materia que trata.

Una consideración general que conviene hacer, al respecto, es que, como bien sabemos, la matemática (piedra de tope de cualquier bibliotecólogo) cambia, se reestructura, y los diversos resultados van ya sea adquiriendo o más bien perdiendo relevancia, al ser incluidos en otros ámbitos, bien sean estos distintos o simplemente más amplios.

El atraso en la enseñanza

Al respecto, la historia de la enseñanza de la matemática nos muestra profusión de ejemplos de materias que van quedando ancladas en textos y currículos en formas que no son ya apropiadas para los usos del momento. Tales son por ejemplo, la manera y la extensión, inapropiadas para estudiantes de diversas especialidades, en que se suele enseñar geometría analítica o trigonometría. En una época pretérita, el tratamiento algebraico de identidades y ecuaciones fue mucho más relevante que en la actualidad (globalización, trabajo en equipo y tecnologías de la información y la comunicación son algunos de los aspectos que cabría invocar para mostrar lo inapropiado de la situación, al respecto), y hoy el énfasis excesivo que se les suele dar es no solo anacrónico sino también contraproducente –pues distrae al estudiante de los temas geométricos para los cuales se requiere la trigonometría–.

Un ejemplo más impactante y, nos parece, olvidado en demasía, es el del atraso considerable de la matemática escolar desde 1880 hasta 1960. Ya en 1908 el Congreso Internacional de Matemáticos, ICM, creó ICME, la Comisión Internacional de Enseñanza de la Matemática, debido precisamente a la preocupación de los matemáticos por el estancamiento de la enseñanza, en todos los niveles –tanto los grandes teoremas de Cantor como el omnipresente libro de Hall y Knight (1952) datan precisamente de la década 1880-1890–. La verdadera calamidad en que esto desembocó –el fracaso global de las llamadas Matemáticas Modernas– más de medio siglo más tarde, está bien reportada en Fehr, Camp & Kellog (1971).

El cambio de paradigma

Es fácil encontrar alguna variación de la frase de Dieudonné que mencionamos arriba en los círculos matemáticos.

Se puede argumentar en contrario, por cierto y de manera contundente, diciendo que pensar de tal manera es retrotraer la ciencia a su concepción aristotélica, previa a Galileo, Francis Bacon y Newton: un paradigma que ya ha sido suficientemente descartado. Sin embargo, parece más apropiado, al respecto, exhibir esa evidencia empírica incontrastable acerca de las matemáticas modernas en la enseñanza media.

Así pues, y a pesar de nuestra consciencia de que el ámbito de irradiación del teorema del isomorfismo en los currículos es más bien limitado, nos parece que la vigilancia histórica que hemos incluido en el trabajo es apropiada, para situarlo, como decíamos, en un entorno matemático contemporáneo y desde el cual se pueda apreciar su relevancia y permanencia.

La vigilancia histórica

Ese afán de entender y situar bien el teorema nos ha llevado además a enunciar y demostrar tanto el teorema como una decena de importantes resultados adicionales que le acompañan y que no se encuentran en la literatura matemática.

La justedad de este afán queda de manifiesto en un subproducto que a la postre adquiere una relevancia eminente: el teorema y varios otros que le acompañan son considerablemente más generales que la presentación que de ellos se hace en los textos –bien sean de estudio o propiamente teóricos–, y el desmontar nuestro teorema (y, también, los que le acompañan) en una versión conjuntística y otra propiamente algebraica, con estructura, abre, per se, una nueva aproximación cognitiva y didáctica al respecto.

Un enfoque distinto

Un sustrato no formal

Ahora bien, esa versión conjuntística, precisamente por su mayor generalidad, está más cercana a categorías habituales del pensamiento corriente, y, más allá del empeño que se suele encontrar en contextualizar conceptos y resultados matemáticos, esta perspectiva nos regala un sustrato de carácter no formal del cual el aprendizaje y la enseñanza de sus componentes y del propio teorema se pueden nutrir.

(De hecho, es posible dar un paso más y comprobar la abundancia de los usos del teorema del isomorfismo y de algunos de sus corolarios en la vida diaria, cuestión en la que no nos hemos detenido).

En nuestro estudio dijimos, conforme a los usos habituales en el marco teórico empleado, que pensamos que el teorema matemático que denominamos RE/P, tan relevante para nuestro teorema (y tan similar a él), se apoya fuertemente en nociones ingenuas, no conscientes y espontáneamente aprehendidas, del mismo.

Construcción y difusión del saber matemático

Por supuesto, lo anterior obedece a una concepción de la matemática que se circunscribe a lo que habitualmente se llama “saber sabio” (*savoir savant*): lo que los matemáticos generan, desarrollan y organizan en sus trabajos de diversa índole.

Ahora bien, cuando Brousseau declara que la didáctica de la matemática se encarga de la producción y difusión de la Matemática, se diría que se refiere a la construcción tanto de la matemática escolar (*savoir enseigné*) como a la que hacen los niños según la aproximación constructivista.

Ha habido y hay, sin embargo, lecturas diversas o posturas un tanto divergentes acerca de esa construcción (o producción, o reconstrucción).

Bruno D’Amore, Vicenç Font y Juan D. Godino (2007, p. 49) extienden un tanto la concepción implícita en lo anterior al referirse a "la construcción social del conocimiento matemático"; el aprendizaje matemático "está condicionado por diversos metaconocimientos matemáticos y didácticos".

Josep Gascón, por su parte, añade que diferenciar entre hacer matemáticas y enseñar matemáticas es uno de “cuatro ‘Dogmas’ que configuran la ilusión de trivialidad en Educación Matemática". (Gascón, 2010; Cf. también Gascón, 1998, pp. 11-12).

Esto ha sido llevado más lejos, en relación no solo con la enseñanza, sino con la naturaleza de los objetos matemáticos.

En efecto, la Socioepistemología, desde una perspectiva prágmática y expresamente opuesta al realismo, “plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión” (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006, p. 86), y cuestiona explícitamente no solo la noción de que la matemática sea ‘lo que hacen los matemáticos’ sino también la naturaleza de los objetos matemáticos y sitúa el origen de la disciplina en las “prácticas sociales” (Ibíd. P. 85; Cordero, 2001; para un caso explícito, ver Cordero, 2003, p. 77).

Práctica de las relaciones de equivalencia

En el capítulo anterior abundamos en una descripción acerca de la presencia de las relaciones de equivalencia no solo en la Matemática, sino también en el diario vivir; a ello lo hemos llamado "la práctica de las relaciones de equivalencia".

La ’práctica social’

Por su parte, la discusión anterior acerca de la construcción del conocimiento matemático, que se aparta un tanto de nuestro estudio, ha sido traída a colación por su relevancia para aquilatar lo que hemos llamado ’la práctica de las relaciones de equivalencia’.

Desde el punto de vista socioepistemológico, esa práctica no es, propiamente, una

práctica social, vocablo reservado (en particular, en el caso de las prácticas institucionales), para “aquello que norma esa actividad” (Cantoral et al., 2006, p. 85).

Ahora bien, hurgando en lo que podría ser ’aquello que norma’ –una raíz más profunda de la actividad misma– parece interesante reparar en qué es aquello que hace que algo *se declare* equivalente a otro.

Los elaborados y variados rituales asociados al trueque en diferentes culturas son bastante expresivos en ese sentido, y están suficientemente reportados: lo que se procura es un trato que se pueda considerar, justamente, *equitativo* (de *aequĭtas, arquitātis*: que tiene equidad), no por nada emparentado con el término *equivalente* –que vale igual–.

Siguiendo esa (hipotética) línea de pensamiento, parece apropiado mirar en esa dirección, y reparar en el afán de procura de equidad, cuyos logros y cuyos tropiezos tan ampliamente reportan la Antropología cultural, la Historia, la Economía, el Derecho, y que se expresa también en amplios ámbitos de la Filosofía (Ética y Filosofía del Derecho, e. g.) y, por supuesto, en el lenguaje: ese afán ha producido no solo conocimiento, sino también beneficios inmediatos para los seres humanos.

La expresión de la práctica

Cómo se expresa aquella práctica a la que nosotros aludimos fue el tema del capítulo anterior, y, en la vida diaria, se puede pesquisar incluso en nuestro teorema RE/P, de conexiones tan profundas, reiteramos, con nuestro teorema del isomorfismo.

Una manera inmediata es reparar en el uso de nombres sustantivos y adjetivos: las relaciones de equivalencia aparecen en la definición de los objetos (*esto es un perro*, o, si se prefiere, *x e y son perros si y solo si*…) y las particiones en las colecciones de objetos (*estos son los perros* y estosn otros no, o bien *esta es la clase de los perros...*).

Cualquiera sea el caso, podemos decir que la fundamentación teórica que hemos procurado dar a nuestro estudio –y la riqueza que consideramos que tienen el esquema del teorema del isomorfismo y sus componentes– posee raíces en la vida diaria, y que el examen de esas raíces puede prolongarse hacia las profundidades a las cuales nos lleve nuestra inclinación filosófica.

De todas maneras, las relaciones de equivalencia, a la vez en su acepción matemática teórica y en su noción de la vida diaria nos parecen fundamentales en la elaboración de una propuesta de enseñanza del teorema del isomorfismo. Más aún, nos parecen fundamentales en el estudio de la Matemática, y su rol debería crecer en el currículo.

Desarrollo ulterior del trabajo

Nos proponemos, como trabajo posterior, desarrollar un estudio más amplio acerca de los teoremas del isomorfismo, incluyendo otros que hemos explicitado y, en particular, el teorema fundamental del homomorfismo, del cual el que nos ha interesado en este escrito es una consecuencia inmediata y, osamos decir, “trivial”.

Ahora bien, –y siguiendo la razón que da Michael Spivak (1971) para calificar así al teorema de Stokes– esa trivialidad del teorema del isomorfismo tiene un precio cognitivo perceptible, y sería en extremo interesante poder juzgar cuál orden de presentación será una estrategia más apropiada.

A favor de presentar primero el teorema fundamental está la organización matemática, pero, por otra parte, una hipótesis razonable es que resulta más accesible el teorema del isomorfismo.

De todas maneras, parece en principio válido hacerse la pregunta en una perspectiva que considere de manera crítica la presencia en el currículo de teoremas acerca de los cuales se puede decir con tanta claridad que los alumnos no los comprenden ni aprenden a manejarlos. Una hipótesis adicional, dudosa pero plausible, es que llevar el estudio al grado mayor de abstracción del teorema fundamental consiga que quienes construyan un esquema

coherente de este último puedan aplicarlo al teorema del isomorfismo, y que ello a su vez les sirva para hacer las aplicaciones de este último que se ha tenido en mente para incluirlo en el currículo.

Tal estudio, que pensamos emprender de inmediato, prolongará naturalmente al presente y lo incluirá en un ámbito más comprensivo. Allí incluiremos con mayor detalle las evidencias que hemos encontrado sobre esos y los otros teoremas que hemos presentado) y otras que deberemos procurar.

Referencias

Albert, A. (1937). *Modern Higher Algebra.* Chicago: The University of Chicago Press.

Alexandrov, P. S. (1981). In Memory of Emmy Noether. In J. W. Brewer & M. K. Smith, *Emmy Noether: A Tribute to Her Life and Work*, New York: Marcel Dekker, pp. 99-111.

Alhfors, L. V. (1966). *Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill.

Artin, E. (1955). *Modern Higher Algebra, Galois Theory*. New York: New York University.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education,* II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. & Oktaç, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. *Journal of Mathematical Behavior* 16 (3), 241-309.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E. & Lewin, P. (1988). Computer experiences in learning composition of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(3), 246-259.

Ayres, Frank. (1969). *Teoría y problemas de álgebra moderna*. Ciudad de México: Mac Graw-Hill.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Presses Universitaires de France.

Bell, E. T. (1945). *The Development of Mathematics*. New York: McGraw Hill.

Bell, E. T. (1996). *Historia de la Matemática.* México. Fondo de Cultura Económica.

Beth, W, E., Mays, W & Piaget, J (1957). *Epistémologie génétique et recherche psychologique. Etude d'Epistémologie génétique, I*. Paris: Presses Universitaires de France.

Betti, E. (1852). Sulla rizoluzione delle equazioni algebriche. *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* 3, 49-115. Opere Matematiche. U. Hoepli, (Ed.). Vol 1, pp. 31-80. Milan: R. Academia dei Lincei.

Birkhoff, G. & Mac Lane, S. (1941). *A survey of modern algebra*. New York: MacMillan. Versión en español: 1954, Barcelona: Vicens-Vives.

Bishop, A. J. (1989). *Mathematics Enculturation*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Boyer, C. B. (1985). *A History of Mathematics.* (Revised edition). Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Bourbaki, N. (1939-1998). *Éléments de mathématique*, 10 vols. (Algèbre, 1973). Paris: Hermann.

Bourbaki, N. (1960). *Éléments d'Histoire de la Mathématique*. Paris: Hermann.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23(3), 247-285.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.

Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups and subgroups. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(3), 187-239.

Brunner, J. (1964). *The process of education*, Cambridge: Harvard University Press.

Bruter, C. P. (2000). *La construction des nombres, histoire et épistémologie*. Paris: IREM.

Burnside, W. (1897). *Theory of groups of finite order*. Cambridge: Cambridge University Press.

Burris, S. & Sankappavanar, H. P. (1981). *A Course in Universal Algebra*. New York: Springer.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. & Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número Especial, 83-102.

Cordero, F. (2003) Lo social en el conocimiento matemático: los argumentos y la reconstrucción de significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Clame (16)1, 73-78.

Cayley, A. (1845). On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. Brice Bronwin; and on quaternions. *Philosophical Magazine,* 26, 210-213. Collected Mathematical Papers, 1889, Cambridge: University Press.

Cayley, A. (1854). On the Theory of groups as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$. *Philosophical Magazine,* 7, 40-47.

Cayley, A. (1878). The theory of groups; Graphical representations. *American Journal of Mathematics*, Vol. 10, 403-405.

Chandler, B. & Magnus, W. (1982). *The history of combinatorial group theory: A case study in the history of ideas*. New York: Springer Verlag.

Chevallard, I. (1991). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Paris: La Pensée Sauvage.

Clark, J., De Vries, D., Hemenway, C., St. John, D., Tolia, G. & Vakil, R. (1997). An Investigation of students' understanding of Abstract Algebra (binary operations, groups and subgroups) and the use of abstract structures to build other structures (through cosets, normality and quotient groups). *Journal of Mathematical Behavior,* 16(3), 181-186.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (4) 2, 103-128.

Corry, L. (1992). Nicolas Bourbaki and the concept of mathematical structure. *Synthèse* 92, 315-348.

Corry, L. (1996). *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures.* Basel: Birkhäuser Verlag. (2004, Basel and Boston: Birkhäuser).

Corry, L. (2001). Mathematical structures from Hilbert to Bourbaki: The evolution of an image of mathematics. In Amy Dahan & Umberto Bottazzini (eds.), *Changing images of mathematics in history. From the French revolution to the new millennium,* pp. 167-186. London: Harwood Academic Publishers.

Corry, L. (2008). Writing the Ultimate Mathematical Textbook: Nicolas Bourbaki's Éléments de Mathématique. In E. Robson & J. Stedall (eds.), *Handbook of the History of Mathematics,* Oxford: Oxford University Press.

Cousquer, E. (1992). *Histoire du concept de nombre.* Lille: IREM, U. de Sc. et Technologie de Lille.

Dahan-Dalmenico, A., Pfeiffer, J. & Dessanti, J.-T. (1986). *Une Histoire des Mathématiques.* Paris: Editions du Seuil.

D'Amore, B., Font, V. & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradìgma*, (28)2, 49-77.

Davis, R. B. & Maher, C. A. (1997). How students think: The role of representations. In I. D. English (ed.): *Mathematical reasoning: analogies, metaphors an images,* pp. 93-115. Mahwah. M. J. Erlbaum.

Dean, R. A. (1967). *Elements of Abstract Algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und Irrationale Zahlen.* Braunschweig: Vieweg. Versión inglesa: W.W. Beman (ed.). 1963. *Continuity and the Irrational Numbers*. In *Essays on the theory of numbers*. New York: Dover

Dedekind, R. (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweb. (Versión inglesa: W.W. Beman (ed.). 1963. The nature and meaning of numbers. In *Essays on the theory of numbers*. New York: Dover.

Dedekind, R. (1932). *Gesammelte matematische Werke*. R. Fricke, E. Noether & O. Ore, eds. Braunschweig: Vieweg & Sohn.

Dhombres, J. (1978). *Nombre, mesure, continu*. Paris: Cedic/Fernand Nathan.

Dick, A. (1981). *Emmy Noether,1882-1935*. Boston: Burkhäuser.

Dickson, L. E. (1926). *Modern Algebraic Theories*. Chicago: B. H. Sanborn & Co.

Dieudonné, J. (1964). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire.* Paris: Hermann.

Dieudonné, J. (1970). The work of Nicolas Bourbaki. *American Mathematical Monthly* 77, 134-145.

Dieudonné, J. (1978). *Abrégé d'Histoire des mathématiques*. Paris: Hermann.

Dorier, J.-L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 29, 175-197.

Dorier, J-L. (2000). *Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur L'Algèbre Linéaire – Perspectives théoriques sus leurs interactions.* Les Cahiers du Laboratoire Leibniz,12, oct.

Dorier, J.-L. (2002). Teaching linear algebra at university. *ICMI studies*, Vol. III 1-3 pp. 875-884.

Dubinsky, E. (1991 a). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall, (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 95-123. Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1991 b). The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics, in L. P. Steffe, (ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience*, New York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1994). A theory and practice of learning college mathematics. En A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*, 221-247. Hillsdale: Erslbaum.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de una perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8(3), 24-45.

Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course. In D. Carlson, C. Johnson, D. Lay, R. D. Porter, A. Watkins & and W. Watkins, eds., Resources For Teaching Linear Algebra, *Mathematical American Association Notes,* 42, 85-106.

Dubinsky, E. (2000). Meaning and formalism in mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 211-240.

Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Group Theory. *Educational studies in Mathematics,* 27, 267-305.

Dubinsky, E. & Leron, U. (1994). *Learning Abstract Algebra with ISETL*. New York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. & Leron, U. (1995). An Abstract Algebra Story, *American Mathematical Monthly*, 102(3), 227-242.

Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton, et al. (eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 273-280.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part I. *Educational Studies in Mathematics,* 58(3), 335 - 359.

Dubinsky, E. & Yiparaki, O. (1996). *Predicate Calculus and the Mathematical Thinking of Students*,

http://www.cs.cornell.edu/Info/People/gries/symposium/dubinsky.htm

Dubinsky, E. & Zazkis, R. (1996). Dihedral Groups: A Tale of Two Interpretations. Research in Collegiate Mathematics Education II, *CBMS Issues in Mathematics Education* 6, pp. 61-82.

Dubreil, P. (1975). *Teoría de Grupos. Curso de iniciación*. Barcelona: Reverté.

Dubreil, P. & Dubreil-Jacotin, M. L. (1961). *Leçons d'Algèbre Moderne*. (Edición en español: (1965). *Lecciones de Álgebra Moderna*. Barcelona: Reverté.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Berne: Peter Lang.

Dyck, W. von. (1882). Gruppentheoretische Studien. *Mathematische Annalen,* 20, 1-44

Ehresmann, Ch. (1965). *Catégories et structures.* Paris: Dunod.

Eilenberg, S. & Mac Lane, S. (1942). Group extensions and homology. *Ann. Math*. 43, 757-831.

Eilenberg, S. & Steenrod, N. (1951). *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton: University Press.

Fehr, H., Camp, J. & Kellog, H. (1971). The Revolution in School Mathematics, Phase II. Washington, D.C.: Organization of American States General Secretariat.

Fraleigh, J. B. (1973). *A first course in Abstract Algebra*. Reading, Massachussets: Addison Wesley. (Seventh ed., 2003, with V. Katz; Boston: Pearson Education).

Frege, L. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik.* Breslau: Koebner. (Versión en inglés de J. L. Austin, *The Foundations of Arithmetic*. Oxford: Basil Blackwell, 1968).

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Fricke, R. (1924). *Lehrbuch der Algebra – verfasst mit Benutzung vom Heinrich Webers gleichnamigem Buche*. Braunschweig: Vieweg.

Frobenius, G. (1887). Neuer Beweis des Sylowshen Satzes. Journal fur die reine und angewandte Mathematik 86, 217-261. J.- P. Serre (ed.), 1968, Gessammelte Abhandlungen, Vol. II, pp. 301-303, Berlin: Springer-Verlag.

Galois, E. (1832). Lettre a Auguste Chevalier. En Revue Encyclopédique, sept. Reprinted: (1897). *Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois*, publiées sous les auspices de la Société Mathématique de France, pp. 25-32.

Galois, E. (1962). *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois.* Robert Bourgne y J.-P. Azr, (éds). Paris: Gauthier-Vilars.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (18)1, 52, 7-33.

Gascón, Josep. (2010). *La TAD ante el problema de la Educación Matemática*. Coloquio de Didáctica de la Matemática. Instituto de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. 16 de septiembre.

Gauss, C. F. (1801). *Disquisitiones arithmeticae.* Lepzig: G. Fleischer. (Versión francesa de A. C. M. Poullet-Delislle, Paris: Gauthier-Villars, 1957).

Gentile, E. (1973). *Estructuras Algebraicas, I.* Washington, D. C.: Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos.

Godement, R. (1963). *Cours d'Algèbre.* Paris: Hermann.

Grattan-Guinness, I. (ed.). (2005). *Landmark writings in western mathematics, 1640-1940*. Amsterdam: Elsevier Science.

Guichard, J. (2000). L'infini au carrefour de la philosophie et des mathématiques. *Ellipses*. IREM de Paris.

Hall, H. S. & Knight, S. R. (1952). *Higher Algebra.* London: Mac Millan & Co. (First Edition 1885).

Hall, M. (1969). *Teoría de los Grupos.* (1967). México: Trillas.

Halmos, P. (1960). *Naïve Set Theory*. Princeton, New Jersey: Van Nostrand.

Hamilton, W. R. (1844). On Quaternions: Letter to John Thomas Graves, 17th October,

1843. *London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science,* 25, 489-95.

Hamilton, W. R. (1853). *Lectures on Quaternions*. Dublin: Hodges and Smith.

Hasse, H. (1926). *Höhere Algebra*. 2 vols. Berlin: Sammlung Göschen.

Haupt, O. (1929). *Einführung in die Algebra*. Leipzig: Veit.

Hawkins, T. (1984). The Erlanger Programm of Felix Klein: Reflections on its place in the History of Mathematics. *Historia Mathematica,* 11, 442-470.

Hazzan, O. (2001). Reducing abstraction. The case of constructing an operation table. *Journal of Mathematical Behavior,* 20, 163-172.

Hazzan, O. (2004). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 40(1), 71-90.

Hazzan, O. & Leron, U. (1996). Students' use and misuse of mathematical theorems: the case of Lagrange's Theorem. *For the Learning of Mathematics,* 16, 23-26.

Hensel, K. (1879), Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, *J. Reine Angew. Math.,* 84, 21..

Hersh, R. (1986). Some proposals for reviving the Philosophy of Mathematics. In T. Tymockzo (Ed.): *New directions in the Philosophy of Mathematics*, pp. 9-28. Boston: Birkhäuser.

Herstein, N. (1964). *Topics in Algebra*. Massachusetts: Blaisdell. Versión en español: 1970, *Álgebra Moderna*. México: Trillas.

Hewitt, J. (1956). Review of Bourbaki (1939-), Book IV (1953-55). *Bulletin AMS,* 62, 507-508.

Hilton, P. & Wu, Y.-C. (1977). *Curso de Álgebra Moderna*. Barcelona: Reverté.

Hoffmann, J. (1961). *Historia de la Matemática*. (3 vol.). México: UTEHA.

Hölder, O. (1889). Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen. *Mathematische Annalen* 34, 26-56

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes Géométriques et Enseignement de la Géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.

Hume, D. (1777). *An Enquiry concerning Human Understanding*. 3rd. ed., P. N. Nidditch (ed.), 1975. Oxford: Clarendon Press.

Hungerford, T. W. (1974). *Algebra*. New York: Springer-Verlag.

Inhelder, B., Sinclair, H. & Bovet, M. (1974). *Learning and the Development of Cognition*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Jacobson, N. (1951). *Lectures in Abstract Algebra.* Vol 1. (Vol. 2, 1952; vol. 3, 1964). Princeton, New Jersey: Van Nostrand.

Jordan, C. (1870). *Traité des substitutions et des équations algébriques.* Paris: Gauthier-Vilars.

Jordan, C. (1873). Sur la limite de transitivité des groupes non alternés. *Bulletin de la Societé Mathématique de France* I, 40-71. *Oeuvres*, J. Dieudonné, (ed.). 1961, Vol I pp. 365-369. Paris: Gauthier Vilars.

Jordan, C. (1961). *Oeuvres*. J. Dieudonné, (ed.). Paris: Gauthier Vilars.

Katz, V. (1997). Algebra and its Teaching: An Historical Survey. *Journal of Mathematical Behavior,* 16 (1) 25-38.

Klein, F. (1872). *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Fors-chungen.* Erlangen. Reprinted: Mathematische Annalen 43 (1893). Reprinted: Gessamelte mathematische Abhandlungen. Vol. 2. R. Fricke & H. Vermeil. Berlin. 1992, pp. 262-274.

Klein, F. (1884). *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*. Teubner: Leipzig. (Burkhäuser-Verlag, 1993).

Klein, F. (1992). *Gessamelte mathematische Abhandlungen.* Vol. 2. R. Fricke & H.

Vermeil. Berlin.

Kleiner, I. (1986). The evolution of group theory. A brief survey. *Mathematics Magazine,* 59, (4), 195-215.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. 3 vol. Oxford: Oxford University Press.

Kline, M. (1980). *Mathematics. The loss of certainty.* New York: Oxford University Press.

Kostrikin, A. I. (1992). *Introducción al Álgebra*. Madrid: MacGraw-Hill.

Kronecker, L. (1887). Über den Zahlbegriff. *Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 101 (1887), 337-355.

Kuhn, T. (1962). *The structure of Scientific Revolutions.* Chicago: University of Chicago Press.

Kurosh, A. (1953). *The Theory of groups*. New York: Chelsea.

Lagrange, J. (1770). Reflexions sur la résolution algébrique des equations. Nouvelles Mémoires de l'Académie Berlin, années 1773 et 1775. Reprint: *Oeuvres de Lagrange*. Publiées par les soins de M. J. A. Serret. Vol 3. Paris, 1869, pp. 693-795.

Lajoie, C. (2001). Students' difficulties with the concept of group, subgroup and group isomorphism. In H. Chick, K. Stacey, Jill Vincent & John Vincent (Eds.): *The future of the Teaching and Learning of Algebra,* Proceedings of the 12th. ICMI Study Conference. Melbourne: The University of Melbourne.

Lajoie, C. & Mura, R. (2000). What's in a name? A learning difficulty in connection with Cyclic Groups. *For the learning of Mathematics,* 20 (3), 29-33.

Lakatos, I. (1993). *La metodología de los Programas de investigación científica*. Madrid: Alianza Editorial.

Lakatos, I. & Musgrave, A. (1970). *Criticism and the Growth of Knolwedege*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lakoff, G. & Núñez, R. E. (1997). The Metaphorical structure of Mathematics: sketching out cognitive foundations for a mind-based Mathematics. In I.D. English (Ed.): Mathematical reasoning: analogies, metaphors an images. *Mahwah. M.J. Erlbaum*, 21-89.

Lakoff, G. & Núñez, R. E. (2000). *Where Mathematics come from: How the Embodied Mind brings Mathematics into being.* New York: Basic Books.

Lang, S. (1967). *Algebraic Structures*. Reading, Massachussetts, Addison-Wesley.

Lang, S. (1969). *Algebra*. New York: Addison Wesley.

Lentin, A. & Rivaud, J. (1969). *Álgebra Moderna.* Madrid: Aguilar.

Leron, U. & Dubinsky, E. (1995). An Abstract Algebra Story. *American Mathematical Monthly,* 102(3), 227-242

Leron, U., Hazzan, O. & Zazkis, R. (1994). Student's Constructions of Group Isomorphisms. *Proceedings of the 18th Annual Conference of the International Group for Psychology in Mathematics Education, Lisbon*, Portugal, vol. 13, pp. 152-159.

Leron, U., Hazzan, O. & Zazkis, R. (1995). Learning group Isomorphism: A Crossroads of many Concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 29, 153-174.

Lie, S. (1874). Über Gruppen von Transformationen. *Gottinger Nachrichten* Nr. 22 (1874), pp. 529-542

Lyndon, R. (1979). Saunders Mac Lane as a shaper of mathematics and mathematicians. In Kaplansky, I. (ed.), *Saunders Mac Lane: Selected Papers*, pp. 515-518. New York: Springer-Verlag.

Mac Donald, I. D. (1968). *The Theory of Groups*. Oxford: Oxford University Press.

MacDuffee, C. C. (1933). *The Theory of Matrices*. New York: Springer Verlag.

Mac Lane, S. (1972). *Categories for the working Mathematician*. New York: Springer Verlag.

Mac Lane, S. (1981 a). Mathematical models: A sketch for the Philosophy of Mathematics. *American Mathematical Monthly*, (88) 462-472.

Mac Lane, S. (1981 b). Mathematics at the University of Göttingen, 1931-1933. In J. K. Brewer and M. K. Smith, (eds.) *Emmy Noether, a Tribute to her Life and Work*, pp. 65-78. New York: Marcel-Dekker.

Mac Lane, S. (1987). *Mathematics: form and function.* New York and Berlin: Springer.

Mac Lane, S. (1995). Mathematics at Göttingen under the Nazis. *Notices of the AMS,* (42)10, 1134-1139.

Mac Lane, S. (1997). Van der Waerden's Modern Algebra. *Notices of the AMS*, (44)3, 321-322.

Mac Lane, S. & Birkhoff, G. (1967). *Algebra*. New York: The Macmillan Company.

Mathias, A. (1992). The ignorance of Bourbaki. *Mathematical Intelligencer,* 14, 4-13.

McLarty, C. (2005). Saunders Mac Lane (1909-2005): His Mathematical Life and Philosophical Works. *Philosophia Mathematica,* 13, 237-51.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(3), 221-271.

Mena, A. (2002). *elementos de matemáticas: grupos.* Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Mena, A. (2003). *elementos de matemáticas: anillos.* Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Mena, A. (2007). Why focusing on representation: from a semiotic to a purely mathematical approach. *APEC-Tsukuba International Conference III*. http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/index_en.php

Merklen, H. (1972). *Introducción a la teoría de los números reales y naturales*. Valparaíso: Ediciones Universitarias.

Montucla, J. F. (1968). *Histoire des Mathématiques.* Paris: Blanchard.

Moore, J. T. (1967). *Elements of Abstract Algebra.* London: The Macmillan Company.

Nachbin, L. (1986). *Álgebra Elemental.* Washington, D. C.: Secretaría General de la Organización de Estados Americanos.

Nardi, E. (1996). *The novice mathematician's encounter with mathematical abstraction: tensions in concept-image construction and formalisation*. Thesis, University of Oxford. http://www.uea.ac.uk/~m011/thesis.

Nardi, E. (2000). Mathematics undergraduate's responses to semantic abbreviations, 'geometric' images and multi-level abstractions in Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 43(2), 168-189.

Netto, E. (1882/1892). *Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra*. Leipzig: Teubner.

Neubrand, M. (1981). The homomorphism theorem within a spiral curriculum. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol*., 1981, 12(1), 29-74

Nicholson, J. (1993). The Development and Undertsanding of the Concept of Quotient Group. *Historia Mathematica,* 20, 68-88.

Nixon, G. (2005). *Creating and learning abstract algebra: historical phases and conceptual levels.* Ph. D. thesis, University of South Africa.

Noether, E. (1926). Abstrakter aufbau der Idealtheorie in algebraischen zahl –und function– skörper. *Mathematische Annalen,* 96, 26-61.

Noether, E. (1934). *Zerfallende verschrankle Produkte und ihre maximalordnungen*. Paris: Hermann.

Nový, L. (1973). *Origins of Modern Algebra.* Leyden: Nordhoff International Publising.

O'Brien, H. (1973). *Estructuras Algebraicas III: Grupos finitos*. Washington, D. C.: Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos.

OECD (2004). *Revisión de Políticas Nacionales de Educación. Chile.* Paris: Organisation for Economic Co-operation and Development.

Oktaç, A., Trigueros, M. & Vargas, X. N. (2006). Understanding of vector spaces – a viewpoint from APOS theory, CD-ROM *Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics*. Istanbul, Turkey.

Paley, H. & Weichsel, P. M. (1966). *A first course in abstract algebra*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2009). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications.* doi: 10.1016/j.laa.2009.06.034

Phillips, E. (ed.). (1987). *Studies in the History of Mathematics*. Washington: The Mathematical Association of America.

Piaget, J. (1963). *Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia; La enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Aguilar.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology*. New York and London: Columbia University Press.

Piaget, J. (1970). *Épistemologie Génétique.* Paris: Presses Universitaires de France.

Piaget, J., Grize, J.-B., Szeminska, A. & Bang, V. (1968). *Épistemologie et Psychologie de la fonction*. Paris: Presses Universitaires de France.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1962). *The Psychology of the Child*. New York: Basic Books.

Piaget, J. & García, R. (1989). *Psychogenesis and the history of Science.* New York: Columbia University Press.

Pinxten, R. (1987). *Evolutionary epistemology*. Dordretch: D. Reidel Publishing Co.

Queysanne, M. & Delachet, A. (1957). *El Álgebra Moderna*. Barcelona: Vergara Editorial.

Roa, D. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal*. Tesis de Maestría, CINVESTAV, Instituto Politécnico Nacional, México.

Roa, D., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (2010) 13 (1): 89-112.

Robert, A. & Robinet, J. (1993). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Cahier DIDIREM* No. 21, IREM de Paris VII.

Rotman, J. (1973). *The theory of Groups, an Introduction*. Boston: Allyn and Bacon.

Samuel, P. (1948). On universal mappings and free topological groups. *Bull. Am. Math. Soc*., 54, 591-598.

Samuel, P. (1972). Review of Bourbaki (1939-), Book II, Ch. 1-3 (1970). *Math. Rev.,* 43(2).

Séguier, J. A. de, (1904). *Théorie des groupes finies. Éléments de la théorie des groupes abstraits*. Paris: Gauthier Vilars.

Selden, A. & Selden J. (1978). Errors students make in mathematical reasoning. *Bōgazici Üniversitesi Dergisi*, 6, 67-87.

Serret, J. (1849). *Cours d'algèbre supérieure.* (2d. ed. 1854, 3d. ed. 1866). Paris: Gauthier Villars.

Sfard, A. (1995). The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives. *Journal of Mathematical Behavior,* 14, 15-39.

Sierpinska, A. (1996). The diachronic dimension in research on understanding in mathematics – usefulness and limitations of the concept of epistemological obstacle. In

H.N. Yahnke & M. Otte (Eds.): *Interaction between the History of Mathematics and Mathematics Learning*. Göttingen: Vanderhoeck & Ruprecht.

Spindler, K. (1993). *Abstract Algebra with Applications.* (2 vol.). New York: Marcel Dekker, Inc.

Spivak, Michael (1971). *Calculus on Manifolds*. Colorado: Westview Press.

Stewart, I. (1998). *Galois Theory*. London: Chapman & Hall.

Stilwell, J. (2002). *Mathematics and its history*. New York: Springer Verlag.

Tall, D. (ed.). (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E. & Simpson, A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (2), 223-241.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17 (1), 5-31.

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 157-176.

Trigueros, M., Oktaç, A. & Manzanero, L. (2007). Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra. In *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME), Larnaca, Chipre.

Van Hiele, P. (1959). *Developing and learning process: A study of some aspects of Piaget psychology in relation with the didactics of Mathematics*. Utrecht: J. B. Wolters.

Vidakovic, D. (1993). *Cooperative Learning: Differences between Group and Individual Processes of Construction of the Concept of Function.* Thesis, Purdue University.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In G. Harel and E. Dubisnky (Eds.): *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes Series No. 25, The Mathematical Asociation of America.

Waerden, B. L. van der (1935). Nachruf auf Emmy Noether. *Mathematische Annalen,* 111, 469-474.

Waerden, B. L. van der (1939). Nachruf auf Otto Hölder. *Mathematische Annalen,* 116, 157-164

Waerden, B. L. van der (1949) (2003). *Modern Algebra*. 2 vols. New York: Ungar Publishing Co. Berlin: Springer-Verlag. (Primera edición, *Moderne Algebra*, 1930, Berlin: Springer; Edición Springer Verlag, New York: 2003).

Waerden, B. L. van der (1975). On the Sources of my book Moderne Algebra. *Historia Matematica,* 2, 31-40.

Waerden, B. L. van der (1985). *A History of Algebra: from al-Khwārizmī to Emmy Noether*. Berlin: Springer-Verlag.

Weber, H. (1882). Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quatratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist. *Mathematische Annalen,* 20(1882), 301-329.

Weber, H. (1895). *Lehrbuch der Algebra.* Braunschweig: Vieweg und Sohn.

Weyl, Hermann (1955). *The Concept of a Riemann Surface*. Reading, Massachussets: Addison-Wesley, Publicado como *Die Idee der Riemannschen Fläche,* 1913.

Wussing, H. (1984). *The Genesis of Abstract Group Theory*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Zaskis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating Visual and Analytic Strategies: A Study of Students' Understanding of the Group D_4. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), pp. 435- 457.